

高等学校船舶通用教材

数字伺服系统

王钧功 编著

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书从数字伺服系统的基本概念出发,较详尽地介绍了采样过程和信号恢复以及Z变换和脉冲传递函数的基本理论;进而对采样系统的稳定性和时域响应以及数字伺服系统的综合与设计的基本方法作了全面的阐述;最后通过计算机控制示教式电液伺服机械手的设计实例,对数字伺服系统的基本理论和基本方法作了全面总结。此外,对数模转换技术亦作了简要的介绍,书后并附有习题。

本书可作高等学校液压传动与控制专业教材,也可供具有液压控制系统和控制理论基础知识的工程技术人员、研究人员和高等工业学校有关专业师生参考。

高等学校船舶通用教材

数 字 伺 服 系 统

王 钧 功 编 著

*

上海交通大学出版社出版
(上海淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂 排版
印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 8.625 字数: 209,000

1985年1月第一版 1985年1月第一次印刷

印数: 1~8,000

统一书号: 13324-18 科技新书目: 77·192

定价: 1.70 元

前 言

本书是按照 1981—1985 年全国造船类专业教材编审会议确定的教学计划要求编写的,可供高等学校液压传动与控制专业用作教材,计划学时数为 40 学时。

随着计算机的应用和推广,近年来数字伺服系统获得了较快的发展。计算机参与了数字伺服系统的工作,增加了系统的信号处理能力,使控制系统的功能更加完善。目前该类系统已应用于火炮自动跟踪系统、雷达平台跟踪系统、舰船自动舵系统及工业机器人等方面。为了加速培养这方面的人材,作者在“数字伺服系统”课程教学实践的基础上,吸收了国内外有关文献和资料,编写了这本教材。

本书共分为八章:第一章阐述了计算机控制系统的一些基本概念、分类及特点;第二、三章叙述了采样系统的基本知识,主要包括采样过程、采样定理、信号恢复和 Z 变换理论,为后面的系统分析和综合作准备;第四、五、六章介绍了采样系统的分析和综合的方法,主要内容有脉冲传递函数、采样系统的稳定性分析、建立数字伺服系统的数学模型及控制过程的数学模型;第七章介绍了数模转换的基本知识及应用实例;第八章是以数字计算机控制的示教再现式机械手为实例,介绍了该系统分析设计的全过程,其中重点介绍了阀控油缸离散数学模型和控制过程数学模型的建立,及计算机参与实时控制等内容。

本书系高等学校液压传动与控制专业教材,但也可供具有液压控制系统和控制理论基础知识的工程技术人员、研究人员和高等学校有关专业师生参考。

本书由哈尔滨工业大学液压教研室周连山同志承担审稿工作,提出了不少宝贵的意见和建议;在本书的编写过程中,得到了上海交通大学液压传动与控制教研室和机械手、机器人研究室许多同志的帮助和支持,在此谨向他们致以衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中一定有不少错误之处,请读者批评指正。

编 者 1983.4

目 录

第一章 概述	1
§1-1 引言.....	1
§1-2 计算机在控制系统中的作用.....	2
§1-3 计算机控制系统的特点.....	3
§1-4 数字伺服系统的特殊问题.....	4
第二章 采样过程和信号恢复	7
§2-1 脉冲函数.....	7
§2-2 采样过程和采样定理.....	9
§2-3 信号恢复.....	14
第三章 Z 变换理论	18
§3-1 Z 变换的定义.....	18
§3-2 Z 变换的方法.....	19
§3-3 留数和卷积.....	22
§3-4 用留数法求 Z 变换.....	26
§3-5 Z 变换的基本定理.....	30
§3-6 Z 反变换.....	34
§3-7 差分方程及其求解.....	37
第四章 脉冲传递函数及其求法	43
§4-1 脉冲响应函数.....	43
§4-2 脉冲传递函数.....	45
§4-3 开环和闭环脉冲传递函数的求法.....	47
§4-4 采样系统的稳态误差.....	53
第五章 采样系统的稳定性分析及时域响应	57
§5-1 s 平面到 z 平面的变换.....	57
§5-2 采样系统的稳定性.....	60
§5-3 采样系统特征方程根的位置与过渡过程之间关系.....	67
§5-4 根轨迹法.....	72
§5-5 修正 Z 变换.....	76
第六章 数字伺服系统的综合与设计	80
§6-1 连续部分的脉冲传递函数.....	80
§6-2 数字控制器 $D(z)$	81
§6-3 最少拍系统的设计.....	86
§6-4 快速无波纹数字伺服系统的设计.....	92
§6-5 最小均方误差系统的设计.....	96

第七章 数模转换	101
§7-1 数/模转换器	101
§7-2 模/数转换器	107
第八章 计算机控制示教式机械手的系统设计	112
§8-1 示教再现式机械手的工作原理	112
§8-2 机械手连续部分脉冲传递函数的推导	113
§8-3 机械手闭环系统数字控制器 $D(z)$ 的设计	117
§8-4 机械手系统的稳定性及时域响应	118
§8-5 参数 T 、 K_f 、 ζ 和 ω_n 的确定	119
§8-6 数字控制器 $D(z)$ 的计算机程序	123
§8-7 计算机实现机械手示教再现的逻辑框图	125
习题	128
参考资料	131

