目　录

绪　言

试验设计方法是数理统计学的应用方法之一.一般的数理统计方法主要是对已经获得的数据资料进行分析,对所关心的问题作出尽可能精确的判断.试验设计则是研究如何合理而有效地获得数据资料的方法,它的主要内容是讨论如何合理地安排试验、取得数据,然后进行综合的科学分析,从而达到尽快获得最优方案的目的.

在工农业生产、科学实验和经营管理中,经常要进行各种试验.如何安排试验、如何对试验进行科学的分析,是生产工作者、科技工作者经常遇到的现实问题.如果试验安排得好,且分析得当,就能以较少的试验次数、较短的试验时间、较低的费用,得到较满意的试验结果;反之,如果试验安排得不好,分析不得当,则试验次数增加,试验时间延长,浪费人力、物力、财力,难以达到预期的结果,甚至导致试验失败.因此对试验必须事先进行设计.

一个好的试验应包括三个方面:

第一、试验的设计:这里首先要明确试验的目的,确定要考察的因素以及它们的变动范围,然后根据试验目的制定出合理的试验方案.

第二、试验的实施:按照设计出的试验方案,实地进行试验,取得必要的数据结果.

第三、试验结果的分析:对试验所得数据进行分析,判定所考察的因素中哪些是主要的,从而确定出最好生产条件,即最优方案.

总之,试验设计就是试验的最优化设计.

试验设计方法始于本世纪 20 年代，至今已有 70 多年的历史.整个发展过程可分为三个阶段：

第一阶段：早期的方差分析法.这种方法是在本世纪 20 年代由英国生物统计学家、数学家费歇(R A Fisher，1890—1962 年，英国洛萨姆斯台特试验农场工程师)提出的，开始主要应用于农业、生物学、遗传学方面，取得了丰硕的成果.用于田间试验，使农业大幅度增产，费歇把这种方法定名为“试验设计”，并出版了专著《试验设计》，从而开创了一门新的应用技术学科.30 到 40 年代，英、美、苏等国都对此进行研究，并把这种方法逐步推广到工业生产领域中，在采矿、冶金、建筑、纺织、机械、医药等行业都有所应用.第二次世界大战期间，英、美采用这种方法在工业生产中取得显著效果.

第二阶段：传统的正交试验设计法.第二次世界大战后，日本面临着恢复发展国民经济的问题.他们把前面所说的试验设计方法作为质量管理技术之一从英、美引进.1949 年以田口玄一为首的一批研究人员在日本电讯研究所研究电话通讯的系统质量时应用此法，并发现了它的不足，他们加以改进，创造了正交试验设计法，即用正交表安排试验的方法.这种方法在日本迅速推广，据统计，推广这种方法的前 10 年，试验项目超过 100 万项，其中有 1/3 效果十分显著，获得极大的经济效益.在日本，正交表设计技术早已成为企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员必备的技术，成为工程师们共同语言的一部分.

第三阶段：信噪比试验设计法与三阶段设计法.1957 年，田口玄一提出信噪比设计法和产品的三阶段设计法.他把信噪比设计和正交表设计、方差分析相结合，开辟了更为重要、更为广泛的应用领域.它可以进行评价与改善计测仪表的计测方法的误差，解决产品或工序的最佳稳定性和最佳动态特性问题.产品的三阶段

设计是系统设计、参数设计和容差设计的总称，是传统的试验设计方法的重要发展和完善，它充分利用专业技术、生产实践提供的信息资料，和正交表设计方法相结合，取得了十分显著的技术与经济效果.

实践证明，正交设计法与产品的三阶段设计法是试验设计技术的重要方法，它有巨大的经济效益. 日本战后工业生产迅速发展的重要原因之一就是在各工业领域里普遍推广和应用试验设计法，日本把试验设计技术誉为他们的国宝.

