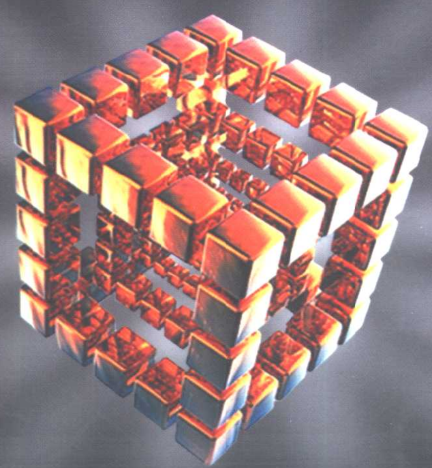
高二数学

主编：唐仁

新概念解题方略

探寻高考命题规律

点拨解题方法技巧



考点透视　名题精析

错解剖析　一题多解　强化训练

首都师范大学出版社

新概念解题方略

高二数学

丛书策划　程　文
丛书主编　程　文
本册主编　唐　仁
本册编者　李云皇　杨铭瑛
　　　　　黄　佳　张晓霞

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新概念解题方略.数学/唐仁主编.—北京:首都师范大学出版社,2001.7
ISBN 7-81064-277-4

Ⅰ.新…　Ⅱ.唐…　Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045197 号

XINGAINIAN JIETI FANGLUE·GAOER SHUXUE
新概念解题方略·高二数学
首都师范大学出版社
(北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037)
北京嘉实印刷有限公司印刷　全国新华书店经销
2001 年 7 月第 1 版　2001 年 9 月第 2 次印刷
开本 880×1230　1/32　印张　15
字数 530 千　印数　18,001~26,000 册
定价: 18.00 元

致读者

随着教育改革的不断深入，素质教育的观念日渐深入人心，中国基础教育的根本出路在于全面实施素质教育，新大纲的颁发，新教材的使用、“3+x”高考模式的推广均是素质教育下的必然结果。

构成学生素质的内核主要有三方面：其一是个性心理，其二是思想品德，其三是思维与创新能力。任何能力均要在训练中养成和发展，以能力发展为核心的解题训练反对题海战术，它植根于课本，立足于课堂，着眼提高，在知识的主线下坚持能力训练，注意方法训练，选题经典，使训练成为课堂教学的自然延伸和高层次发展，它是科学的训练观，《新概念解题方略》就是在这种理念下创作的。

本书结构别具特色，并严格与最新教材匹配，每章由三个部分构成，形成有机整体。

1．高考透析

让应试高分成为学生能力发展的一个自然结果。因此，渗透浓厚的备考意识是本书的特色，也是设计本栏的初衷。本栏相当于一位资深的“高考博士”，告诉你该章的“学习目标”与“高考热点”。通过学习本栏，高考考什么？学生应该学什么，就能一目了然。

2．名题精选

它是一道精美的“特色菜”，它给学生提供了一个科学的训练基地。具有起点基础，路线正确，目标高远的特点。使学生从基础起步，迅速攀升，直达能力发展的高峰。愿本书成为学生的良师益友。

因时间仓促难免有疏漏和不妥之处，愿老师、学生提出宝贵的意见和建议。

作　者

2001 年 7 月

目 录

第一部分 代数(下册)

第二部分 解析几何

第一部分　代数(下册)

第五章　不等式

高考热点透析

不等式是中学的重要内容,它不仅渗透到中学数学的大部分章节中,还在实际生活和生产实践中广泛应用,也是学习高等数学的重要工具因此不等式就成为了永不衰退的高考热点.纵观近十年的高考试题,对不等式的考查集中为四个方面:不等式性质,不等式证明,解不等式和不等式应用.

1. 不等式性质

不等式性质在不等式证明和解不等式中广泛应用.且常常与幂、指、对函数性质结合起来,常以客观题的形式考查.

例 1　**(1993 年全国高考试题)**设 a、b 是任意实数,且 $a>b$.则(　　)

(A)$a^2>b^2$　　　　(B)$\frac{b}{a}<1$

(C)$\lg(a-b)>0$　　　　(D)$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

解法 1: 特值法,令 $a=-2,b=-3$,A、B、C 均不正确,故选择(D).

解法 2: 利用函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 在 R 上为减函数的性质,由 $a>b$,有 $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$.

