修订版

金牌奥校

李方烈等　编著

数学奥林匹克教程

小学六年级

中国少年儿童出版社

金牌奥校

数学奥林匹克教程

（小学六年级）

李方烈等　编著

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥校：小学数学六年级/李方烈等编．–北京：中国少年儿童出版社，1998.6

ISBN 7–5007–4241–X

Ⅰ.金… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课–小学–习题 Ⅳ.G623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 12534 号

主　　编：冯士腾

副 主 编：汤伯禹　段云鑫

本册编著：李方烈　付小平　祖希纲　陈彦博

李国安　冯士腾　汤伯禹

金牌奥校——数学奥林匹克教程

小学六年级

*

中国少年儿童出版社 出版发行

廊坊人民印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　印张：6.125　字数：97 千字

印数：20001—40000 册

1999 年 4 月修订版　2000 年 3 月第 2 次印刷

ISBN 7–5007–4241–X/G·3008　定价：9.80 元

凡有印装问题，可向承印厂调换

前　言

为了提高广大中小学生的数学水平和思维能力，有利于培养具有数学才能的少年儿童，我们组织了北京市西城区数学会及北京市宣武区、东城区等有关数学科研单位的专家学者，在认真分析了中小学生应具备的数学基础知识和运算基本技能的基础上，编写了这套丛书。丛书突出以下特点：

一、“浅” 深入浅出。注意普及面，面向广大中小学生。循序渐进，注意教学原则，注意数学思想启蒙与打好扎实基础。

二、“趣” 生动有趣。通过实际生动的例子，培养广大中小学生对数学的兴趣与爱好，做到活学活用。

三、“新” 入选资料不仅是参编教师多年教学经验的积累，更是近年来国际、国内中小学生数学竞赛水平的集中反映。

四、“准” 保证本丛书的科学性及高标准的编校质量。

本丛书在编写过程中，得到了不少省市教育部门数学教研员的大力支持，在此表示衷心的感谢。由于时间仓促，在编写过程中可能存在不当之处，恳请广大同行及读者不吝指正。

编者

目　　录

一　数的整除特征

一　填空

1. 一个三位数$\overline{1a2}$的 2 倍比$\overline{2a1}$多 23，则 a 为________，________.

2. 四位数$\overline{7a2b}$能被 2、3、5、整除，这样的四位数有________个，即为________________.

3. 五个连续自然数的和分别能被 2、3、4、5、6 整降，则满足此条件的最小一组数________________.

4. 各位数字都是 7，并能被 63 整除最小自然数是________.

5. 使得$\overline{a14b6}$能被 72 整除的最大五位数是________.

6. 能被 11 整除，首位数字是 4，其余各位数字均不相同的最大六位数为________，最小六位数为________________.

7. 由偶数数码（零除外）组成，且能被 16 整除的最小五位数是__________.

8. 计算：$\underbrace{11\cdots1}_{1994个1}\underbrace{22\cdots2}_{1994个2}\div\underbrace{33\cdots3}_{1994个3}=$________________.

9. 若 $236\mid\overline{6ab8}$————，则$\overline{6ab8}\div236=$__________.

二　判断$\underbrace{331331\cdots331}_{100个331}$能否被 7 整除.

三　从 1 到 10000，在这 10000 个数中既不能被 8 整除，也不能被 125 整除的数有多少个？

四　从 51 ～ 59 九个自然数中，任选两个不同数，使它们两个数的积既能被 2 整除，又能被 3 整除，这样的两个数有多少组？

五　三个数的和是 555，这三个数分别能被 3、5、7 整除，而且商都相同，求这三个数及相同的商.

六　从 0、3、5、7 四个数字中任选三个数，排成同时能被 2、3、5 整除的三位数，这样的三位数共有几个？

七　从 1 ～ 9 这九个数中选出五个不同的数字组成一个五位数，要求它能被 3、5、7、11 整除，这个数最大是几？

八　一个三位数的百位、十位、个位数字分别是 5、a、b，将它接连重复写 99 次成为：

$$\underbrace{5ab5ab\cdots\cdots5ab}_{99个5ab}$$

如果所成之数是 91 的倍数，问：这个三位数 $5ab$ 是几？

九　若 1 ～ 9 这九个数字每个数字各用一次，组成三个能被 9 整除的三位数，要求这三个数的和尽可能大，求这三个数.

十　将 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数字编排成三个三位数（九个数字全都用上，每个数字用一次且只用一次），要求每个三位数都能被 36 整除，是否能够办到？如果能办到，请你编出这样的三个三位数来；如果不能办到，请你说明理由.

思路分析与参考答案

一　填空

1. 由已知数量关系，可得$2 \times \overline{1a2} = \overline{2a1} + 23$. 即 $2 \times (1 + 100 + a \times 10 + 2) = 2 \times 100 + a \times 10 + 1 + 23$

$$2 \times 100 + 20 \times a + 4 = 2 \times 100 + 10 \times a + 24$$

$$10 \times a = 20 \qquad a = 2$$

或者利用百位、十位数字对比，可得十位数字是 $2 \times a = a + 2$，$\therefore a = 2$.

2. 要使$\overline{7a2b}$能同时被2、5整除，则b为零；又要使$\overline{7a20}$能被3整除，a必须满足各位数字的和$7 + 2 + 0 + a$能被3整除，又知a只能取0至9这十个数字，所以a只可取0、3、6、9故满足条件的四位数有4个，即7020、7320、7620、7920.

3. 要使五个连续自然数的和能同时被2、3、4、5、6整除，则和必定是2、3、4、5、6的公倍数，而其中最小公倍数为60，将60拆为10、11、12、13、14之和.

