高等院校选用教材·医药类

医学高等数学

马建忠　赵玉荣　主编

科学出版社

内 容 简 介

本书依据普通高等医学院校数学教学要求编写而成,书中讲述了微积分学、常微分方程、概率论及线性代数等方面的基础知识,重点突出了基本概念和数学方法。书中结合具体的医学问题给出了例题和习题,并介绍了借助计算机工具,用数学方法处理医学实际问题。

本书可供高等医学院校作数学教材使用,也可供医学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学/马建忠,赵玉荣主编. -北京:科学出版社,1999.8
(高等院校选用教材系列)
ISBN 7-03-007549-8

Ⅰ.医… Ⅱ.①马… ②赵… Ⅲ.医用数学-医学院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17424 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
北京双青印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
1999 年 8 月第一次印刷 印张: 17
印数: 1-7 000 字数: 381 000

定价:23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自1953年，沃森(J.D.Walson)等建立DNA双螺旋结构分子模型以来，医学和生物学的数学化进展迅猛。耗散结构理论，免疫网络理论，以及用微分方程组研究神经纤维的行为与神经冲动的传导分别荣获诺贝尔奖；借助电子计算机快速计算，按一定数学方法，由X射线的投影函数重建人体断层数字图像的X-CT成为医学影像的一次革命。这些足以表明数学是现代医学研究必不可少的工具。

《医学高等数学》的内容包含了医学研究中所涉及到的高等数学基础和高等数学方法。它是医学各门学科的基础课，为医学院校学生提供必备的数学素质教育；同时为研究医学实际问题和生命现象(或过程)的数量规律提供重要的数学基础知识。

为了适合我国医学院校实际情况和特点，满足21世纪医学教育改革发展的需要，原《医用高等数学》改名为《医学高等数学》，并在本书编写过程中重点突出如下特点：精炼教材内容，在有限学时内，给学生建立较广泛的数学基础知识；在坚持数学素质教育的原则下，兼顾数学自身理论体系，削减过多过难的理论推导，着重阐明基本概念和数学方法；坚持和增加用高等数学方法处理常见易懂的医学问题，使学生容易地理解数学与医学的联系；适当地开展数值计算和线性代数在计算机上的应用；力求做到重点突出，层次分明，深入浅出，行文流畅，说理透彻，图表清楚，便于自学。

另外，本书首次从实践到理论上论述概率密度曲线下的面积就是概率；并在许多地方把医学问题、数学方法和计算机计算技术融合在一起，启动学生创造性思维。

全书共分八章，其内容有一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、概率论、线性代数，并配有适当习题，附有习题答案以及常用数学表。此书一般在大学第一个学期讲授，总学时为84学时，可对有*号的内容作筛选或安排自学。数学学时较少的高等医学院校，各章节的取舍可自行调整。《医学高等数学》适用于作医学院校各类专业的必修课教材，研究生选修课教材，也可作为医学夜大基础课教材，同时可供医学研究人员参考。

本书在编写、出版过程中得到各参编学校的领导、教务处领导以及科学出版社的全力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者水平有限、经验不足，时间仓促，难免存在缺点和错误，衷心欢迎各界同仁和读者批评指正。

马建忠

1999年4月于沈阳

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象之一。本章从函数出发,用运动和变化的观点来研究函数极限和连续。函数极限是高等数学的一个重要工具,高等数学中的许多概念和理论都是以极限为基础的,正因为有了极限才使高等数学与初等数学有了本质差异。函数的连续性是函数可微的必要条件,又是函数可积的充分条件,因此连续函数是高等数学研究的主要函数。本章主要介绍三部分内容:函数、函数极限和函数的连续性,为后继章节奠定基础。

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

一、常量与变量

在某一变化过程中始终保持相对静止状态的量称为常量(constant quantity);时时处于变化着的量称为变量(variable)。前者记为 a、b、c 等,后者记为 x、y、t 等。如在一般情况下,人体器官的个数为常量,而人的身高、体重随年龄而变化,因此它们均为变量。

常量与变量的区分不是绝对的,而是相对的。这依当时所考虑问题的条件而定。如人的身高,在 1 天内就可认为是常量,而在 1 年内它就是变量;重力加速度,对某一固定地点来说,它是一个常量,而对不同地点来说可视之为变量。又如在圆的半径增加过程中,其周长和面积都是变量,而周长与直径之比却是常量(即为 π)。

