CHENGKAOJIAOCHENG
YOUHUASHEJI

2002（专科起点升本科）

全国各类成人高等学校
招生统一考试复习用书

成考教程优化设计

何路 编著

高等数学

（一）

- 全国成人高考命题研究组组织编写
- 教育部成人高考考试大纲部分编写审定专家修改审定
- 紧扣新大纲 重点突出 知识点全面

中国和平出版社

CHENGKAOJIAOCHENGYOUHUASHEJI

编写说明

编写目的 为使广大参加各类成人高等学校招生考试的考生迅速掌握考点，突破重点，攻克难点，弄清疑点，我们根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》编写了这套《成考教程优化设计丛书》，本套丛书编写科学、充实实用，供参加各类成人高等学校招生考试的考生使用，也可供广大学员、老师和教研人员学习、参考。

丛书特点 本丛书由具有丰富教学经验和命题经验的专家、教授精心设计编写，在编写过程中形成了以下几个鲜明特点：

一、紧扣新大纲。本套丛书严格遵循新大纲编写，以全新的内容、全新的表述、全新的训练体现了新大纲的全新要求。

二、栏目新颖、科学。本套丛书根据成人学习特点组织材料，分别设置了知识网络、重点例析、疑难点解析、单元训练、模拟试题、招生试题等栏目，能让考生复习起来事半功倍、省时高效。

三、实战性强。本套丛书的练习题及模拟试题充分体现了命题原则、思路、动向，贴近考试实际，有的放矢，针对性强，切题率高。

四、权威性高。本套丛书由成人高考（专升本）考试审定专家和命题研究人员编写审定。

科目设置 本套丛书包括以下九个科目：政治、英语、教育理论、大学语文、高等数学（一）、高等数学（二）、民法、艺术概论。

真诚愿望 本套丛书内容完整、编排科学，是一套不可多得的好教材，若考生能从中快速提高学习成绩，便是我们最大的愿望。此外，由于时间仓促，水平有限，书中不妥之处在所难免，欢迎广大师生及社会各界朋友不吝赐教，使之日臻完善。

成人高考命题研究组

CHENGKAOJIAOCHENG
YOUHUASHEJI

成考教程优化设计

责任编辑 杨雁鸣
封面设计 木头羊工作室

ISBN 7-80154-473-0

9 787801 544735 >

ISBN 7-80154-473-0/G·466
定 价：19.80元

目　　录

第一章 函数、极限、连续

§1.1 函数

一、知识讲解

(一)预备知识

1. 区间及其表示法

设 a、b 是实数($a<b$),将满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a<x<b,x\in R\}$ 简记为 (a,b),称 (a,b) 为开区间.类似地可定义半开区间 $[a,b)$;$(a,b]$;$[a,+\infty]$;$(-\infty,b]$,开区间 $(a,+\infty)$;$(-\infty,b)$;$(-\infty,+\infty)$ 及闭区间 $[a,b]$.

开区间不含端点,用“( )”表示;闭区间含端点,用“[ ]”表示.

2. 绝对值及其性质

〈定义〉设 a 为实数,$|a|=\begin{cases}a,a\geqslant 0\\-a,a<0\end{cases}$,$|a|\geqslant 0$

〈性质〉$|ab|=|a||b|$

$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$

$|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a-b|\geqslant|a|-|b|$

若 $|a|\leqslant b$,则 $-b\leqslant a\leqslant b\quad(b\geqslant 0)$

若 $|a|\geqslant b$,则 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant -b\quad(b\geqslant 0)$

3. 邻域

设 $\delta>0$ 是任意小的正数,则称满足 $|x-a|<\delta$ 的 x 的集合为点 a 的邻域,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x|(x-a)<\delta\}$$

称 a 为邻域的中心,δ 为邻域的半径,点 a 的 δ 邻域简记为开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

类似地称 $U(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的空心邻域,简记为 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.空心邻域是不含点 a 的点 a 的邻域.

