

124.1
5807

中学数学参考读物

平面三角·平面解析
几何习题选

北京师范学院附中
党钧 王振江 主编

内 容 简 介

本书是根据教育部制订的《中学数学教学大纲》的内容和要求编写的数学参考读物的平面三角与平面解析几何部分。

平面三角部分，根据本科特点和学生的实际情况，将习题作精细分类，并附有代表性的典型例题；平面解析几何部分，侧重于曲线方程的基础理论和基本研究方法。书中除有相当数量的基础练习题外，还精选一些综合性习题，以提高灵活运用基础知识的能力。

本书不同于一般高考习题选解或复习参考资料。其目的是为了适应全国统编教材的日常教学的实际需要，以提高教学质量。内容循序渐进，着眼于重点教材，力求作为统编教材的课外补充，较好地配合单元小结、阶段复习和升学复习。

本书可供中学的数学教师和学生使用，也可供社会青年自修时参考。

平面三角·平面解析 几何习题选

北京师范大学附中

党 钧 王振江 主编

原子能出版社出版

(北京 2108 信箱)

国防科委印刷厂

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ ·印张 7·字数 151 千字

1981 年 1 月第一版·1981 年 1 月第一次印刷

·印数 001—324400·统一书号：15175·315

定价：0.58 元

编 者 的 话

中学数学参考读物是根据教育部制订的《中学数学教学大纲》（草案）的内容和要求编写的。这套书，由《初等代数习题选》、《初等几何习题选》和《平面三角·平面解析几何习题选》三本组成。

编写《平面三角·平面解析几何习题选》的目的是试图对中学数学统编教材的例题，习题作必要的补充，适宜用作教师日常教学参考和学生课外自修。本书除有相当数量的、类型齐全的基本练习题外，都附有适量的综合性例题和习题，并作了解答或提示；对有些章节根据我们多年的教学经验作了一些简括的总结，并配以精选的例题、习题。但是，毕竟我们水平有限，不妥之处难免，敬请读者批评指正。

《平面三角·平面解析几何习题选》由党钧、王振江主编。

目 录

平 面 三 角

第一部分 基本练习题	1
第一章 三角函数基本概念和性质	1
第二章 求值	13
第三章 三角函数式的恒等变形	22
第四章 正弦、余弦定理	37
第五章 反三角函数和三角方程	52
第二部分 综合练习题	59
综合练习题提示与答案	65

平 面 解 析 几 何

第一部分 基本练习题	98
第一章 有关直角坐标系的基本公式和曲线方程的概念	98
第二章 直线	113
第三章 圆锥曲线	128
第四章 极坐标和参数方程	168
第二部分 综合练习题	183
综合练习题解答	188

平 面 三 角

第一部分 基本练习题

第一章 三角函数基本概念和性质

§1. 三角函数的基本概念

1. 把下列角度化为弧度:

$$30^\circ, 540^\circ, -600^\circ, K360^\circ + 120^\circ, 0^\circ, 15^\circ, 36^\circ.$$

2. 把下列弧度化为角度:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{9\pi}{5}, 2K\pi + \frac{7\pi}{3}, K\pi - \frac{5\pi}{6}, 1, \frac{3\pi}{8}.$$

3. 若 $-180^\circ < \alpha < -540^\circ$, 且 α 与 40° 终边相同求:

$$\alpha = ?$$

4. 若 $4\pi < \alpha < 6\pi$, 且 α 与 $-\frac{2\pi}{3}$ 终边相同求: $\alpha = ?$

5. $900^\circ, -520^\circ, 450^\circ, 0, 1, \frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}$ 各为第

几象限角?

6. 若 $\alpha = K\pi + \frac{\pi}{3}$, 且 K 为整数, 则 α 为第几象限角?

7. 若 $\alpha = \frac{K}{2}\pi - \frac{\pi}{4}$, 且 K 为整数, 则 α 为第几象限角?

8. α 在第三象限, 则 $\frac{\alpha}{2}$, 2α 为第几象限角?

9. 若 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, 求 $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ 的范围?

10. 若 α , β 均为锐角, 求 $2\alpha + \beta$ 的范围?

11. 已知 $\frac{1}{\pi} = 0.31830988\dots$, 一条弧长为 14cm , 含 $\frac{\pi}{8}$ 个

弧度, 求这弧所在圆的半径 (精确到 0.01).