我国从本世纪 50 年代开始研究这门学科，并逐步应用到工农业生产中. 60 年代末，中国科学院系统研究所(统计数学室)的研究人员，在正交试验设计的观点、理论和方法上都有新的创见，编制了一套适用的正交表，简化了试验程序和试验结果的分析方法，创立了简单易懂、行之有效的正交试验设计法. 自 1973 年，特别是推行全面质量管理以来，研究和推广正交试验设计法又有了很大的进展，在正交理论的研究上有了新的突破. 不少科研生产单位，应用正交试验设计方法，解决了一些问题、取得了显著的效果. 产品的三阶段设计法在我国起步较晚，80 年代才开始研究，也取得了一些成果. 试验设计方法，不仅在技术性领域应用广泛，在非技术性领域，如生产计划、产品销售、经营管理业务上也有应用. 普及和推广试验设计方法对我国的经济发展一定会起到很大的推动作用.

第1章　方差分析和回归分析

方差分析是一种统计方法，有着广泛的应用. 它是试验设计中要用到的重要分析方法.

在实践中，影响一个事物的因素往往是很多的，人们总是要通过试验，观察各种因素的影响. 例如，不同型号的机器，不同的原材料，不同的技术人员以及不同的操作方法等等，对产品的产量、性能都会有影响. 当然有的因素影响大，有的因素影响小，有的因素可以控制，有的因素不能控制. 如果从多种可控因素中找出主要因素，通过对主要因素的控制调整，提高产品的产量、性能，这是人们所希望的，解决这个问题的有效方法之一就是方差分析.

上述产品的产量、性能等称为试验指标，它们受因素的影响. 因素的不同状态称为水平，一个因素可采取多个水平. 不同的因素、不同的水平可以看作是不同的总体. 通过观测可以得到试验指标的数据，这些数据可以看成是从不同总体中得到的样本数值，利用这些数据可以分析不同因素、不同水平对试验指标影响的大小. 为便于说明问题，我们先从最简单的单因素情况说起.

1.1　单因素试验的方差分析

设单因素 A 有 a 个水平 $A_1,A_2,\cdots,A_a$，在水平 $A_i(i=1,2,\cdots,a)$下，进行 n_i 次独立试验，得到试验指标的观察值列于表 1.1.1.

表 1.1.1

	1	2	…	
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n_2}
⋮	⋮	⋮	…	⋮
A_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{in_i}
⋮	⋮	⋮	…	⋮
A_a	x_{a1}	x_{a2}	…	x_{an_a}

我们假定在各个水平 $A_i(i=1,2,\cdots,a)$下的样本为 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in_i}$,它们来自具有相同方差 σ^2,均值分别为 μ_i 的正态总体 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$,其中 μ_i,σ^2 均为未知,并且不同水平 A_i 下的样本之间相互独立.

我们取下面的线性统计模型

$$\left.\begin{array}{ll} x_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij} & i=1,2,\cdots,a;\quad j=1,2,\cdots,n_i \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2) & \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立} \end{array}\right\},\tag{1.1.1}$$

ε_{ij}为随机误差

设

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}n_i\mu_i \tag{1.1.2}$$

为总平均值,其中 $n=\sum_{i=1}^{a}n_i$.

令

$$\delta_i=\mu_i-\mu \tag{1.1.3}$$

为第 i 个水平 A_i 的效应, $\sum_{i=1}^{a}n_i\delta_i=0$,则(1.1.1) 变成

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij}=\mu+\delta_i+\varepsilon_{ij},\quad i=1,2,\cdots,a;\quad j=1,2,\cdots,n_i, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2). \end{array}\right\} \tag{1.1.1$'$}$$

方差分析的任务就是检验线性统计模型(1.1.1)中 a 个总体 $N(\mu_i,\sigma^2)$ 中的各 μ_i 的相等性,即有

$$\begin{aligned}&\text{原假设 } H_0:\quad \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_a,\\&\text{对立假设 } H_1:\ \mu_i\neq\mu_j\quad \text{至少有一对这样的 } i,j,\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

也就是下面的等价假设:

$$\begin{aligned}&H_0:\ \delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_a=0,\\&H_1:\ \delta_i\neq 0\qquad \text{至少有一个 } i,\end{aligned}\tag{1.1.4$'$}$$

检验这种假设的适当的程序就是方差分析.