(二)函数

1.函数概念

设 x,y 为实数集合,若存在一个对应法则 f,对于集合 x 中的一个取定值 x,在 f 下总有集合 y 中的惟一确定的 y 值与之对应,则称 f 为从 x 到 y 的函数,记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量,y 叫因变量(或函数).x 的取值范围称为函数的定义域,y 的取值范围称为函数的值域.

一般用 $D(f)$ 表示定义域,用 $z(f)$ 表示值域.

函数概念的构成要点是

$$\text{三内容}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{定义域 } D(f)\\ \text{对应法则 } f\end{array}\right\}\text{两要素}\\ \text{值域 } z(f)=\{y|y=f(x),x\in D(f)\}\end{cases}$$

由此,两函数恒等的充分必要条件是两要素完全相同.

以自变量 x 的取值为点的横坐标,对应函数值 y 为点的纵坐标所确定的点 (x,y) 的集合构成的平面曲线称为函数 $y=f(x)$ 的图象.

在函数 $y=f(x)$ 中,若 $f(x)$ 是含 x 的运算式,则称此运算式为函数 $y=f(x)$ 的解析式.这时称 y 为 x 的显函数.

给定函数 $y=f(x)$,如果对于 $D(f)$ 的子集合,$f(x)$ 的解析式不同,则称为分段函数.

如 $f(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$ 就是分段函数.其定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,在 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)=1$;在 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)=-1$;在 $x=0$ 时,$f(x)=0$,对 $D(f)$ 的三个子集合,$f(x)$ 有三种不同的解析式,它是一个分为三段表示的函数,但不是三个函数.

2.函数的几种简单性质

(1)单调性

〈定义〉给定函数 $y=f(x),x\in(a,b)$,对任意 $x_1<x_2\in(a,b)$,若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增,(a,b) 称为 $f(x)$ 的单调增区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调减,(a,b) 称为 $f(x)$ 的单调减区间.

若 $f(x)$ 在 $D(f)$ 内只有一种单调性,则称 $f(x)$ 为单调函数.

在单调增区间内 $f(x)$ 的图象是上升曲线弧;在单调减区间内 $f(x)$ 的图象是下降曲线弧.

(2)奇偶性

〈定义〉设函数 $y=f(x)$在$(-a,a)$有定义,对任意一点 $x\in(-a,a)$,若$f(-x)=f(x)$总成立,则称 $f(x)$为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$总成立,则称 $f(x)$为奇函数;若 $f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,则称 $f(x)$为非奇非偶函数.

偶函数的图象关于 y 轴轴对称;奇函数的图象关于坐标原点中心对称;非奇非偶函数的图象无关于坐标系的对称性.

(3)有界性

〈定义〉设函数 $y=f(x)$在(a,b)有定义,对任意一点 $x\in(a,b)$,如果总存在正数 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$在(a,b)有界,使$|f(x)|\leqslant M$ 的 M 不存在时,称 $f(x)$在(a,b)无界.

若 $y=f(x)$在(a,b)有界,对应(a,b)的曲线弧位于两条水平直线 $y=M$ 与$y=-M$ 构成的有限带形域中.

(4)周期性

〈定义〉设函数 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$定义,若存在常数 A,使 $f(x+A)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数.可使$f(x+A)=f(x)$成立的最小正数 A 称为周期.周期通常记为 T,即 $f(x+T)=f(x)$.

周期函数的图象按自变量 x 取值间隔 T 重复出现.

3. 反函数概念

给定函数 $y=f(x)$,其定义域为 $D(f)$,值域为 $z(f)$,如果对于 $z(f)$的一个 y 值,总可以通过关系式 $y=f(x)$,找到 $D(f)$中惟一确定的 x 值与之对应,则得一个定义在 $z(f)$上的以 y 为自变量,以 x 为因变量(函数)的函数,称此函数为函数 $y=f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.为研究的方便和出于习惯,将 $x=f^{-1}(y)$记为 $y=f^{-1}(x)$.一般称 $y=f(x)$为直接函数,$x=f^{-1}(y)$为直接函数的原型反函数,$y=f^{-1}(x)$为直接函数 $y=f(x)$的反函数(矫型反函数).

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的定义域和值域的关系是:

$$D(f^{-1})=z(f);Z(f^{-1})=D(f)$$

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 轴对称.