第一章 概 述

§ 1-1 引 言

数字计算机在近二十年内得到迅速发展,特别是微电子技术的进展和微处理机的出现,以其运行速度和工作可靠性的不断提高、造价大幅度降低,使计算机参与控制不仅成为现实,而且日益广泛。目前,计算机已应用于大型卫星天线跟踪系统、火炮自动跟踪系统、工业机器人控制系统及生产过程的自动控制等方面。由于计算机的介入,推动了控制理论的发展,使自动控制工程进入到更高级阶段。

根据不同的用途,计算机可分为通用机和专用机两大类。通用机主要用来进行数值计算,能在一台机器上解决各种计算问题。这类机器的特点是计算速度快,使用方便。专用机是专门为了解决某一或某一类课题而制作的计算机,其特点是规模小、结构简单、存贮容量较小,运算速度低些,指令系统也不复杂,但它能连续长时期可靠工作,并备有各种功能的外围设备。目前国内生产的JS-10工业控制机就是专用机的一种。小型专用机只备有“机器语言”,近代先进的工业控制机均备有多种软设备。例如,所谓“过程控制语言”就是为自动控制而设计的一种自动化语言,有了它就便于编写控制和管理程序。

计算机用于自动控制的种类很多,有多种分类方法。从控制方式角度来分,可分为开环数字控制和闭环数字控制两大类。在开环控制中,系统的输出量对系统的控制作用无影响,这种控制方式主要用于程序控制,如数控机床等。在闭环控制中,系统的输出量对控制作用有直接的影响。闭环控制按控制信号的特征又可分为连续数字控制和采样数据控制两类。按连续处理信息方式的控制系统称为连续数字控制系统。它的控制方式和模拟系统的控制方式是相同的。采样数据控制系统是以一定采样周期采样、系统按采样信号进行控制,而不考虑采样周期之间的任何条件变化。这一类系统在许多教科书上都称为采样数据控制系统或叫做脉冲数据控制系统。

连续数字控制系统和采样数据控制系统在概念上是容易混淆的,我们应当抓住它们最本质的差别,在连续数字控制系统中,信号离散的时间间隔极短,一般不考虑它对系统的影响,可按模拟系统方法来分析和综合系统。在采样数据控制系统中,信号离散时间间隔较长,该值的大小对控制系统的性能具有明显的影响,它已成为控制系统的重要参数。

在采样数据控制系统中,按系统含有数字元件的多少又可分为纯数字式控制系统和混合式控制系统。回路中全部元件均为数字元件的系统称为纯数字式系统;回路中既有模拟元件又有数字元件的系统称为混合式系统。数字元件的优点是具有很高的精度,不足之处是数字动力元件功率较小,一般只有几到几十千瓦;模拟元件的缺点是传动精度比数字元件低,但其动力元件功率大,一般从几到几百千瓦甚至更大。为了使控制系统兼备数字元件和模拟元件两方面的优点,目前研究和应用较多的是混合式系统。本课程主要研究的是计算机控制的混合式采样数据控制系统。

计算机引进到控制系统中来,由于它功能多、容量大、运算速度快,使过去难以解决和实现的控制问题,如时变控制系统、非线性控制系统、多变量控制系统等都得到了解决。本课程所讨

论的计算机控制系统仅限于研究线性定常系统。因为工程上大多数控制系统都为线性定常系统,对于具有轻度非线性的系统,经线性化处理后,可用线性系统方法来分析。同时,研究线性系统可以回避建筑在状态概念之上的现代综合方法所需的许多数学基础,只要应用较简单的Z变换理论就能解决。Z变换方法是将系统在z域里进行分析和综合,然后经Z反变换得到非常适合于计算机解算的时域差分方程送入计算机,对系统进行实时控制;根据现代控制理论直接在时域里分析综合,得到非常适合于计算机迭代的代数运算,经计算机运算后,对系统进行实时控制。Z变换理论虽然是一种经典控制理论,但它和计算机相结合,使之具有现代控制的特点。掌握它,比较容易把计算机控制推广到工程技术中去,它也是学习现代控制理论的基础。

§ 1-2 计算机在控制系统中的作用

计算机与自动控制相结合使自动控制内容大大丰富起来。它可以实现极其复杂的控制,可以对一个产品的工艺流程进行控制,也可以对生产过程进行管理和控制,对导弹、火炮、鱼雷发射装置进行控制以及对机器人的智能进行控制。在自动控制系统中,计算机到底怎样起作用呢?下面举例来说明它的作用。