12. 如果角的终边上一点的坐标是:

① $(3, 4)$; ② $(-5, 12)$; ③ $(-8, -6)$;

④ $(8, -15)$; ⑤ $(3, 0)$; ⑥ $(0, -5)$;

求这角的各三角函数值.

13. 求 1) $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = ?$

2) $\sec 45^\circ \cdot \csc 45^\circ + \sec 30^\circ \cdot \csc 30^\circ - \sec 60^\circ \cdot \csc 60^\circ = ?$

14. 求 1) $2\cos 0 + 3\sin \frac{\pi}{2} - 4\cos \pi + 5\sin \frac{3\pi}{2} -$

$6\cos 2\pi = ?$

2) $4\sin \frac{\pi}{6} + \text{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} +$

$\text{tg}\pi = ?$

15. 利用三角函数线证明:

1) $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \geq 1$.

2) 当 α 为锐角时 $\text{tg}\alpha > \sin \alpha$.

16. 利用三角函数线 (单位圆)证明同角基本关系式和诱导公式.

§2. 求函数的定义域和值域

例. 求 $y = \sqrt{-\cos\theta} + \sqrt{\operatorname{ctg}\theta}$ 的定义域.

【解】

$$\therefore \begin{cases} -\cos\theta \geq 0, \\ \operatorname{ctg}\theta \geq 0, \\ \operatorname{ctg}\theta \text{ 有意义.} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2K\pi + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2K\pi + \frac{3\pi}{2}, \\ 2K\pi < \theta \leq 2K\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } 2K\pi + \pi < \theta \leq 2K\pi + \frac{3\pi}{2}, \\ \theta \neq K\pi, \end{cases}$$

$$\text{则: } 2K\pi + \pi < \theta \leq 2K\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ 或 } \theta = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$$

($K = \text{整数}$).

练 习

1. 求下列函数的定义域、值域和极值

1) $y = 2 \sin x + 1$;

2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

3) $y = 2 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$;

$$4) y = \operatorname{ctg} 2x;$$

$$5) y = \frac{1}{|\sin x|};$$

$$6) y = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 1;$$

$$7) y = \frac{\sin x}{1 + \cos x};$$

$$8) y = \sqrt{\sqrt{2} - 2 \sin x};$$

$$9) y = \sqrt{\lg \sin x};$$

$$10) y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2. 求下列函数的定义域

$$1) y = \frac{\lg \sin \theta}{\sec 2\theta};$$

$$2) y = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta};$$

$$3) y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \theta}}{2 \cos \theta - 1}.$$

3. 求下列函数的极值和极值条件

$$1) y = -2 \sin 2x + 1;$$

$$2) y = |\cos x| + 2;$$

$$3) y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x;$$

$$4) y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 2;$$

5) 设 $x + y = 60^\circ$, 求 $\sin x + \sin y$ 的极值;

$$6) y = \frac{3}{(2 + \cos x)(5 - \cos x)};$$

$$7) y = 2 \sin(x - 30^\circ) \cdot \cos x \text{ 的极大值.}$$

4. 有没有 0 到 2π 的角, 使得

$$1) \sin a \text{ 和 } \cos a \text{ 都等于 } \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \sin a = \frac{1}{2}, \text{ 而 } \cos a = -\frac{1}{2};$$

$$3) \sin a = -\frac{8}{17}, \text{ 而 } \cos a = \frac{3}{5}.$$

5. $\sin x = a + \frac{1}{a}$ 能否成立? 为什么?

6. 若 $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y$, 则 x 和 y 是怎样的关系?

7. 若 $(\sin x)(\sin y) = 1$, 则 x, y 有怎样的关系?

8. 当 $\frac{\sin x}{\cos x} < 0$, 求 x 的范围?

9. $\sin x$ 和 $\cos x$ 同号, 求 x 的范围?

10. $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{csc} x > 0$, 求 x 的范围?

11. $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{sec} x > 0$, 求 x 的范围?

12. 当 $\cos x < 0$, 而 $\sin x$ 是减函数, 求 x 的范围?

13. 当 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是减函数, 求 x 的范围?

14. 若 $\operatorname{tg} a \cdot \sqrt{\sin a}$ 有意义, 求 a 的范围?

15. 已知 $y = \sqrt{\sin \theta \cdot \cos \theta}$, 求 y 的定义域?