4. 复合函数

设有函数 $u=\varphi(x)$,$x\in D(\varphi)$及 $y=f(u)$,$u\in D(f)$,若 $D(f)\supseteq Z(\varphi)$,对于 $D(\varphi)$中的 x 通过 $u\in Z(\varphi)$,总有确定的 y 与之对应,则称 y 通过 u 是 x 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$.其中 x 称为自变量,u 称为中间变量,y 称为复合函数.

5. 基本初等函数

基本初等函数是下列五类函数的总称:

幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为任何实数)

指数函数 $y=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

(1)幂函数 $y=x^\alpha$(α 为任何实数)

当 α 是不同实数时,幂函数的定义域和性质不同,择要列举以下几种.

1° 当 α 是正整数或零时,定义域是$(-\infty,+\infty)$.如 $y=c$(c 是常数,通常称 $y=c$ 是常数函数)(图象见图 1-1-1);$y=x, y=-x$(图象见图 1-1-2);$y=x^2$(图象见图 1-1-3);$y=x^3$(图象见图 1-1-4)等.

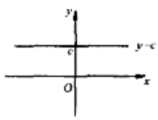

图 1-1-1

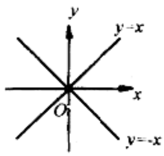

图 1-1-2

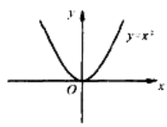

图 1-1-3

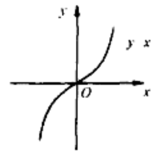

图 1-1-4

2° 当 α 是负整数时,定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.如 $y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$(图象见图 1-1-5)等.

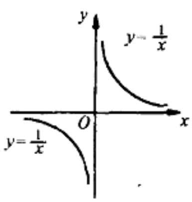

图 1-1-5

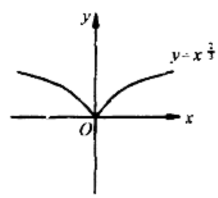

图 1-1-6

3° 当 α 是分数$\dfrac{p}{q}(q\neq 0)$时,若$\dfrac{p}{q}>0$,q 为奇数,则定义域为$(-\infty,+\infty)$,如 $y=x^{\frac{2}{3}}$(图象见图 1-1-6);若$\dfrac{p}{q}>0$,q 为偶数,则定义域为$[0,+\infty)$,如 $y=x^{\frac{1}{2}}$(图象见图 1-1-7)等.

(2)指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图象均过点$(0,1)$.当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 是单调增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 是单调减函数(见图 1-1-8).

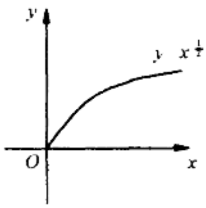

图 1－1－7

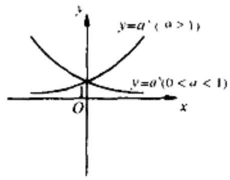

图 1－1－8

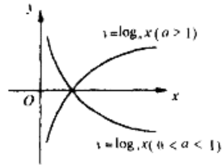

图 1－1－9

(3)对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.图象均过点$(1,0)$.当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 是单调增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 是单调减函数(图 1－1－9).

以 $e(e=2.71828\cdots\cdots$是一个实常数,称为自然数)为底的对数函数 $y=\log_e x$ 称为自数对数函数,简记为 $y=\ln x$,它是单调增函数.

$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数.

(4)三角函数

正弦函数 $y=\sin x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是周期函数,周期 $T=2\pi$,是奇函数,即 $\sin(-x)=-\sin x$,是有界函数,即$|\sin x|\leqslant 1$.至少在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$单调增;在$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$单调减(图 1－1－10).