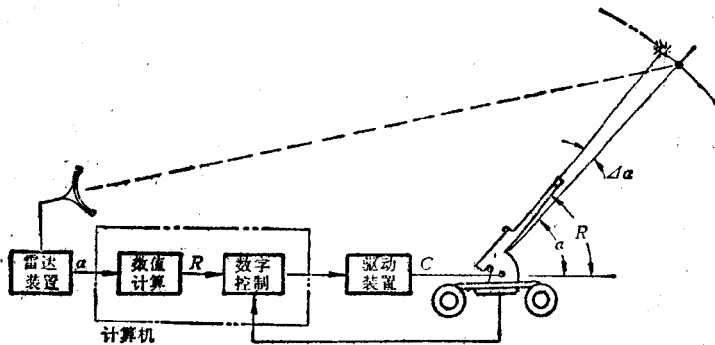


图 1-1 计算机控制火炮系统原理图

图 1-1 为计算机控制火炮系统原理图。一门自动火炮实际上由高低、方向、距离三套自动控制系统来实现射击控制的。为了说明工作原理,这里仅画了控制火炮高低角的伺服系统。当目标进入雷达作用半径以内,就被自动跟踪雷达跟踪,同时自动雷达将测得的目标当时位置(距离、方向角和高低角)随时送入计算机,计算机按人们事前规定的解算方法迅速解出目标的航向,航速等参数去控制火炮瞄准目标。在这里,计算机的任务是计算射击武器的发射角度和炮弹引爆时间,起解算装置的作用,也就是进行数值计算,这是计算机要完成的第一个任务。要把计算机解算出来的数字信号变成火炮的输出,也就是把数字量变成具有一定功率输出的机械量,必须通过伺服系统来实现。为了充分利用计算机的能力,提高伺服系统的品质,在系统中把计算机当作校正环节来使用,这是计算机要完成的第二个任务。由于计算机计算速度极快,能及时处理和运算,所以它对火炮能进行实时控制。

图 1-2 为计算机控制机床动力头位置反馈系统原理图。计算机接在反馈闭环之内作为控制系统的一个环节,计算机将存储器中的位置参数R与机床动力头当时实际位置C进行比较,并计算出一个适当的控制信号用以驱动电液伺服系统。在这里,计算机除了作比较器外,还对系统的误差信号进行处理,起校正作用。当计算机存储容量较大时,可以把机床动力头程序动

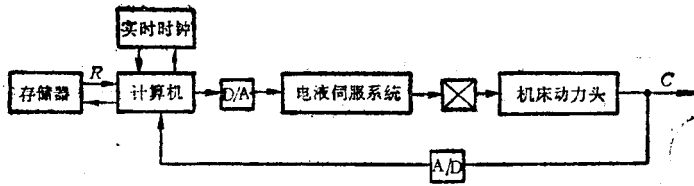


图 1-2 计算机控制机床动力头位置反馈系统原理图

作的位置直接存入计算机的内存中。由于计算机控制是实时控制，因此需要一台实时时钟把计算机和实际事件联系起来。

归纳起来，计算机在控制系统中能起解算装置、比较装置、校正装置和记忆装置等作用。

§ 1-3 计算机控制系统的特点

计算机运算速度极快，解算一般小型题目时间极短。因此用一台计算机控制一个伺服系统，计算机踏步时间往往大于运算时间，为了充分利用计算机的能力，常常让它同时控制几个，

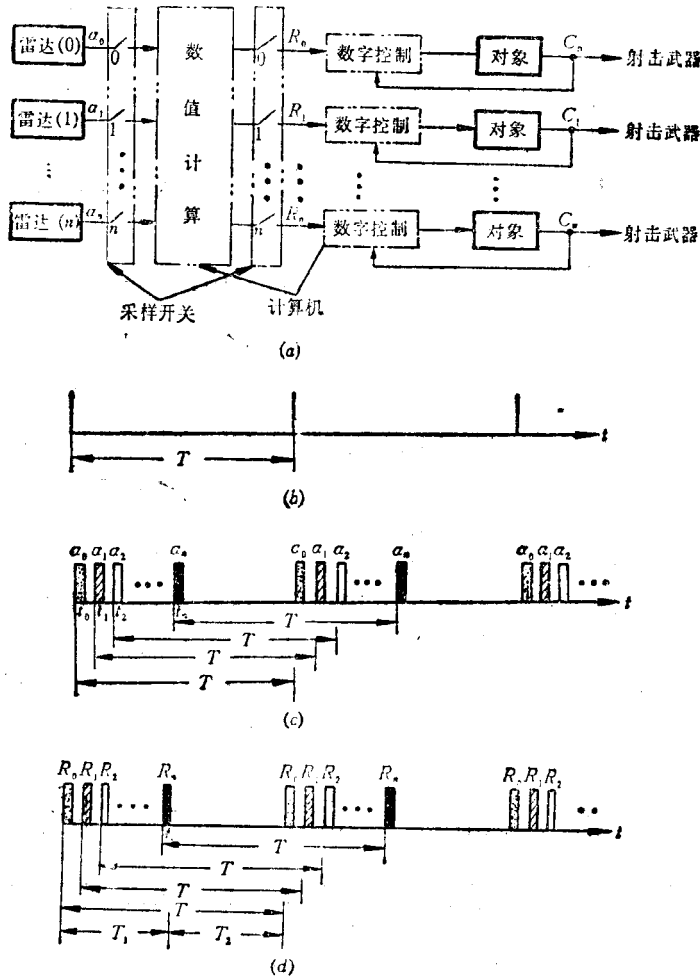


图 1-3 (a) 计算机输入输出的采样工作方式；(b) 采样信号；(c) 输入采样的时间分配；(d) 输出采样的时间分配

几十个甚至几百个系统。计算机和每一个控制对象都有通道,在这种情况下,计算机只能逐个采样,依次计算,如图 1-3 所示。即每隔 T 秒按 0、1、2、3...的次序合上采样开关依次将各部雷达的输入信号采样一次,计算一次。在 t_0 时合上第 0 号开关,采取 0 号雷达的信息 α_0 随即进行计算,并将结果 R_0 输出给伺服系统;在 t_1 时合上 1 号采样开关,计算 1 号雷达的信息 α_1 ,并输出计算结果 R_1 ;依次类推,直至 t_n 时刻输出 R_n 为止。所有计算必须在一个采样周期 T 内结束。下一个采样信号来到时再重复上述过程。对计算机来讲,每个采样周期中,采样和计算的数据是一组 $(R_0, R_1, R_2, \dots, R_n)$;对各个伺服系统来讲,得到的数据则是一个。但计算机工作时因采样和计算是周而复始地不断地进行着的,所以,随着时间的展开,每个伺服系统都能周期地从计算机取得输入信号而各自行动。从外观看,一台计算机好象能同时控制很多伺服系统,实际上各个伺服系统的输入数据 $(R_0, R_1, R_2, \dots, R_n)$ 在时间上是错开的,并不重合,如图 1-3d 所示。