二、函数的概念

在某一变化过程中,变量之间的关系往往不是孤立存在的,而是相互影响和相互制约的,它们彼此之间存在着一种确定的对应关系,这种关系在数学上概括为函数关系。

【定义 1】 设在某个变化过程中存在两个变量 x、y,若对于 x 变化范围内的每一个值,按照某一确定的关系 f 都有唯一一个实数 y 与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数(function)。记为 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$。其中 x 称为自变量(independent variable),y 称为因变量(dependent variable)。x 的取值范围称为函数的定义域(domain of definition),通常用 D 表示;y 的取值范围称为函数的值域(domain of functional value),通常记为 R,即 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$。

函数的定义有两个要素:一是自变量 x 必须有明确的定义域 D;二是在定义域范围内,变量 x 与 y 有确定的对应关系,这两个要素决定值域 R。如果两个函数相等,必须这两个要素完全相同。

考查函数 $y=2(x+1)$ 与函数 $y=2(x^2-1)/(x-1)$ 是否相等。虽然两个函数的对

应关系相同，但它们的定义域不同，前者的定义域是$(-\infty,+\infty)$，后者的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，从而决定了它们的值域也不同，所以这两个函数不相等。

函数概念中两个变量之间的对应关系有很多表达方式，常见有三种：解析法、表格法和图表法。高等数学重点研究的是解析法。因此，在医学高等数学中所接触到的两个变量之间的对应关系一般用解析法表示。

在解析法中，如果函数$f(x)$在x_0处有定义，则通常记为$y(x_0)$、$f(x_0)$或$y|x=x_0$。解析法表示的函数$f(x)$在平面直角坐标系中表示一条平面曲线。

例 1 求函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$的定义域。

解： 此函数的定义域是由函数$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$和函数$\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$的定义域交集所确定。要使函数$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$有意义，必须使$4-x^2>0$，即$|x|<2$，其定义域为$(-2,2)$；对于函数$\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$，必须保证$|\dfrac{x}{2}-1|\leqslant 1$，即$0\leqslant x\leqslant 4$，其定义域为$[0,4]$，因此$f(x)$的定义域为$(-2,2)\cap[0,4]=[0,2)$。

例 2 已知函数$f(x)=x^2+1$，求$f(2)$、$f[f(x)]$。

解： $f(2)=2^2+1=5$

$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$

例 3 已知函数$f(x)=x^2-3x+2$，求$f(x)$。

解： 利用变量代换法求$f(x)$。令$x+1=t$，则$x=t-1$，将其代入原式，得$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$，所以$f(x)=x^2-5x+6$。

在研究函数时，经常用到一点的邻域概念。所谓邻域是指如果x_0是实数轴上一点，δ为正实数，则开区间$x_0-\delta<x<x_0+\delta$称为点x_0的邻域(neighbourhood)，记为$\cup(x_0,\delta)=\{x \| x-x_0|<\delta\}$。

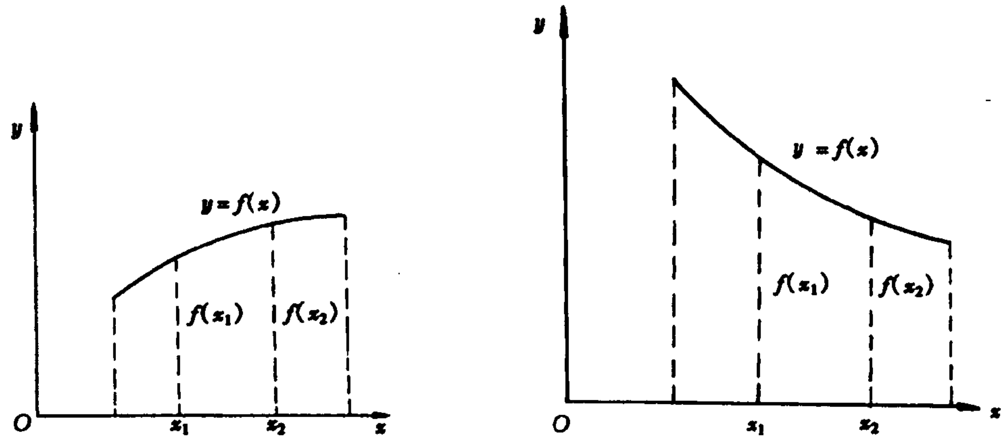
1.1.2 函数的特性

一、单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，如果在D中某一个子区间I中任意取两个值x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加（或单调减少）的。单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数(monotone function)。