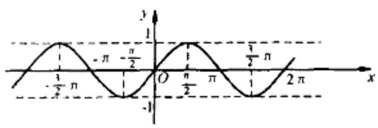

图 1－1－10

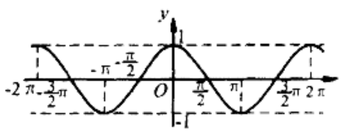

图 1－1－11

余弦函数 $y=\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是周期函数,周期 $T=2\pi$.是偶函数.即 $\cos(-x)=\cos x$,是有界函数,即$|\cos x|\leqslant 1$,至少在$[0,\pi]$单调减,在$[\pi,2\pi]$单调增(图 1－1－11)

正切函数 $y=\tan x$,定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1\cdots\cdots)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,是周期函数,周期 $T=\pi$.是奇函数,即 $\tan(-x)=-\tan x$,是无界函数,是单调增函数(图 1－1－12).

余切函数 $y=\cot x$,定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm 1\cdots\cdots)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.是周期函数,周期 $T=\pi$.是奇函数,即 $\cot(-x)=-\cot x$,是无界函数.是单调减函数(图 1－1－13).

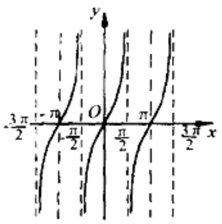

图 1 - 1 - 12

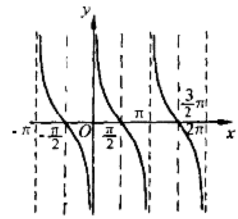

图 1 - 1 - 13

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$及余割函数$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$的定义域和性质可参照 $\cos x$ 及 $\sin x$ 讨论.

(5)反三角函数

由于三角函数是周期函数,对于值域内的每个 y 值,都有无穷多个 x 值与之对应,因此,只能在三角函数的一个单调区间上建立其反函数,称为反三角函数的主值.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是$y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$,值域(主值)是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.是非周期函数.是有界函数,即$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.是奇函数,即 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.是单调增函数(图 1 - 1 - 14).

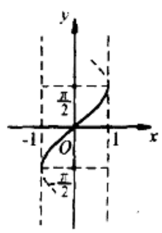

图 1 - 1 - 14

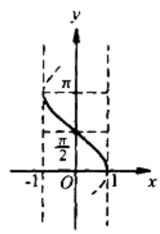

图 1 - 1 - 15

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是$y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$,值域(主值)是$[0,\pi]$.是非周期函数.是非奇非偶函数($\arccos(-x)=\pi-\arccos x$).是有界函数 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$.是单调减函数(图 1 - 1 - 15).

反正切函数 $y=\arctan x$ 是$y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$的反函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域(主值)为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.是非周期函数,是有界函数,即$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$.是奇函数,即 $\arctan(-x)=-\arctan x$.是单调增函数(图 1 - 1 - 16).

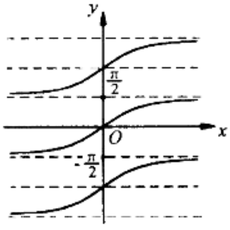

图 1－1－16

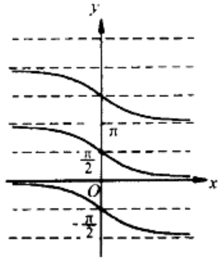

图 1－1－17

反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 是 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 的反函数，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域（主值）为 $(0,\pi)$. 是非周期函数. 是有界函数，即 $0<\operatorname{arccot}x<\pi$. 是非奇非偶函数，$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot}x$. 是单调减函数（图 1－1－17）.

关于 $y=\operatorname{arcsec}x$ 及 $y=\operatorname{arccsc}x$ 不再讨论.

6. 初等函数

〈定义〉基本初等函数经有限次四则运算（加、减、乘、除）或有限次复合所得函数称为初等函数.

分段函数不是初等函数.

二、例题解析

例 1 单项选择：下列各对函数中，是相同函数的是 （ ）

A. $f(x)=1, g(x)=x^0$

B. $f(x)=\arcsin(\sin x), g(x)=x$

C. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$

D. $f(x)=2\sin^2x, g(x)=1-\cos 2x$

解 选 D.

分析 A 中两函数定义域不同，$g(x)=x^0$ 的定义域是 $x\neq 0$，因为我们只定义过非零实数的零次幂为零，而零的零次幂无定义.

C 中两函数的定义域不同，实际上当且仅当 $A>0$ 时对数性质 $\log_a A^m=m\log_a A$ 才成立.