2. 解不等式

解不等式是求函数定义域、值域,探求参数范围的重要手段,高考对此要

求较高,考查时常与函数性质,特别是二次函数、幂、指、对函数的有关概念和性质紧密相联,解题中往往要运用分类讨论,数形结合等数学思想方法.

例 2 (**1999 年全国高考试题**)解不等式 $\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1$ ($a>0$, $a\neq 1$)

解:原不等式等价于:

$$\begin{cases}3\log_a x-2\geqslant 0 & ①\\ 3\log_a x-2<(2\log_a x-1)^2 & ②\\ 2\log_a x-1>0 & ③\end{cases}$$

由①得 $\log_a x\geqslant\frac{2}{3}$

由②得 $\log_a x<\frac{3}{4}$ 或 $\log_a x>1$

由③得 $\log_a x>\frac{1}{2}$

由此得:$\frac{2}{3}\leqslant\log_a x<\frac{3}{4}$,或 $\log_a x>1$

当 $a>1$ 时,求得解为 $\{x|a^{\frac{2}{3}}\leqslant x<a^{\frac{3}{4}}\}\cup\{x|x>a\}$

当 $0<a<1$ 时,求得解为 $\{x|a^{\frac{3}{4}}<x\leqslant a^{\frac{2}{3}}\}\cup\{x|0<x<a\}$.

3. 证明不等式

证明不等式是高考考查的重要内容,它也是解决其他问题的基础,高考中侧重于考查分析能力和综合能力,常常直接或间接地联系均值不等式、函数数列等数学内容,其中特别是二次函数联系紧密,已呈现出与数学其他分支综合考查趋势.

例 3 (**1997 全国高考试题**)设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,方程 $f(x)-x=0$ 两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0,x_1)$时,证明 $x<f(x)<x_1$

(2) 设函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=x_0$ 对称,证明 $x_0<\frac{x_1}{2}$.

解:(1) 设 $F(x)=f(x)-x$. ∵ x_1、x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的两根,

∴ $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

当 $x\in(0,x_1)$时,由于 $x_1<x_2$,得$(x-x_1)(x-x_2)>0$ 又 $a>0$.

∴ $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)>0$. 即 $x<f(x)$. 又 $0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$

$$x_1-f(x)=x_1-[x+F(x)]$$

$$=x_1-x+a(x_1-x)(x-x_2)$$
$$=(x_1-x)[1+a(x-x_2)]$$

$x_1-x>0, 1+a(x-x_2)=1+ax-ax_2>1-ax_2>0$

$\therefore\ x_1-f(x)>0$

$\therefore\ f(x)<x_1$

(2) 由已知 $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. x_1,x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的根,即 x_1,x_2 是方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 的根,

$\therefore\ x_1+x_2=-\dfrac{b-1}{a}$,

$$\therefore\ x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{a(x_1+x_2)-1}{2a}=\frac{ax_1+ax_2-1}{2a},$$

$\because\ ax_2<1$. $\therefore\ x_0<\dfrac{ax_1}{2a}<\dfrac{x_1}{2}$

例 4 (1996 年全国高考试题) 已知 a、b、c 是实数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$, 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|f(x)|\leqslant 1$.

(Ⅰ) 证明: $|c|\leqslant 1$;

(Ⅱ) 证明:当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|g(x)|\leqslant 2$;

(Ⅲ) 设 $a>0$, 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $g(x)$ 的最大值为 2, 求 $f(x)$.

(Ⅰ)证明: 由条件当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|f(x)|\leqslant 1$, 取 $x=0$ 得

$$|c|=|f(0)|\leqslant 1,$$

即 $$|c|\leqslant 1.$$

(Ⅱ)证法 1:

当 $a>0$ 时, $g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,

$\therefore\ g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$,

$\because\ |f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1)$, $|c|\leqslant 1$,

$\therefore\ g(1)=a+b=f(1)-c\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$,

$\quad g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\geqslant -(|f(-1)|+|c|)\geqslant -2$,

由此得 $|g(x)|\leqslant 2$;

当 $a<0$ 时, $g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数,

$\therefore\ g(-1)\geqslant g(x)\geqslant g(1)$,

$\because\ |f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1)$, $|c|\leqslant 1$,

$\therefore\ g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\leqslant |f(-1)|+|c|\leqslant 2$,

$\quad g(1)=a+b=f(1)-c\geqslant -(|f(1)|+|c|)\geqslant -2$,

由此得 $|g(x)|\leqslant 2$;

当 $a=0$ 时，$g(x)=b$，$f(x)=bx+c$.