如$y=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的；而$y=\sin x$在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上是单调增加的，在$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$上是单调减少的。

单调函数图像的特点是：单调增加函数对应的曲线随自变量x的逐渐增大而上升，见图1-1(a)；单调减少函数对应的曲线随自变量x逐渐增大而下降，见图1-1(b)。



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

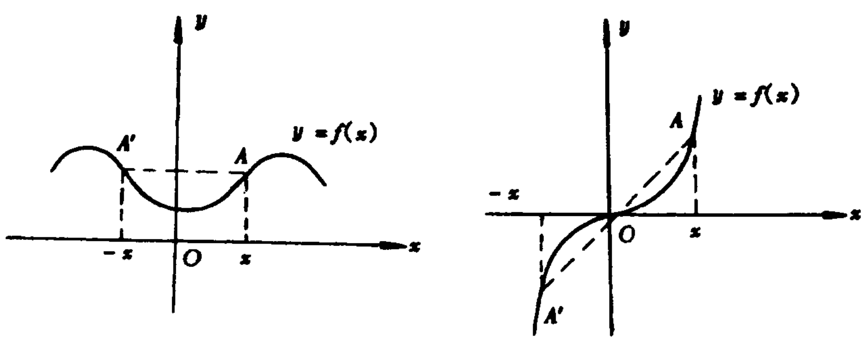
图 1-1

二、奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),如果对 D 内任意一点 x,都满足 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$在 D 内是偶函数(even function),若函数 $y=f(x)$对定义域 D 内任意一点 x,都满足 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$在 D 内是奇函数(odd function)。

如 $y=x^2$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是偶函数;$y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是奇函数;$y=\sin x+\cos x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上非奇非偶。

偶函数的图像是关于 y 轴对称,如图 1-2(a),奇函数的图像是关于原点对称,如图 1-2(b)。



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

图 1-2

三、有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 M,使得对于 D 中某一个子区间 I 内

任意一点 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$（即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$），则称函数 $f(x)$ 在 I 上是有界函数（bounded function），否则是无界函数（unbounded function）。

如 $\sin x$、$\cos x$ 对区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点 x，存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant M$，$|\cos x|\leqslant M$，所以它们在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上都是有界函数。同时也可以看出，只要 M 存在，个数就不唯一，如 2,2.8,3.6,…都可作为正弦函数和余弦函数的界。$\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为无界函数，因为找不到那样一个正数 M，使 $|\ln x|\leqslant M$ 成立。

一个函数有界还是无界，必须指明所考虑的区间，因为同一个函数在某个区间上可能是有界函数，但在另一个区间上却可能是无界函数。如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上是无界函数，但在闭区间 $[1,2]$ 上却是有界函数，因为在此区间上能找到 $M\geqslant 1$，使当 $x\in[1,2]$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立。

四、周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于任意一点 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上为周期函数（periodic function），T 称为 $f(x)$ 的周期。通常所说的周期是指最小正周期。

如 $\sin x$、$\cos x$ 均为周期函数，它们的最小正周期为 2π；$\operatorname{tg}x$、$\cot x$ 也是周期函数，它们的最小正周期为 π。