由上述可见,计算机实现多路控制和多通道信息传输的关键,是在于采样工作、分时控制。因此采样是计算机控制系统工作的特点之一。由于计算机的计算速度很高,控制多个伺服系统所占用的时间仍可能不满一个采样周期,即 $T_1 < T$,所以在剩下的时间 T_2 里还可以安排其它的计算任务。

多路控制能充分发挥计算机控制系统的威力。比如,有 n 个目标全部被雷达群捕获,每部雷达跟踪自己捕捉到的目标,计算机采样输入各部雷达送来的目标的当时坐标 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ 并将计算结果 $(R_0, R_1, R_2 \dots R_n)$ 送至相应的伺服系统,这样便把全部目标置于火炮的火力射击点上。

§ 1-4 数字伺服系统的特殊问题

数字伺服系统与普通的伺服系统一样,都是闭环的反馈系统。所不同的是在我们所讨论的数字伺服系统中,不仅含有数字元件,而且也含有模拟元件,也就是说信号在系统的传递过程中一部分是连续的模拟信号,一部分是离散的数字信号,数字信号与模拟信号必须经过变换才能进行传递。当应用数字计算机作为控制系统的环节时,计算机的输入和输出必须是数字信号,系统中模拟元件的输入必须是模拟信号,其输出也是模拟信号。这就需要在系统中备有把数字信号转变为模拟信号、把模拟信号转变为数字信号的装置。把数字信号转变为模拟信号的装置称为数模转换装置(D/A);把模拟信号转变为数字信号的装置称为模数转换装置(A/D)。D/A、A/D 转换器就是数字伺服系统中的特殊问题。

图 1-4 为典型的计算机控制系统方框图,在计算机的出口处装有一个 D/A 转换器,在反馈回路到计算机的入口之间装有一个 A/D 转换器。

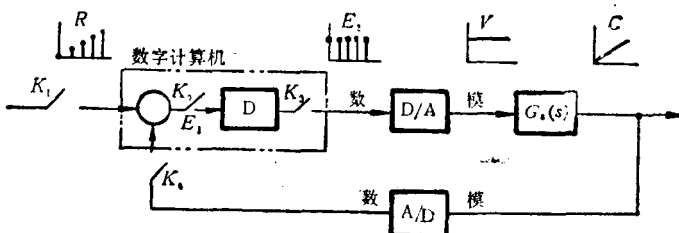


图 1-4 典型的计算机控制系统方框图及转换器的位置

一、A/D 转换器

在数字伺服系统中,由于存在 A/D、D/A 转换器,因此控制信号是离散的、量化的。系统输出的连续信号经过 A/D 转换器后得到的数字信号可以用十进制数来表示,也可以用二进制数来表示。例如,一个幅值大小为 10.625 的模拟量用十进制数来表示为 10.625,而用二进制数来表示则为 1010.101。假如十进制中只能取二位有效数字,尾数四舍五入,则 10.625 的模拟量经 A/D 转换器后输出为 11。11 和 10.625 之间存在误差,在数值分析中称为舍入误差。为了对信号进行数学运算,实现信号和数据的处理,信号和数据都要用二进制来表示。当表示数的位数有限时,同样会出现舍入误差。如二进制信号 1010.101 规定用四位数来表示它的大小,那末小数点后的数就表示不出来,根据舍远取近的原则,将用 1011 来表示这个信号的大小。这样,读数 and 原数就出现误差。可以看出,位数越多,误差越小。实际的信号转换装置不可能有无限多的位数,因此模拟信号转变为数字信号总是存在误差的。这种转换过程称为量化过程,量化过程中产生的误差叫做量化误差,用 ε 来表示。数字量最低位所代表的数值称为量化单位,用 q 来表示。量化过程可以用量化器及其相应的曲线关系来表示,见图 1-5。

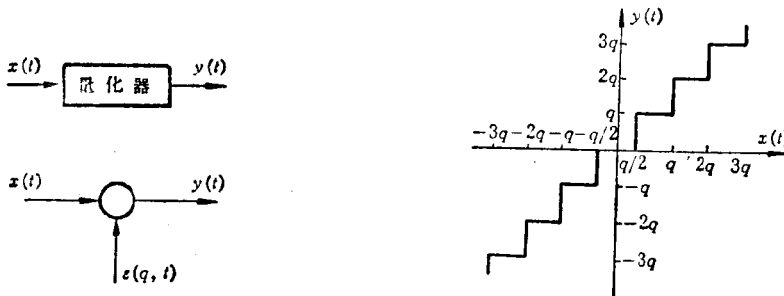


图 1-5 量化器及其输入、输出特性

图中 q 表示量化单位。当一个连续信号 $x(t)$ 加到量化器上去时,其输出 $y(t)$ 将是阶梯状波形,量化误差在 $-q/2$ 到 $q/2$ 之间变化,见图 1-6。