$\because\ -1\leqslant x\leqslant 1$,

$\therefore\ |g(x)|=|f(1)-c|\leqslant|f(1)|+|c|\leqslant 2$.

综上得 $|g(x)|\leqslant 2$.

证法 2:

由 $x=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$，可得

$$
\begin{aligned}
g(x)&=ax+b\\
&=a\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]+b\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}\right)\\
&=\left[a\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x+1}{2}\right)+c\right]-\left[a\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x-1}{2}\right)+c\right]\\
&=f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $0\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$，$-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 0$,

根据含绝对值的不等式的性质，得

$$\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant 2.$$

即 $|g(x)|\leqslant 2$.

(Ⅲ) 因为 $a>0$，$g(x)$在$[-1,1]$上是增函数，当 $x=1$ 时取得最大值 2，即

$$g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2. \quad ①$$

$\because\ -1\leqslant f(0)=f(1)-2\leqslant 1-2=-1$,

$\therefore\ c=f(0)=-1$.

因为当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant -1$，即 $f(x)\geqslant f(0)$，根据二次函数的性质，直线 $x=0$ 为 $f(x)$的图象的对称轴，由此得

$$-\frac{b}{2a}=0\text{，即 } b=0$$

由①得 $\quad a=2$.

所以 $\quad f(x)=2x^2-1$.

4．不等式应用

不等式应用十分广泛，不仅与数学本身的各个分支紧密相连，如函数，解析几何，数列等紧密相连，而且在实际生产和生活中也应用广泛，最优化问题就是其典型应用题型.

例 5 (1997 年全国高考试题) 甲、乙两地相距 s 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/时，已知汽车每小时的运输成本(以元为单

位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度 v(千米/时)的平方成正比,比例系数为 b;固定部分为 a 元.

(Ⅰ)把全程运输成本 y(元)表示为 v(千米/时)的函数,并指出这个函数的定义域;

(Ⅱ)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

解:(Ⅰ)依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{s}{v}$,全程运输成本为

$$y=a\frac{s}{v}+bv^2\cdot\frac{s}{v}=s\left(\frac{a}{v}+bv\right),v\in(0,c]$$

(Ⅱ)依题意知 s、a、v 都为正数,故有

$$s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2s\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$,即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$,则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时,全程运输成本 y 最小;

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$ 时,有

$$\begin{aligned}&s\left(\frac{a}{v}+bv\right)-s\left(\frac{a}{c}+bc\right)\\&=s\left[\left(\frac{a}{v}-\frac{a}{c}\right)+(bv-bc)\right]\\&=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv).\end{aligned}$$

因为 $c-v\geqslant 0$,且 $a>bc^2$,故有

$$a-bcv\geqslant a-bc^2>0,$$

所以,$s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant s\left(\frac{a}{c}+bc\right)$,当且仅当 $v=c$ 时等号成立,也即当 $v=c$ 时全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小,当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时行驶速度应为 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$;当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时,行驶速度应为 $v=c$.

这道题考查了考生运用不等式的能力,考查了学生对均值不等式的理解和是否具有严谨的数学思维.

解题方略综述

5.1 不等式性质与均值不等式

5.1.1 不等式性质

1. 运用性质比较大小

例 6 (1989 年上海高考试题)设 $a<b<0$,则下列不等式中不能成立的是( )

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

(C) $|a|>|b|$　　(D) $a^2>b^2$

分析:可运用不等式性质进行变形或运用特值法进行求解.

解法 1:(淘汰法).(A)即为不等式性质,正确;$a<b<0\Rightarrow -a>-b>0\Rightarrow(-a)^2>(-b)^2>0$.即有(D)正确;由绝对值定义值知(C)正确.故选(B).

解法 2: $\because a<b<0\ \therefore (a-b)a>0$.

若(B)正确,则两边同乘以$(a-b)a$,有 $a>a-b$.矛盾即 $b>0$,与已知.故选(B)正确.