周期函数的图像特点是在这函数的定义域内，每个长度为周期 T 的区间上，函数所对应的曲线有相同的形状，如图 1-3。

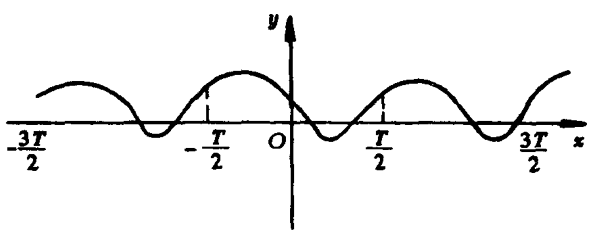


图 1-3

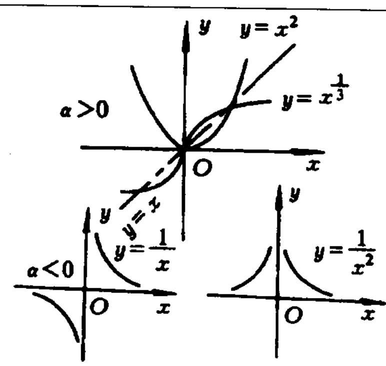
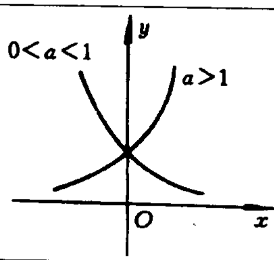
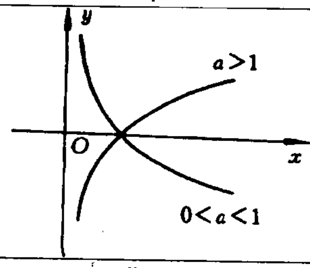
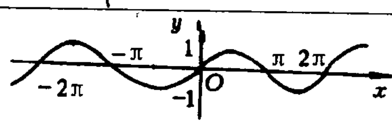
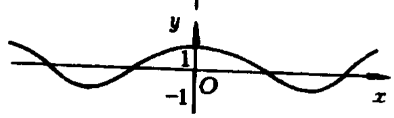
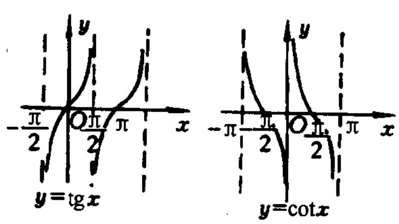
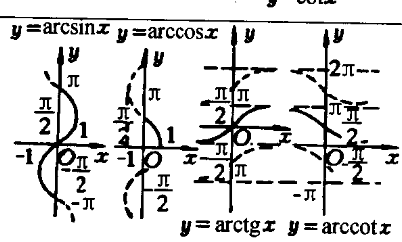
1.1.3 初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数（basic elementary function）通常是指幂函数（power function）、指数函数（exponential function）、对数函数（logarithmic function）、三角函数（trigonometric function）和反三角函数（anti-trigonometric function）。

它们的表达式、定义域、图像及主要性质见表 1-1。

表 1-1　基本初等函数表

函数名称	表达式	定义域	图　　像	主要性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$	α 取值不同函数的定义域不同		图像都经过(1,1)点，α 为偶数时，图像关于 y 轴对称 α 为奇数时，图像关于原点对称 α 为负数时，图像在原点间断
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0\\a\neq1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图像都经过点(0,1)，当 $a>1$ 时，a^x 为增函数 当 $0<a<1$ 时，a^x 为减函数
对数函数	$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix}a>0\\a\neq0\end{pmatrix}$	$(0,+\infty)$		图像都经过点(1,0)，当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 为增函数 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 为减函数
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数，有界函数周期 $T=2\pi$
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		偶函数，有界函数周期 $T=2\pi$
	$y=\mathrm{tg}x$ $y=\cot x$	$x\in R$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $x\in R$ $x\neq k\pi$		奇函数，周期 $T=\pi$ 奇函数，周期 $T=\pi$
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\mathrm{arccot}x$ $y=\mathrm{arccot}x$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$		奇函数，增函数　非奇非偶，减函数 奇函数，增函数　非奇非偶，减函数

二、复合函数

自由落体运动的动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$，其中 m 为质点的质量，v 为质点的速度，而 $v=gt$，其中 g 为重力加速度，我们称 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$ 是由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=gt$ 复合而成的 t 的复合函数。v 称为中间变量，t 为自变量。

一般所遇到的多数函数在结构上往往是由一些基本初等函数经过有限次的复合而构成的，下面给出复合函数的一般定义。

【定义 2】 设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域全部在 $y=f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由这两个函数经过中间变量(intermediate variable) u 而构成 x 的复合函数(compound function)，其中 x 为自变量，简称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数。

如 $y=\ln u$，$u=x-1$ 在 $x>1$ 时复合成的函数为 $y=\ln(x-1)$。

把一个复合函数进行分解非常重要，掌握分解便于今后研究复合函数的导数、微分与积分。分解复合函数的要点是使所分解出来的每一个函数都是基本初等函数或基本初等函数的四则运算所构成的函数，若中间的某一项又是复合函数，则应对它再进行分解。

如复合函数 $y=\arcsin[\lg(x-1)]$ 可分解为函数 $y=\arcsin u$，$u=\lg v$，$v=x-1$，所以中间变量可以是多个变量；又如 $y=x^4$ 可分解成 $y=u^2$，$u=x^2$，也可分解成 $y=u^{\frac{4}{3}}$，$u=x^3$，因此复合函数的分解并不唯一。

三、初等函数

【定义 3】 由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而构成并由一个式子表示的函数称为初等函数(elementary function)