根据公式可以计算出量化单位 q 和量化误差 ε 的大小。假设被转换的模拟量的全量程为 M ,转换成二进制数字量所用的位数为 N ,则

$$\text{量化单位} \quad q = M/2^N \quad (1-1)$$

$$\text{量化误差} \quad \varepsilon = \pm q/2 \quad (1-2)$$

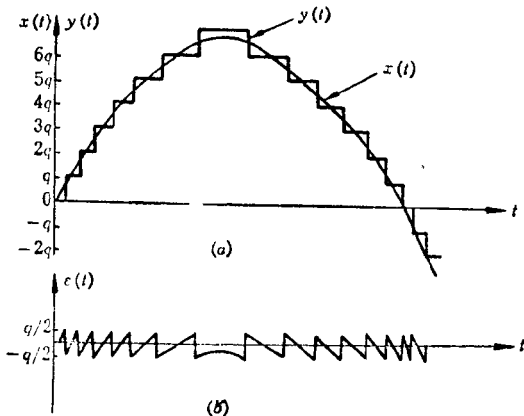


图 1-6 (a) 量化信号的波形;
(b) 量化误差的波形

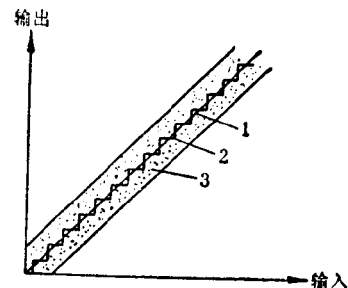


图 1-7 数字元件和模拟元件测量精度的比较
1. 真值; 2. 数字元件输出; 3. 模拟元件输出误差带

数字元件检测得到的量化值是阶梯形的,存在着量化误差,但它可以通过提高 N 来减小测量误差。从理论上讲,模拟元件的测量值是连续的、没有误差的,但由于受到实际元件分辨率的限制,实际得到的测量值有一条较宽的误差带,测量值落在误差带内,见图 1-7。误差带的误差比量化误差大,因此一般说来数字检测元件比模拟检测元件具有更高的精度。表 1-1 为各种检测元件的精度比较。

表 1-1 各种检测元件的精度比较($M = 360^\circ$)

检测元件	精度	相当二进制位数
单自整角机	$\pm 1^\circ$	8
旋转变压器	$\pm 0.5'$	9
电位器	$\pm 3'$	12
双通道自整角机	$\pm 0.7'$	14
光电轴角编码器	$\pm 1.4' \sim \pm 0.4'$	13~21

伺服系统的精度主要取决于反馈通道上检测元件的精度,也就是说反馈通道上检测元件的精度确定了系统静态精度的上限。从上面分析可以看出数字系统比模拟系统容易获得高精度。

二、D/A 转换器

D/A 转换器的任务是把数字量转变为模拟量。当计算机送出的数字量存放在寄存器中去就变成时间上的连续量,但它还不能成为使模拟元件所能感受的模拟量。从数字量转换到模拟量的过程是由保持器来完成的,因此保持器包括二部分:数字寄存器;D/A 转换器。

关于 A/D、D/A 转换器的具体实现,在第七章将详细讨论。

第二章 采样过程和信号恢复

§ 2-1 脉冲函数

一、脉冲函数的概念

在工程技术中,经常会遇到一些重要的函数,如指数函数、正弦函数、阶跃函数等,此外,还会遇到一种特殊的函数——单位脉冲函数。因为在实际工程问题中,有许多物理量具有脉冲性质,如两物体碰撞时的瞬时作用力,液压管路中阀门突然关闭所造成的液压冲击力,瞬时接通电路的电流等等。这些物理量的共同特点是具有较大的幅值,但作用时间极短。为了研究这些物理量,引进了脉冲函数。

现以电路为例,在原来电流为零的电路中,某一瞬时($t=0$)进入一单位电量的脉冲,现要确定电路上的电流 $i(t)$ 以 $q(t)$ 表示上述电路中的电荷函数,则

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

由于电流强度是电荷函数对时间的变化率,即

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} \quad (2-2)$$

所以,当 $t \neq 0$ 时, $i(t) = 0$; 当 $t = 0$ 时

$$i(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(0+\Delta t) - q(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-1}{\Delta t} = -\infty \quad (2-3)$$

上式表明,在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路中的电流强度,为了确定这电路上的电流强度,引进一个新的函数,这个函数称为狄拉克(Dirac)函数,记成 δ -函数。

实际瞬时作用的物理量作用时间虽然很短,但不等于零,为了便于数学上的分析,将瞬时作用的物理量加以理想化。假定瞬时作用曲线下面的面积为 1,令其作用时间 Δt 趋向零,并且保证曲线下面的面积值不变,则幅值将无限增加,此时就可以用 δ -函数来描写该瞬时物理量了。图 2-1 就是瞬时物理量理想化的表示方法。