B 中两函数定义域相同，但由值域不同体现出对应法则不同. 如 $f(\frac{3}{2}\pi)=\arcsin(\sin\frac{3\pi}{2})=\arcsin(-1)=-\arcsin 1=-\frac{\pi}{2}$，而 $g(\frac{3\pi}{2})=\frac{3\pi}{2}$.

D 中两函数定义域相同，对应法则也相同，因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$1-\cos 2x=$

$2\sin^2 x$ 是恒等式.

例 2 单项选择:设 $f(x)$的定义域为$[-1,2]$则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$的定义域是 ( )

A.$[-3,0]$ B.$[-3,1]$ C.$[-\frac{1}{2},1]$ D.$[-\frac{1}{2},0]$

解 选 D.

分析 $F(x)$的定义域应由$\begin{cases}-1\leqslant x+2\leqslant 2\\ -1\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}$决定.解此不等式组,有$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$.

例 3 填空:函数 $y=\sqrt{x^2+x-2}+\lg(3x-6)$的定义域是________.

解 填$(2,+\infty)$.

分析 由 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -2$;由 $3x-6>0$,得 $x>2$,所以函数的定义域为$(2,+\infty)$.

当函数解析式已给条件下求定义域时,只须按运算法则列举不等式(组),其解是定义域.

常遇到的问题是:

(1)x 的取值应使分母不等于零;

(2)x 的取值应使偶次根式的被开方式大于等于零;

(3)x 的取值应使对数的真数大于零;

(4)$\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 中的 x 应满足$|x|\leqslant 1$.

例 4 设函数 $f(x)=\ln(kx^2-2x+2k)$在$(-\infty,+\infty)$有定义,求 k 的取值范围.

解 记 $g(x)=kx^2-2x+2k$,当 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义时,应满足 $g(x)>0$.而 $g(x)>0$的条件是

$$\begin{cases}k>0\\(-2)^2-4k(2k)<0\end{cases} \text{或} \begin{cases}k<0\\(-2)^2-4k(2k)<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}k>0\\k<-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{或 }k>\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \text{或} \begin{cases}k<0\\k<-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{或 }k>\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

即 $k>\frac{1}{\sqrt{2}}$或 $k<-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

例 5 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,-1<x<0\\1,0\leqslant x<1\\x-1,1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 的定义域.

解 $D(f)=(-1,4]$.

分析 求分段函数的定义域不必列举不等式(组)求解,只须按已知逐段审定.

例 6 设 $f(x)=\arccos(\log_2 x)$,则 $f(\frac{1}{2})=$________.

解 填 π.

分析 求给定自变量值对应函数值,只须用定值替换函数解析式中的 x,然后进行计算.

$f(\frac{1}{2})=\arccos(\log_2\frac{1}{2})=\arccos(-1)=\pi$.

例 7 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则 $f[\frac{1}{f(x)}]=$ ( )

A. $\frac{1}{2+x^2}$ B. $\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$ C. $1+x^2$ D. $1+(1+x^2)^2$

解 选 B.

分析 因为 $\frac{1}{f(x)}=1+x^2$,再用 $1+x^2$ 替换 $f(x)$ 中的 x,得 $f[\frac{1}{f(x)}]=\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$.

例 8 设 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$,则 $f(x)=$__________.

解 填 $1-\frac{4}{1-x}$

分析 应理解 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$ 的意义是:在 $f(x)$ 的解析式中,用 $1-2x$ 替换 x 后,经计算得 $1-\frac{2}{x}$.

〈思路一〉将 $1-\frac{2}{x}$ 变形为含 $1-2x$ 的表达式.

$1-\frac{2}{x}=1-\frac{4}{1-(1-2x)}$

所以
$$f(x)=1-\frac{4}{1-x}$$

〈思路二〉令 $1-2x=t$,从而 $x=\frac{1-t}{2}$,代入 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$,

有 $f(t)=1-\frac{2}{\frac{1-t}{2}}=1-\frac{4}{1-t}$,

即 $f(x)=1-\frac{4}{1-x}$.