具体步骤如下:

1. 总离差平方和的分解

记在水平 A_i 下的样本均值为

$$\bar{x}_{i.}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij},\tag{1.1.5}$$

样本数据的总平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij},\tag{1.1.6}$$

总离差平方和为

$$S_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2.\tag{1.1.7}$$

将 S_T 改写并分解得

$$\begin{aligned}S_T&=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}[(\bar{x}_{i.}-\bar{x})+(x_{ij}-\bar{x}_{i.})]^2\\&=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2\\&\quad+2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})(x_{ij}-\bar{x}_{i.}),\end{aligned}$$

上面展开式中的第三项为 0.

因为

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})(x_{ij}-\bar{x}_{i.}) \\
&=2\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}) \\
&=2\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})\Big(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}-n_i\bar{x}_{i.}\Big)=0.
\end{aligned}
$$

若记

$$S_A=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2, \tag{1.1.8}$$

$$S_E=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2, \tag{1.1.9}$$

则有

$$S_T=S_A+S_E\ . \tag{1.1.10}$$

这里 S_T 表示全部试验数据与总平均值之间的差异，又叫总变差. S_A 表示在 A_i 水平下的样本均值与总平均值之间的差异，叫因素 A 效应的平方和，又叫组间差. S_E 表示在 A_i 水平下的样本均值与样本值之间的差异，它是由随机误差引起的，叫误差平方和，又叫组内差. (1.1.10)式表示 S_T 等于 S_A 与 S_E 之和. 这就完成了总离差平方和的分解.

2. 统计分析

由式(1.1.1)知

$$x_{ij}\sim N(\mu_i,\sigma^2), \tag{1.1.11}$$

将 S_T 改写为下面的形式

$$S_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2=(n-1)S^2, \tag{1.1.12}$$

这里 S^2 是样本方差，即

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2.$$

考虑到

$$\frac{S_T}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \qquad (1.1.13)$$

从这里知道 S_T 的自由度为 $(n-1)$.

将 S_E 改写为下面的形式

$$S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)S_i^2. \quad (1.1.14)$$

这里 S_i^2 是在 A_i 水平下的样本方差,即

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2,$$

因为

$$\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_i - 1), \qquad (1.1.15)$$

再由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{S_E}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{a}\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\left[\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)\right], \quad (1.1.16)$$

即

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-a). \qquad (1.1.17)$$

由此可知,S_E 的自由度为 $(n-a)$,并且有

$$E\left(\frac{S_E}{\sigma^2}\right) = n - a, \qquad (1.1.18)$$

即有

$$E(S_E) = (n-a)\sigma^2, \qquad (1.1.19)$$

或说

$$E\left(\frac{S_E}{n-a}\right) = \sigma^2. \qquad (1.1.20)$$

由(1.1.8)知

$$S_A = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2,$$

展开后可化成

$$S_A = \sum_{i=1}^{a} n_i \bar{x}_{i.}^2 - n\bar{x}^2. \tag{1.1.21}$$

由(1.1.2),(1.1.6),(1.1.11)和 x_{ij}之间的独立性可知

$$\bar{x}_{i.} \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i}\right), \tag{1.1.22}$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \tag{1.1.23}$$

所以 $E(\bar{x}_{i.}) = \mu_i, V(\bar{x}_{i.}) = \frac{\sigma^2}{n_i}, E(\bar{x}) = \mu, V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

再由 $E(\bar{x}_{i.}^2) = V(\bar{x}_{i.}) + E^2(\bar{x}_{i.}), E(\bar{x}^2) = V(\bar{x}) + E^2(\bar{x})$,得

$$\begin{aligned} E(S_A) &= E\left[\sum_{i=1}^{a} n_i \bar{x}_{i.}^2 - n\bar{x}^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{a} n_i E(\bar{x}_{i.}^2) - nE(\bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{a} n_i\left[\frac{\sigma^2}{n_i} + \mu_i^2\right] - n\left[\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right] \\ &= a\sigma^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i(\mu + \delta_i)^2 - \sigma^2 - n\mu^2 \\ &= (a-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i\mu^2 + 2\mu\sum_{i=1}^{a} n_i\delta_i + \sum_{i=1}^{a} n_i\delta_i^2 - n\mu^2. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i=1}^{a} n_i = n, \sum_{i=1}^{a} n_i\delta_i = 0$,所以得出

$$E(S_A) = (a-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i\delta_i^2. \tag{1.1.24}$$

在 $H_0: \delta_i = 0$ 成立的条件下,

$$E(S_A) = (a-1)\sigma^2, \qquad (1.1.25)$$

$$E\left(\frac{S_A}{a-1}\right) = \sigma^2. \qquad (1.1.26)$$

因为 S_A 与 S_E 相互独立(证明略)，再由(1.1.10)，(1.1.13)，(1.1.17)和 χ^2 分布的加法性质可得出

$$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(a-1), \qquad (1.1.27)$$

并得出 S_A 的自由度为$(a-1)$.