根据上面的概念,我们可以定义单位脉冲函数具有如下形式

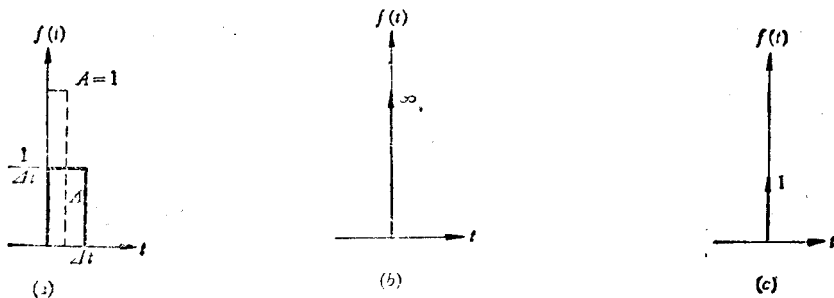


图 2-1 瞬时物理量理想化表示方法

(a) 瞬时物理量 (b) δ -函数幅值表示 (c) δ -函数强度表示

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

δ -函数具有二重性,它的幅值为无限大,它的强度为1。工程上为了方便,将 δ -函数用一个长度为1的有向线段来表示,见图2-1(c)。这个线段的长度有明确的物理意义,表示 δ -函数的积分,也叫 δ -函数的强度。

δ -函数的出现,有着很强的物理背景,1930年Dirac首先在量子力学中引进了 δ -函数,并且得到了成功。但是在数学和工程领域内曾引起很大的争议。从 δ -函数定义来看,无限振幅、宽度为零、而面积为1的函数在现实生活中是不存在的,因此,人们怀疑它是否有坚实的数学基础。实际上并非如此,近年来,法国数学家L.斯瓦兹引入了新的数学实体——广义函数后,在严密的基础上证明了脉冲函数的某些性质,进一步证明了 δ -函数确有坚实的数学基础。 δ -函数涉及理论很深,我们只要知道它的基本定义和某些重要性质就可以了。

二、 δ -函数的采样性质

δ -函数具有许多性质,其中有一条最重要的性质,即具有采样性质(或称筛选性质)。

若 $f(t)$ 为连续函数,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) \quad (2-5)$$

【证明】

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-t} f(t) \cdot \delta(t) dt + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-t}^t f(t) \cdot \delta(t) dt + \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-t}^t f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-t}^t \delta(t) dt = f(0) \end{aligned}$$

更一般地还成立着

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (2-6)$$

上面采样性质的物理意义是对于给定的连续函数 $f(t)$ 通过对 $\delta(t)$ 乘积的积分,可以摘出 $f(t)$ 在原点的函数值 $f(0)$,而 $\delta(t - \tau)$ 摘出了函数 $f(t)$ 在 $t = \tau$ 时的函数值 $f(\tau)$,这也是采样性质名字的由来。

上面性质表明,虽然 δ -函数是一种广义函数,但它和任何连续函数的乘积在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的积分都有很明确的意义,这就使得 δ -函数在工程技术中有较广泛的应用。

根据 δ -函数的采样性质,可以求出 δ -函数的拉氏变换和富氏变换。

δ -函数的拉氏变换

根据拉氏变换的定义得

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt \quad (2-7)$$

为了化为标准形式,将积分下限的零改为负无穷大,(因为 $t < 0$, $\delta(t) = 0$,改变积分限,不影响积分值)得

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} |_{t=0} = 1 \quad (2-8)$$

同理可得

$$L[\delta(t - \tau)] = e^{-s\tau} \quad (2-9)$$

δ -函数的富氏变换

根据富氏变换的定义得

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad (2-10)$$

同理可得

$$F[\delta(t - \tau)] = e^{-j\omega\tau} \quad (2-11)$$

§ 2-2 采样过程和采样定理

在采样系统中,需要把时间上连续的信号转变成时间上离散的脉冲或数字序列,该信号转换过程称为采样过程,完成信号转换的装置叫采样器或采样开关。如果采样开关是等时间间隔开闭,则称为普通采样或叫周期采样;若有多个采样开关,所有采样开关等周期一起开闭,则称为同步采样;等周期但不同时开闭,则为非同步采样;若各采样开关以不同的周期采样,则为多速采样;若采样周期是随机的,则为随机采样。这里仅讨论应用最广的同步周期采样。

一、采样过程的数学描写

图 2-2 为采样过程的原理图。用一只理想的采样开关,每隔 T 秒闭合一次,对一个连续函数 $f(t)$ 进行采样,可以把连续函数 $f(t)$ 变为时间上离散的脉冲或数字序列,即得到 $f(0)$ 、 $f(T)$ 、 $f(2T)$ 、 \dots 、 $f(nT)$ 。其中 T 为采样周期, T 、 $2T$ 、 \dots 、 nT 为采样时刻。经采样后的函数用 $f^*(t)$ 来表示,“*”表示离散化的意思。我们称 $f^*(t)$ 为 $f(t)$ 的离散函数。

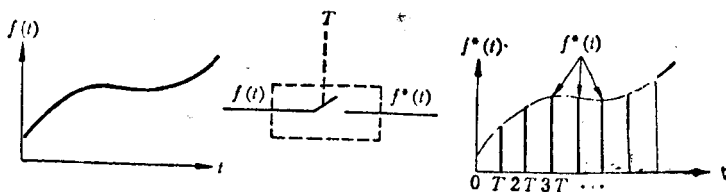


图 2-2 理想采样开关采样过程原理图

所谓理想采样开关是指开关闭合时间为零。此假设是为了简化采样系统的分析,实际采样开关闭合时,开关总要停留一段时间 r , 所以采样后所得的波形宽度为 r , 其幅值随连续时间函数 $f(t)$ 而变化的脉冲序列,如图 2-3 所示。在实际应用中,采样开关均为电子开关,开关闭合时间极短, r 远远小于采样周期 T , 也远远小于采样开关后面的被控对象的时间常数,故理想采样开关的假设是可取的。