例 9 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0\\ x, x<0\end{cases}$,$\psi(x)=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x^2, x<0\end{cases}$ 则当 $x<0$ 时,$\varphi[\psi(x)]=$ ( )

A. $-x$ B. $-x^2$ C. x D. x^2

解 选 B.

分析 因为 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}[\psi(x)]^2, \psi(x)\leqslant 0\\ \psi(x), \psi(x)<0\end{cases}$. 当 $x<0$ 时 $\psi(x)=-x^2<0$,所以 $\varphi[\psi(x)]$ 应由 $\psi(x)$ 中的 $-x^2$ 替换 $\varphi(x)$ 中的 x 得到,即 $\varphi[\psi(x)]=-x^2$.

分段函数求函数值的要点是:由自变量取值正确选择分段函数相应一段的表达式.

例 10 设 $y=\frac{a+x}{b+cx}$(a,b,c 是常数)的反函数是 $y=\frac{1+2x}{1+3x}$,则 a,b,c 的值是 ( )

A. $a=1,b=-2,c=3$　　B. $a=-1,b=2,c=3$

C. $a=-1,b=2,c=-3$　　D. $a=1,b=2,c=-3$

解 选 C.

分析 由 $y=\frac{a+x}{b+cx}$解 x,有

$$by+cxy=a+x$$
$$(cy-1)x=a-by$$
$$x=\frac{a-by}{-1+cy}$$

即 $y=\frac{a-bx}{-1+cx}$,再由$\frac{a-bx}{-1+cx}=\frac{-a+bx}{1-cx}=\frac{1+2x}{1+3x}$,知

$$a=-1,b=2,c=-3.$$

求反函数的一般步骤是:由 $y=f(x)$解出 x;在 $x=f^{-1}(y)$中交换字母 x 与 y,即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 11 下列函数中,为奇函数的是 ( )

A. $y=\cos^3x$　　B. $y=x^2+\sin x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

解 选 D.

分析 对 A,$\cos^3(-x)=\cos^3x$,$y=\cos^3x$ 是偶函数.对 B,$(-x)^2+\sin(-x)=x^2-\sin x$,由于 $x^2-\sin x\neq x^2+\sin x$ 且 $x^2-\sin x\neq-(x^2+\sin x)$,$y=x^2+\sin x$ 是非奇非偶函数.对 C,$2^{-x}=\frac{1}{2^x}$,$\frac{1}{2^x}\neq 2^x$ 且$\frac{1}{2^x}\neq-2^x$,$y=2^x$ 是非奇非偶函数.对 D,$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}$,所以 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$是奇函数.

例 12 设函数 $f(x),g(x)$均在$(-\infty,+\infty)$有定义,若 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,则 $g[f(x)]$为 ( )

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 无法判定奇偶性

解 选 A.

分析 设 $F(x)=g[f(x)]$,则 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义.

$F(-x)=g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]=F(x)$,所以 $g[f(x)]$,是偶函数.

例 13 已知偶函数 $f(x)$在$[0,4]$上单调增,则 $f(-\pi)$和 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$的大小关系是 ( )

A. $f(-\pi)<f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　B. $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$

C. $f(-\pi)=f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　D. 不能确定

解 选 B.

分析 $\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-3}=-3$,因为 $f(x)$ 是偶函数且在 $[0,4]$ 单调增,所以 $f(x)$ 在 $[-4,0]$ 单调减,由于 $-3>-\pi(\pi=-3.14159\cdots\cdots)$,故 $f(-3)<f(-\pi)$.

例 14 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 ( )

A. 有界函数 B. 无界函数 C. 上有界下无界 D. 上无界下有界

解 选 A.

分析 因为 $(|x|-1)^2\geqslant 0$,即 $x^2+1\geqslant 2|x|\geqslant |x|$ $\frac{|x|}{x^2+1}\leqslant 1$,所以 $|\frac{x}{1+x^2}|\leqslant 1$.

例 15 下列函数中,是周期函数的为 ( )

A. $y=\sin x^2$ B. $y=x|\sin x|$ C. $y=\arcsin 2x$ D. $y=\tan(3x-1)$

解 选 D.