16. 求函数 $y = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}}{1 - |\cos x|}$ 的定义域?

17. 求 $y = \lg \operatorname{tg} x$ 的定义域?
18. 当 $\cos x - \frac{1}{2} > 0$, 求 x 的范围?
19. 当 $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 x 的范围?
20. 若 $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sec} \alpha$ 成立, 求 α 的范围?
21. 若 $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha - \operatorname{sec} \alpha$ 成立, 求 α 的范围?
22. 若 $\sqrt{1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$ 成立, 求 α 的范围?
23. 若 $\cos \theta = 2x + 2$, 求 x 的范围?
24. 若 $0 < \alpha < 2\pi$, 且 $\sin \alpha > \cos \alpha$ 时, 求 α 的范围?
25. 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\sin \theta = m^2 - 2$ 时, 求 m 的范围?
26. 当 $0 \leq x < 2\pi$, x 取何值时,
- 1) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ 有意义,
 - 2) $\frac{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{1 + \sin 2x}$ 无意义.

§3. 函数的符号与函数值的大小比较

1. 确定下列各式的符号

1) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$;

2) $\sin 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$;

3) $\sin 120^\circ - \sin 165^\circ$;

4) $\cos 135^\circ + \operatorname{ctg} 230^\circ$;

5) $\sin 50^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ$;

6) $\cos 1 - \cos 1^\circ$.

2. 确定下列各式的符号

1) $\frac{\sin 40^\circ}{\operatorname{tg} 140^\circ}$;

2) $\frac{\cos 100^\circ - \sin 100^\circ}{\operatorname{tg} 100^\circ}$;

3) $\frac{\cos(-40^\circ)\sin(-140^\circ)}{\sec(-20^\circ)}$;

4) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} 160^\circ$;

5) $\sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$;

6) $\operatorname{tg} 100^\circ - |\operatorname{tg} 120^\circ|$.

3. 当 α 在第三象限时, $\cos \alpha$ 是增函数还是减函数, 是正的还是负的?

4. 当 $0 \leq \alpha < 2\pi$ 时确定

1) $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的符号; 2) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 的符号.

5. 为什么 $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$ 不能为负?

6. 为什么 $\sin \alpha$ 与 $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ 永远同号?

7. 当 α 在第二象限时, $\cos \frac{\alpha}{2}$ 是正的还是负的?

8. 当 α 在第三象限时, $\cos 2\alpha$ 是正的还是负的?

9. 当 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$, α 在第三象限, $\cos 2\alpha$ 是正的还是负的?

§4. 确定下列函数哪些是奇函数,
哪些是偶函数? 为什么?

1. ① $y = 2 \sin x$;

② $y = \cos x + 2$;

③ $f(x) = \sin^2 x$;

④ $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin x$;

⑤ $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

2. $f(x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}$.

3. $f(x) = \frac{x^2 + \cos x}{x^2 - \cos x}$.

4. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

5. $y = x \sin x$.

6. $y = x + \sin x$.

7. $y = x^2 + \sin^2 x$.

8. $y = x^2 + \cos x$.

§5. 求下列函数的周期

1. ① $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;

$$\textcircled{2} \quad y = 2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\textcircled{3} \quad y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) + 1;$$

$$\textcircled{4} \quad y = A \sin(Bx + \alpha) + C \quad (B > 0).$$

$$2. \textcircled{1} \quad y = \cos \frac{\pi(x+1)}{2};$$

$$\textcircled{2} \quad y = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3} + 1;$$

$$\textcircled{3} \quad y = \sin x \cos x;$$

$$\textcircled{4} \quad y = \sin x + \sqrt{3} \cos x.$$

3. 各举二个周期函数的例子使其周期为: $\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$.

4. 等式 $\sin \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{7\pi}{6}$ 能不能成立? 若能成

立能不能说 $\frac{2\pi}{3}$ 是 $\sin x$ 的周期? 为什么?

5. 求 $y = \sin 2x + \sin x$ 的周期.

6. 求 $y = \sin 3x + \sin 4x$ 的周期.

7. 求 $y = |\sin x|$ 的周期.

8. 求 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的周期.

9. 求 $y = \sin^2 x$ 的周期.