为了分析采样系统,采样开关必须用数学方法来描写。连续信号经过采样开关以后,被采出信号某些时刻的数值,而在上一节中介绍了 δ -函数具有采样性质,能把函数在某些时刻的值采出来,这就很自然地联想到用 δ -函数来描写采样开关。采样开关闭合一次,相当于在该时刻作用一只单位脉冲,采样开关周期闭合,相当于作用一系列的脉冲。因此,可以造一个函数,令

$$\begin{aligned} \delta_r(t) = & \delta(t + nT) + \dots + \delta(t + 2T) + \delta(t + T) + \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) \\ & + \dots + \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (2-12)$$

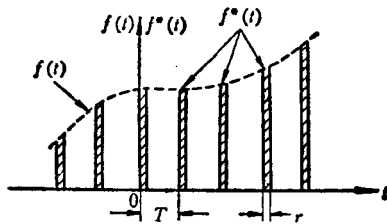


图 2-3 实际的采样脉冲序列

可以将上式写成和式形式,即

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2-13)$$

式(2-13)即为理想采样开关的数学表达式,其几何图象如图 2-4 所示。

式(2-12)中 $\delta(t)$ 表示发生在 $t=0$ 时刻的单位面积的理想脉冲, $\delta(t-nT)$ 表示发生在 $t=nT$ 时刻的同样脉冲, $\delta_T(t)$ 表示以 T 为周期的一系列单位面积的理想脉冲。

建立了采样开关的数学模型后,可以画出理想采样开关的输入和输出信号的波形图,见图 2-5 所示。

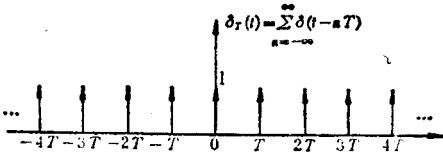


图 2-4 理想采样开关的几何图象

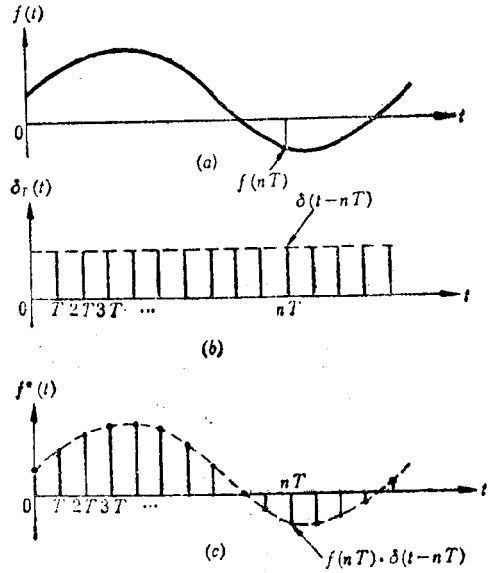


图 2-5 理想采样开关的输入和输出

(a) 采样器的输入 (b) 单位脉冲序列 (c) 采样器的输出

通过上图可以看出,采样器输出为一系列的脉冲,我们可以将连续信号 $f(t)$ 与采样器输出信号 $f^*(t)$ 的关系表示为

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \quad (2-14)$$

或

$$f^*(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2-15)$$

即离散信号 $f^*(t)$ 等于连续信号 $f(t)$ 与单位脉冲序列的乘积,换句话说,采样器可以作为一个脉冲调制器,采样过程可以作为一个脉冲调制过程。输入量 $f(t)$ 作为调制信号,而单位脉冲序列作为载波,见图 2-6 所示。因为假定采样脉冲为理想脉冲, $f(t)$ 只在脉冲发生时刻 $f(nT)$ 时才是有效的,被采样的,在 nT 时刻外没有脉冲,所以(2-15)式可改写为

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (2-16)$$

在本书中,我们讨论的大多数时间函数在 $t < 0$ 时是等于零的,如果没有另外的说明,都将认为是属于这种情况。因此,考虑到信号 $f(t)$ 的这一情况,(2-16)式可写为

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (2-17)$$

(2-17)式即为离散信号的数学表达式,它是由一系列脉冲组成,表达式中的每一项为两个函数的乘积。 $\delta(t-nT)$ 仅表示采样发生的时刻,并无其它物理意义, $f(nT)$ 表示在 nT 采样时刻所得到的离散信号值。

这里需要着重指出的一点是:前面引入的脉冲采样概念是为了可以直接产生描述系统的数学关系,以便对采样系统进行定量的分析和研究,但我们应该清楚地知道,脉冲采样仅仅是为了数学上的便利而引入的假想概念。采样开关用单位脉冲序列来描写,这仅仅是数学上的等效,而脉冲采样器本身在物理上是不可能实现的。