分析 $\tan[3(x+\frac{\pi}{3})-1]=\tan(3x+\pi-1)=\tan[(3x-1)+\pi]=\tan(3x-1)$,所以 $y=\tan(3x-1)$ 是以 $\frac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数.

按考试大纲要求,关于周期函数,只讨论三角函数的周期性.对于三角函数的周期性,除掌握基本初等函数中所列基本结论外,还应掌握如下结论:

函数 $y=\sin\omega x$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.对其余三角函数有类同的结论.如 $y=\tan 3x$ 的周期为 $T=\frac{\pi}{3}$;$y=\cot\frac{x}{3}$ 的周期为 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$,等等.

例 16 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的周期是________.

解 填 2π.

分析
$$
\begin{aligned}
y&=\sin x+\sqrt{3}\cos x\\
&=2(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3})\\
&=2\sin(x+\frac{\pi}{3})
\end{aligned}
$$

所以 $T=2\pi$.

当函数由异名三角函数的代数和表示时,应通过引入辅助角的三角函数,化为一种三角函数,然后讨论其周期.

例 17 设 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$,写出定义域并作出函数的图象.

解 $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

分析 $f(x)$的图象由 y 轴左边抛物线$y=x^2-1$;坐标原点$(0,0)$及 y 轴右边抛物线$y=1-x^2$ 构成(图 1-1-18).

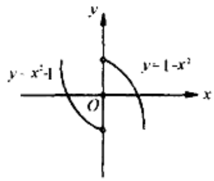

图 1-1-18

分段函数的图象为分段曲线.

本例中,在点 $x=0$ 处及其两侧,函数的对应法则不同,通常称 $x=0$ 这样的点为分段函数的自变量分段点.

例 18 下列所给函数是复合函数的是 ( )

A. $y=5x^2-3x+1$　　B. $y=\sin 2x$

C. $y=\arccos(2+x^2)$　　D. $y=\dfrac{\ln x}{\tan x}$

解 选 B.

分析 A 中函数是由基本初等函数经四则运算所得,它不是复合函数,同理,D 中函数也不是复合函数.

B 中函数 $y=\sin 2x$ 是由 $y=\sin u$, $u=2x$ 这两个基本初等函数复合而成的复合函数.

D 中函数似可看作是 $y=\arccos u$, $u=2+x^2$ 复合而得,这样的认识是不对的.因为 $u=2+x^2$ 的值域是$[2,+\infty)$,而 $y=\arccos u$ 的定义是$[-1,1]$,即当 $u\in[2,+\infty)$时,对应的 y 不存在.所以不可看作复合函数.应注意,并不是任何基本初等函数都可以构成复合函数.

例 19 指出 $y=3^{\sin^2(2x+1)}$是由哪些函数关系复合而得的.

解 记 $y=3^u$, $u=v^2$, $v=\sin t$, $t=2x+1$,则经从右向左式逐次代换,有:

$$v=\sin(2x+1);u=\sin^2(2x+1);y=3^{\sin^2(2x+1)}.$$

所以 $y=3^{\sin^2(2x+1)}$是由指数函数 $y=3^u$,幂函数 $u=v^2$,正弦函数 $v=\sin t$ 及幂函数 $t=2x+1$(多项式归为幂函数一类)复合而得的.

关于复合函数的结构,是指复合函数是由哪些基本初等函数复合而得.

在本例的解答中,易犯的错误是:记 $y=2^u$, $u=\sin(2x+1)$, $\omega=u^2$.如此,代换时会出现如下问题:$y=2^{\sin(2x+1)}$, $\omega=u^2$ 无法代换,从而无法确定复合结构.产生此类错误的原因是:$\sin^2(2x+1)$中,二次幂是高级运算,应设 $u=v^2$,然后再确定 v 的表达式.从高级到低级运算是确定复合函数结构的一般思路.

例 20 设任意函数 $f(x)$在$(-a,a)$有定义,试证:$f(x)$总可表为一个偶函数与一个奇函数之和.

证 将 $f(x)$ 表为 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(x)+f(-x)-f(-x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

设 $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

因为 $F(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=F(x)$, $F(x)$是偶函数;