解法 3:特值法:令 $a=-2,b=-1$ 代入.即选(B)

说明:运用不等式性质对不等式进行变形要注意条件,还要善于抓住"形",由形推性质.这类问题可采用特值法、淘汰法、直接推证等方法解决.

例 7 设 $\log_m a<\log_n a<0,a>1$,则下列不等式中正确的是( )

(A) $0<m<n<1$　　(B) $0<n<m<1$

(C) $m>n>1$　　(D) $n>m>1$

分析:为比较 m、n 的大小关系,可以用换底公式将底数统一,也可构选函数图象,借助对数函数图象来解决.

解法 1:换底有$\frac{1}{\log_a m}<\frac{1}{\log_a n}<0$.

$\because a>1$

$\therefore 0<m、n<1$ 且 $\log_a m>\log_a n$

$\therefore 0<n<m<1$　　故选(B)

解法 2:(特值法)令 $m=\frac{2}{a},n=\frac{1}{a}$,则容易选(B)

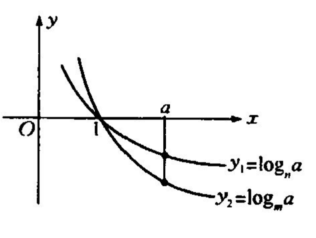


图 5-1

解法 3:设 $y_1=\log_m x,y_2=\log_n x$,

$\because a>1\quad \log_m a<\log_n a<0$,如图 5-1,知$0<n<m<1$.

说明：运用函数性质，特别是函数的单调性是比较两数大小的重要方法，借助函数图象常将问题直观化.

例 8 设 $a>b>c>d>0$，且 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，试比较 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小.

分析：注意到题设条件，可考虑引入增量，缩减字母数量，或者将问题进行转化成比较 $a-b$ 与 $c-d$ 的大小比较.

解法 1：$\because a>b>0 \quad c>d>0$，

$\therefore$ 设 $a=b+\Delta_1,\Delta_1>0$，设 $c=d+\Delta_2,\Delta_2>0$

则由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 可推出 $\frac{b+\Delta_1}{b}=\frac{d+\Delta_1}{d}$

即 $\frac{\Delta_1}{b}=\frac{\Delta_2}{d}$，$\because b>d>0$

$\therefore \Delta_1=\frac{b}{d}\Delta_2>\Delta_2$

又 $a+d=b+\Delta_1+d$，$b+c=b+d+\Delta_2$

$\therefore a+d>b+c$

解法 2：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \therefore a-b=(c-d)\frac{b}{d}$

$\because b>d>0$，$\therefore \frac{b}{d}>1$ 而 $a-b>0,c-d>0$

$\therefore a-b>c-d$

即 $a+d>b+c$

说明：(1) 本题 $\Delta_2\frac{b}{d}>\Delta_2$，要注意两点：$\Delta_2>0,\frac{b}{d}>1$；(2) 不等式性质与比例性质联用，读者要注意体会运用技巧；(3) 设增量的方法是证不等式的方法之一.

例 9 若 a、b、$\in \mathrm{R}^+$，比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

解：$\because a$、$b\in \mathrm{R}^+$

$$\therefore \left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}$$

$$=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$$

$$\therefore \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

说明：运用求差比较法不仅在数式大小比较、证不等式中广泛应用，还在其他方面如研究函数的单调性的考察上常常使用．读者可通过下面两例题体会、掌握常用的比较技巧．

例 10 (1) 已知 a、$b\in \mathrm{R}^+$，并且 $a\neq b$，比较 $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}$ 与 $a+b$ 的大小．

(2) 比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小，其中 $x\in\mathrm{R}$．

解：(1) $x^3-(x^2+x-1)=x^3-x^2-(x-1)$

$$=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)$$
$$=(x-1)^2(x+1)$$

$\because\ x>1$，$\therefore\ (x-1)^2>0\quad x+1>0$

$\therefore\ (x-1)^2(x+1)>0$. $\therefore\ x^3>x^2+x-1$.

(2) $x^6+1-(x^4+x^2)=x^6-x^4-x^2+1$

$$=x^4(x^2-1)-(x^2-1)$$
$$=(x^2-1)(x^4-1)$$
$$=(x^2-1)^2(x^2+1)$$

当 $x\neq\pm1$ 时，$x^6+1>x^4+x^2$；

当 $x=\pm1$ 时，$x^6+1=x^4+x^2$.