二、采样定理

连续系统和采样系统的区别是连续系统的控制信号在时间上是连续的;采样系统的控制信号在时间上是断续的、离散的。因此势必会提出这样的问题:断续信号是否能对系统实现有效的控制;为了复现连续信号,采样周期 T 的上限和下限有没有限制。显然采样周期无下限的限制,因为当采样周期 T 趋向零时,离散系统实际上转变为连续系统。另外从直观上也可以看出若采样周期 T 太长,采样点很少,则在两采样点之间可能丢失信号中的重要信息。在图2-7(a)中,由于采样周期 T 太长,把两采样点之间变化信号丢失;当把采样周期 T 缩短后,见图2-7(b),得到的采样值才保留了原信号的特征。因此,采样周期 T 必须有一个上限的要求。采样定理就是从理论上来回答上述问题。

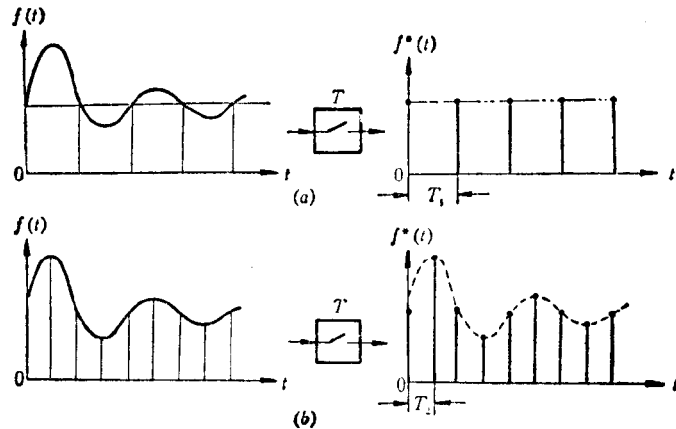


图2-7 采样周期 T 对采样信号的影响

采样定理叙述如下:若对于一个具有有限频谱($|\omega| < \omega_{max}$)的连续信号 $f(t)$ 进行采样,当采样频率满足:

$$\omega_s \geq 2\omega_{max} \text{ 时,}$$

则采样函数 $f^*(t)$ 能无失真地恢复到原来的连续信号 $f(t)$ 。 ω_{max} 为信号 $f(t)$ 有效频谱的最高频率, ω_s 为采样频率。采样频率和采样周期之间的关系为 $\omega_s = 2\pi/T$ 。

采样定理可以由(2-12)式的理想脉冲序列展开为富氏级数代入(2-17)式推得。因为 $\delta_T(t)$ 为周期函数,故可以展开为复数形式的富氏级数,即

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (2-18)$$

式中

$$\omega_s = 2\pi/T = 2\pi f_s$$

T 为采样周期, f_s 为采样频率, ω_s 为圆频采样频率, C_n 为周期函数展开为富氏级数的富氏系数。

根据 δ -函数的采样性质, 可以求出 C_n :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot e^{jn\omega_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (2-19)$$

计算结果得无论 n 为何值, 富氏系数 C_n 恒为 $1/T$ 。将 C_n 值代入 (2-18) 式得

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (2-20)$$

将 (2-20) 式代入 (2-14) 式得

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_s t} \quad (2-21)$$

对 (2-21) 式进行拉氏变换得

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L[f(t) e^{jn\omega_s t}]$$

由拉氏变换位移定理得

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_s)$$

将上面的级数展开, 重新排列得到

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \quad (2-22)$$

式中 $F(s)$ 为采样开关输入函数 $f(t)$ 的拉氏变换, $F^*(s)$ 为采样开关输出的离散函数 $f^*(t)$ 的拉氏变换。通常 $F^*(s)$ 的全部极点均在 s 平面的左半部, 故可用 $j\omega$ 代替上式中的 s , 直接求得采样函数 $f^*(t)$ 的富氏变换, 即

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega + n\omega_s)] \quad (2-23)$$

式中 $F(j\omega)$ 为原函数 $f(t)$ 的频谱, 是连续频谱; $F^*(j\omega)$ 是采样函数 $f^*(t)$ 的频谱, 是离散频谱。将 (2-23) 式展开可得

$$\begin{aligned} F^*(j\omega) &= \dots + \frac{1}{T} F[j(\omega - 2\omega_s)] + \frac{1}{T} F[j(\omega - \omega_s)] + \frac{1}{T} F(j\omega) + \frac{1}{T} F[j(\omega + \omega_s)] \\ &\quad + \frac{1}{T} F[j(\omega + 2\omega_s)] + \dots \end{aligned} \quad (2-24)$$

一般说来, 连续函数 $f(t)$ 的有效频谱带宽是有限的, 是一个孤立的频谱, 其最高有效频率为 ω_{max} , 如图 2-8(a) 所示。为了便于分析, 取 $F(0) = 1$; 采样函数 $f^*(t)$ 则具有以采样频率 ω_s 为周期的无限多个频谱, 如图 2-8(b)、(c)、(d) 所示。离散频谱图是根据 (2-24) 式绘制的, 使我们感兴趣的是: (2-24) 式中 $\frac{1}{T} F(j\omega)$ 一项, ($n=0$), 该项即为 $f(t)$ 的频谱, 只是幅值衰减到原来的 $\frac{1}{T}$, 除此以外的各项频谱 ($n \neq 0$), 都是由于采样引起的高频频谱。我们称 $n=0$ 的频谱为主频谱, $n \neq 0$ 的频谱为辅频谱。当采样频率 ω_s 取不同值时, 离散频谱的图形及分布也不同, 见图 2-8(b), (c), (d)。

为了使 $n=0$ 项的原信号不发生畸变, 需使采样频率 ω_s 足够高, 以拉开各频谱之间的距离