§6. 函数图象

1. 画出下列函数 $-\pi$ 到 2π 之间的图象

$$y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = \operatorname{tg} x.$$

2. 在同一坐标系下分别画出下列函数的图象, 并说明它们的图象的异同

$$y = \cos x; \quad y = \cos 2x; \quad y = 3 \cos 2x;$$

$$y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right); \quad y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1.$$

3. 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 间分别画出下列函数图象

① $y = |\sin x| + 1;$

② $y = \sin x + \cos x;$

③ $y = \sin x \cdot \cos x;$

④ $y = \operatorname{tg} x;$

⑤ $y = \sec x;$

⑥ $y = \operatorname{csc} x.$

4. 用五点法画图象, 并由图象观察写出函数的性质 (定义域、值域、极值、单调性、奇偶性、周期性等)

1) $y = \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) + 1;$

2) $y = 2 \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right);$

3) $y = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right).$

复 习 练 习 题

1. 若 $\alpha = 2K\pi + \frac{\pi}{6}$ ($K = \text{整数}$), 且 $-4\pi < \alpha < 4\pi$

求 $\alpha = ?$

2. 若 α 在第一、二象限时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第几象限?

若 α 在第三、四象限时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第几象限?

若 α 在第三象限时, 2α 在第几象限?

3. m 在什么范围内, $\sin \alpha = \frac{2m-3}{4}$ 才有意义?

4. x 取 0° 到 720° 之间的哪些值时;

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sec \frac{x}{2} \text{ 才能成立?}$$

5. 已知 A 为 $\triangle ABC$ 之内角, 确定下列函数的符号

① $\sin A$; ② $\cos A$; ③ $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

6. 作出 45° , 120° , 210° , 300° 的各三角函数线.

7. 若 $\cos \alpha > \cos 30^\circ$, 求锐角 α 的范围;

若 $\sin \alpha < \sin 135^\circ$, 求钝角 α 的范围.

8. 哪些三角函数的三角函数值可以等于

① -0.5 ; ② $\frac{3}{5}$; ③ 0 ; ④ -1 ; ⑤ $\sqrt{3}$.

9. 求 $m \operatorname{tg} 0^\circ + n \cos 90^\circ - p \sin 180^\circ - q \cos 270^\circ - n \sin 360^\circ$ 之值.

10. 讨论角 x 由 0° 变到 360° 时 $y = |\cos x|$ 的变化.

11. 求下列函数的周期

1) $y = \sin 3x + \operatorname{tg} \frac{2}{5} x$;

2) $y = \operatorname{tg} \pi x + \cos \pi x$;

3) $y = \operatorname{tg} 3\pi x + \operatorname{ctg} 2\pi x$.

12. 求下列函数的周期、极值

1) $y = 3 + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y = 2 - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

13. 画出下列函数的图象

$y = \sin x$; $y = |\sin x|$; $y = \sin |x|$.

14. 若 $|\sin x| = \sin |x|$ 成立, 求 x 可取值范围。

15. 用 $\sin x$ 表示 $\sin^4 x - \cos^4 x$, $1 - \operatorname{tg}^4 x$.

16. 用 $\operatorname{tg} x$ 表示 $\sin x$, $\cos x$.

17. 下列函数式能否成立? 为什么?

① $\sin x + \cos x = 1$;

② $\cos x = a + \frac{1}{a}$.

18. 已知扇形的弧度 $\frac{5\pi}{12}$, 其半径 $R=20$, 求扇形的周长与面积。

19. 作出 $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 3$ 的草图, 并指出函数的周期、振幅、初相、极值和频率。

20. 求函数 $y = \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x - 1$ 的周期, 当 x 为何值时, 这函数有极值, 其极值是多少?

第二章 求 值

例1. 已知 $\sin \theta = \frac{3}{5}$,

$$\text{求 } \frac{[\sin(180^\circ - \theta) + \cos(\theta - 360^\circ)]^2}{\text{ctg}(270^\circ - \theta)} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\text{tg} \theta} = \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\text{tg} \theta} \\ &= \text{ctg} \theta + 2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

当 θ 在第一象限时,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{4}{5},$$

$$\text{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{4}{3} + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{196}{75} = 2\frac{46}{75}.$$

当 θ 在第二象限时,

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}, \quad \text{ctg} \theta = -\frac{4}{3},$$

$$\text{原式} = -\frac{4}{3} + 2 \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{4}{75}.$$

例2. 已知 $\text{tg} \alpha = 2$,

$$\text{求 } 3 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha = ?$$