可以看出，求差以后的因式分解是解题的关键．

例 11 (1) 已知 $x>0$，$x\neq1$，$m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小．

(2) 已知 $a+b>0$，且 $ab\neq0$，n 是偶数，比较 $\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}$ 与 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的大小．

解：(1) $x^m+\frac{1}{x^m}-(x^n+\frac{1}{x^n})=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}$

$$=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^m\cdot x^n}$$
$$=(x^m-x^n)(1-\frac{1}{x^{m+n}}),$$

当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$，知 $x^m<x^n$，且 $x^{m+n}<1$. 则有 $1-\frac{1}{x^{m+n}}<0$

$\therefore (x^m - x^n)(1 - \frac{1}{x^{m+n}}) > 0$

当 $x > 1$ 时，由 $m > n > 0$ 知 $x^m > x^n$ 且 $x^{m+n} > 1$，则有 $1 - \frac{1}{x^{m+n}} > 0$

$\therefore (x^m - x^n)(1 - \frac{1}{x^{m+n}}) > 0$.

综上所述，$x^m + \frac{1}{x^m} - (x^n + \frac{1}{x^n}) > 0$.

即 $x^m + \frac{1}{x^m} > x^n + \frac{1}{x^n}$.

(2) $\frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b^{n-1}}{a^n} - \frac{1}{a} + \frac{a^{n-1}}{b^n} - \frac{1}{b}$

$= \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{b^n} = \frac{1}{a^n b^n}(a^{n-1} - b^{n-1})(a^n - b^n)$

又 $a + b > 0$.

当 $a > 0, b > 0$ 时，$a^n \cdot b^n > 0$，$a^{n-1} - b^{n-1}$ 与 $a^n - b^n$ 同号

$\therefore \frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

当 a、b 有一个负值时，不妨设 $a > 0$，$b < 0$，n 是偶数. $a^n b^n > 0$，$a^{n-1} - b^{n-1} > 0$. 又由 $a + b > 0$ 有 $a > -b > 0$.

$\therefore a^n > (-b)^n = b^n \therefore a^n - b^n > 0$.

$\therefore \frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

综上所述知 $\frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. 当且仅当 $a = 1$ 时取"="号.

说明：对含有参数的不等式问题应当注意对参数的取值情况进行讨论.

2. 运用性质　求数(式)的取值范围

例 12　已知 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$，求 $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ 和 $\cos \frac{2\beta - \alpha}{2}$ 的取值范围.

分析： 为求 $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ 和 $\cos \frac{2\beta - \alpha}{2}$ 的范围，先运用不等式性质先求出角 $\frac{\alpha + \beta}{2}$ 和 $\frac{2\beta - \alpha}{2}$ 的范围.

解： $\because -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore -\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$

$\therefore\ -\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$,

而 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为减函数.

故 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{\alpha+\beta}{2}<1$

又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\ 0<2\beta<\pi$ ①

由 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\ -\frac{\pi}{2}<-\alpha<-\frac{\pi}{2}$ ②

式①+②：$-\frac{\pi}{2}<2\beta-\alpha<\frac{3\pi}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{4}<\frac{2\beta-\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$.

由三角函数线知：$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{2\beta-\alpha}{2}\leqslant 1$.

说明：本题运用了同向不等式相加的性质，对异向不等式相减可化为同向不等式相加.

例 13 已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

分析：因为 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的范围已知，故应当用 $f(1)$、$f(2)$ 来表示 $f(3)$.

解法 1：$f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，

$$\therefore\begin{cases}a=\dfrac{f(2)-f(1)}{3}\\ c=\dfrac{f(2)-4f(1)}{3}\end{cases}$$

又 $f(3)=9a-c=3f(2)-3f(1)-\frac{f(2)-4f(1)}{3}$

$\therefore\ f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)$

又 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$

$\therefore\ -1\leqslant f(3)\leqslant 20$

解法 2：可设 $f(3)=mf(1)+nf(2)$ $\because f(1)=a-c$，$f_2=4a-c$

$9a-c=m(a-c)+n(4a-c)$

比较 a、c 的系数有 $\begin{cases}m=-\dfrac{5}{3}\\ n=\dfrac{8}{3}\end{cases}$