记

$$MS_A = \frac{S_A}{a-1}, \qquad (1.1.28)$$

$$MS_E = \frac{S_E}{n-a}, \qquad (1.1.29)$$

并分别叫做S_A，S_E的均方. 由(1.1.20)可知，MS_E是σ^2的无偏估计，当H_0成立时，由(1.1.26)可知，MS_A也是σ^2的无偏估计.

在 H_0 成立的条件下，取统计量

$$F = \frac{\dfrac{S_A}{\sigma^2}\Big/a-1}{\dfrac{S_E}{\sigma^2}\Big/n-a} \sim F(a-1, n-a),$$

即

$$F = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F(a-1, n-a). \qquad (1.1.30)$$

对于给出的 α，查出 $F_\alpha(a-1, n-a)$的值，由样本值计算出 S_A，S_E，从而算出 F 值. 由(1.1.24)式看出，若 H_0 不成立，即 $\delta_i \neq 0$(至少一个 i)，S_A 偏大，导致 F 偏大，因此，判断如下：若 $F > F_\alpha(a-1, n-a)$，则拒绝 H_0；若 $F < F_\alpha(a-1, n-a)$，则接受 H_0.

为了计算的方便，通常采用下面的简便计算公式：

记 $x_{i.}=\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\quad i=1,2,\cdots,a,\quad x_{..}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$，

则有

$$\left.\begin{aligned}S_T&=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\frac{x_{..}^2}{n},\\S_A&=\sum_{i=1}^{a}\frac{x_{i.}^2}{n_i}-\frac{x_{..}^2}{n},\\S_E&=S_T-S_A\quad.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.31}$$

将上面的分析过程和结果，列成一个简洁的表格(表 1.1.2)，能给解决问题带来方便，这个表叫做方差分析表.

表 1.1.2 单因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均 方	F 比
因素 A	S_A	$a-1$	$MS_A=\frac{S_A}{a-1}$	$F=\frac{MS_A}{MS_E}$
误差 E	S_E	$n-a$	$MS_E=\frac{S_E}{n-a}$	
总和 T	S_T	$n-1$		

例1.1.1 人造纤维的抗拉强度是否受掺入其中的棉花的百分比的影响是有疑问的. 现确定棉花百分比的5个水平：15%，20%，25%，30%，35%. 每个水平中测5个抗拉强度的值，列于表1.1.3，问：抗拉强度是否受掺入棉花百分比的影响($\alpha=0.01$)?

表 1.1.3

棉花的百分比 (i)	抗拉强度观察值 (j)					
	1	2	3	4	5	$x_{i\cdot}$
15	7	7	15	11	9	49
20	12	17	12	18	18	77
25	14	18	18	19	19	88
30	19	25	22	19	23	108
35	7	10	11	15	11	54

$$x_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 7 + \cdots + 11 = 376.$$

解 设抗拉强度为

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i,j = 1,2,3,4,5.$$

原假设 H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$,

备择假设 H_1: $\mu_i\neq\mu_j$,至少有一对 i,j.

这里 $a=5, n_i=5(i=1,2,\cdots,5), n=25$.

$$S_T = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{n} = 7^2 + 7^2 + \cdots + 11^2 - \frac{376^2}{25} = 636.96,$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_{i\cdot}^2}{n_i} - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{n} = \frac{1}{5}(49^2 + \cdots + 54^2) - \frac{376^2}{25} = 475.76,$$

$$S_E = S_T - S_A = 636.96 - 475.76 = 161.20.$$

S_T, S_A, S_E 的自由度分别为 24,4,20.

$$MS_A = \frac{475.76}{4} = 118.94, \qquad MS_E = \frac{161.20}{20} = 8.06.$$