如 $\arcsin[\lg(x-1)]$，多项式函数 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，双曲正弦函数 $\frac{e^{-x}-e^x}{2}$、双曲余弦函数 $\frac{e^{-x}+e^x}{2}$ 等等都是初等函数，但下面将介绍的分段函数就不是初等函数。

1.1.4 分段函数与反函数

一、分段函数

在定义域内不同的区间上，由不同解析式所表示的函数称为分段函数(piecewise function)。如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

以及函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 都是分段函数，而不是初等函数。

二、反函数

在多数情况下，通常是用因变量表示成自变量的函数，但有时研究问题时，需要把自变量表示成因变量的函数，这就产生了反函数的概念。

【定义 4】 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 R，若对于任意一个 $y\in R$，有唯一一个 $x\in D$，使 $f(x)=y$ 成立，则 x 与 y 的对应关系在 R 上定义了一个新函数，称为函数$y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

若把函数 $y=f(x)$称为直接函数，则直接函数的定义域(或值域)恰好是它的反函数 $x=f^{-1}(y)$的值域(或定义域)。在一般情况下，如果$y=f(x)$在某个区间上有定义且是单调函数，就能保证它的反函数 $x=f^{-1}(y)$存在。

例如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$在定义域$(-\infty,+\infty)$上是单调函数，它的值域是$(0,+\infty)$，所以它的反函数 $x=\log a^y$ 存在，其定义域是$(0,+\infty)$，即 $y\in(0,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$。

一般习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 来表示，这时 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$就可以写成 $y=f^{-1}(x)$。如函数 $y=a^x$ 的反函数一般不写成$x=\log a^y$，习惯上写成$y=\log a^x$。

直接函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图像是相同的，但由于互换了 x 与y 的位置，所以 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像就不同了，这时它们的图像在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 为对称曲线。如图 1-4 所示。

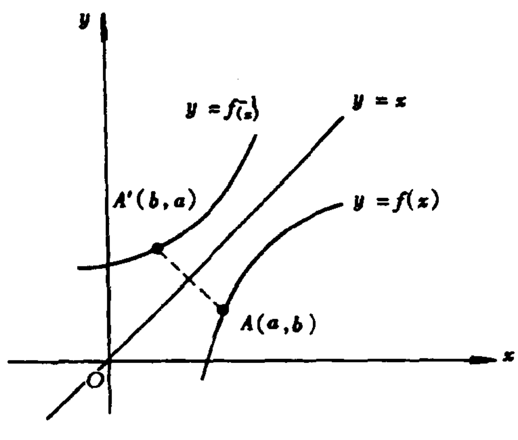


图 1-4

1.2 函数的极限

极限在高等数学中至关重要，许多概念如连续、导数、定积分和级数都是以极限为基础的，可以说它基本上贯穿整个高等数学的内容。本节主要介绍数列极限和函数极限及它们的运算。

我们知道，半径为 r 的圆内接正 n 边形面积为 $S_n=f(n)$，当边数 n 越来越大时，S_n 就越来越接近圆的面积，当 n 无限增大时，S_n 就是圆的面积 πr^2。这种思想是我国古代数学家刘徽(公元前 3 世纪)提出来的，这就是本节研究的极限概念。

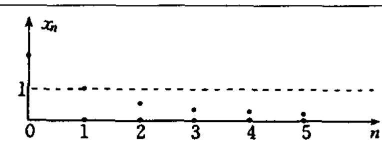
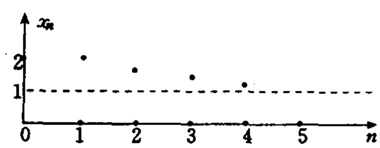
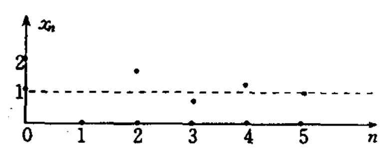
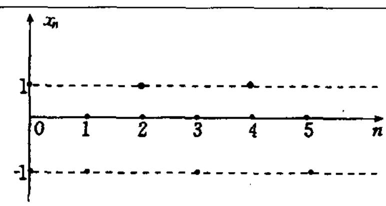
1.2.1 数列极限

一、数列极限

当自变量按自然数 1,2,3,⋯依次顺序增大时,函数值按一定的法则排列的一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为数列(sequence of number),记为$\{x_n\}$。因此数列是以自然数集为定义域的一种特殊的函数。

例 4 以下例子均为数列、见表 1-2 所示。

表 1-2

序号	数　　列	数列图像
(1)	$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$	
(2)	$\{x_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$	
(3)	$\{x_n\}=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}:,0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots 1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$	
(4)	$\{x_n\}=\{(-1)^n\}:-1,1,-1,\cdots(-1)^n,\cdots$	

在这些数列中,我们不仅要知道 n 取每一个值时,对应数列 x_n 的取值情况,而且还要知道当自变量 n 越来越大时,数列 x_n 的变化趋势。从表 1-2 中看到,例 4(1)中,当 $n\to\infty$时,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$越来越接近于零,在例 4(2)中,当 $n\to\infty$时,数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$越来越接近于1,在例 4(3)中,当 $n\to\infty$时,数列$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$越来越接近于 1,只不过是摆动地接近于1,而例 4(4)中,数列$\{(-1)^n\}$ 当$n\to\infty$时,不趋向一个确定的常数。

【定义 5】 对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,数列 x_n 无限接近某一个确定的常数A,则称 A 为数列x_n 的极限(limit),或称数列 x_n 收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或$x_n\to A$ $(n\to\infty)$,否则称数列 x_n 发散(divergence)。

根据定义5知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$,数列$\{(-1)^n\}$是发散的。

根据数列极限定义,例4(1)、(2)、(3)中,数列 x_n 无限接近某一个确定的常数A 是指数列 x_n 与常数A 要多近有多近,也就是说当 $n\to\infty$时,$|x_n-A|$要多小有多小,而刻画$|x_n-A|$要多小有多小通常用希腊字母 ε(读作 epsilon)来表示($\varepsilon>0$),即$|x_n-A|<\varepsilon$,因此定义5可以表述为:"对预先给定的任意小的正数 ε,总存在某一项,对这项以后所有的x_n,都有不等式$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立。"

例如对例4(1)中数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$来说,当 $n\to\infty$时,$|x_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|$能任意地小。比如说,要想$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01$,只要 $n>100$ 就行,因此上面所说的某一项就是100项,从第100项以后所有的项 $x_n=\frac{1}{n}$,都能使$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.01$,这里的0.01就相当于预先给定的任意小的正数 ε,同理取 $\varepsilon=0.0001$ 就可以找到第10 000项,从10 000项以后所有的$x_n=\frac{1}{n}$,都能使$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.0001$成立。

例5 讨论数列 $x_n=2^n$ 的极限。

解: 给定数列 $x_n=2^n$,即$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$,当 $n\to\infty$时,$x_n=2^n$ 的数值无限增大,即它不趋向于一个确定的常数,所以数列 $x_n=2^n$ 是发散的。

1.2.2 函数极限

由于函数的变化与自变量的变化有关,因此我们就自变量不同的变化情况来研究函数极限的定义,即在函数极限中,分别研究两种极限过程:一种是自变量趋于无穷大,另一种是自变量趋于一个确定的数。

一、$x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限

数列是一种特殊的函数,那么数列极限当然是一种特殊的函数极限,如数列 $x_n=\frac{1}{n}$,当 $n\to\infty$时,它以0为极限。现在让自变量 x 连续取值且无限趋于$+\infty$,对应的函数值$f(x)=\frac{1}{x}$无限趋于零,仿数列极限定义5,称零为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$当$x\to+\infty$时的极限。当 $x\to-\infty$时,$f(x)=\frac{1}{x}$也以零为极限,即当$x\to\pm\infty$(简记 $x\to\infty$)时,$f(x)=\frac{1}{x}$均以零为极限。如图1-5所示。

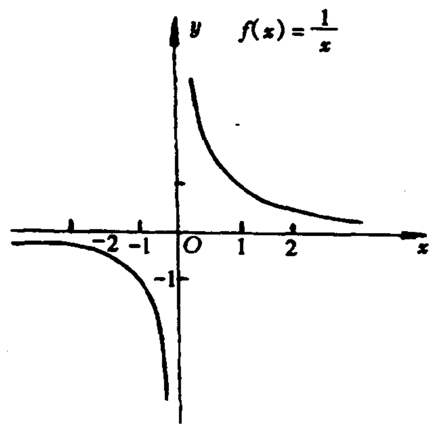


图1-5

【定义6】 如果当 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限趋近于某一个确定的常数 A,则称 A 为函数$f(x)$的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或} f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty)$$