4. $\because 63 = 7 \times 9$，7与9互质，所以要使一个整数能被63整除，只要此数同时能被7、9整除即可，又$\because$这个数各位数字都是7，所以只要它能被9整除即可. $\therefore$ 该数为777777777.

5. $\because 72 = 8 \times 9$，8与9互质，所以要使$\overline{a14b6}$能被72整除，只要$\overline{a14b6}$同时能被8、9整除即可. 先使$\overline{4b6}$能被8整除，则$b = 1、5、9$. 现在，要寻找最大的五位数，还要满足$9 | a + 1$

$+4+b+6$. 当 $b=1$ 时,$a=6$;当 $b=5$ 时,$a=2$;当 $b=9$ 时,$a=7$. 根据数的大小比较原则,则此五位数为 71496.

6. 要使首位数字是 4,能被 11 整除,这样的最大六位数,还要满足其余各位数字的不相同,所以,只能先猜想是 498765,然后,再考虑能被 11 整除.这时,只需调整个位数字,就能找到满足条件的最大六位数 498762. 同理,可求出最小六位数为 401236.

7. 要求由偶数数码组成,且能被 16 整除的最小五位数,不妨先设前四位数码均为最小偶数 2. 要使
$16\mid\overline{2222a}$,先使 $4\mid\overline{2222a}$, $\therefore a=4$,当 $a=4$ 时,$22224\div4=5556$,而 $4\mid5556$,$\therefore$ 最小五位数为 22224.

8. 解:原式 $=(\overbrace{11\cdots1}^{1994个1}\times\overbrace{100\cdots0}^{1994个0}+2\times\overbrace{11\cdots1}^{1994个1})\div(3\times\overbrace{11\cdots1}^{1994个1})=(\overbrace{100\cdots0}^{1994个0}+2)\div3=\underbrace{33\cdots3}_{1993个3}4$

9. $\because 236\mid\overline{6ab8}$,又 $\because 4\mid236$,$\therefore 4\mid\overline{6ab8}$,$4\mid\overline{b8}$,$b=0$、2、4、6、8. 总之,$\overline{6ab8}>6000$,而 $\overline{6ab8}<7000$. 不妨设 $\overline{6ab8}\div236=x$.
则 $\dfrac{6000}{236}<x<\dfrac{7000}{236}$

$\therefore 25<x\leqslant29$. 又由于 $236\times x=\overline{4ab8}$,$\therefore x$ 的末位是 3 或 8. $\therefore x=28$.

($a\mid b$ 表示 b 被 a 整除).

二 能. 对于较大的数,采用试除的方法,不难发现 $7\mid331331$. 即两个 331 连续能被 7 整除. $\because$ 有 100 个连续的

331 是 7 的整数倍，∴ $7 \mid \underbrace{331331\cdots\cdots331}_{100个331}$

三　先寻找出在 1 ～ 10000 中能被 8 和 125 整除的数各有多少个，再考虑 1 ～ 10000 中能被 8 × 125 整除的数有多少个. 从 10000 个数中，减去分别被 8 和 125 整除的数的个数，再加上重复减掉的能被 8 × 125 整除的数的个数，问题将迎刃而解.

（实际上是运用整除与容斥原理）

∵ $10000 \div 8 = 1250, 10000 \div 125 = 80$

$10000 \div (8 \times 125) = 10000 \div 1000 = 10$

∴ $1250 + 80 - 10 = 1320$

在 1 ～ 10000 中，这 10000 个数中既不能被 8 整除，也不能被 125 整除的数有 $10000 - 1320 = 8680$（个）.

四　题目中要求的条件需一个一个地满足. ∵ $(2,3) = 1$，∴ 可以先找出 51 ～ 59 九个自然数中能被 2 整除的数：52、54、56、58；然后找出能被 3 整除的数：51、54、57；再找出能同时被 2 和 3 整除的数：54，最后采用摆数组的方法将能被 2 或 3 整除的数搭配，可得出 14 组不同的数：

51 × 52	51 × 54	51 × 56	51 × 58
54 × 52	54 × 56	54 × 58	
57 × 52	57 × 54	57 × 56	57 × 58
54 × 53	54 × 55	54 × 59	

五　通过对题目的分析不难看出相同商的求出是解决此问题的关键.

不妨设相同的商为 x，则三个数分别为 $3x$、$5x$ 和 $7x$. 利用方程的思想，可得 $3x + 5x + 7x = 555$，$x = 37$，则这三个数是 111、185、259，把这三个数分别除以 3、5、7 所得商是 37.

六 所求的三位数要符合两个要求：(1) 这个三位数的个位、十位、百位上的数字只能在规定的 0、3、5、7 四个数字中选；(2) 这个三位数能同时被 2、5、3 整除. 因此解答本题的思考方法是先确定被 2 和 5 同时整除的三位数，再在此基础上确定被 3 整除的三位数. 能同时被 2、5 整除的三位数的个位数字为 0，还得使十位上的数字与百位上的数字之和为 3 的倍数，这样的三位数才能被 3 整除，在剩下的 3、5、7 中，只有 $5 + 7$ 和 $7 + 5$ 是 3 的倍数，所以 570 和 750 两个数为所求.

七 所求的五位数要符合三个要求：(1) 从 1 ～ 9 这九个数中选出五个不同的数字；(2) 这个五位数能同时被 3、5、7、11 整除；(3) 它是满足条件(1)、(2) 的最大的五位数，较易于满足的条件是这个五位数能被 5 整除，所以个位数在限定的范围内只能取 5. 其余各位数字是否能被 3、7、11 整除难于确定. 因此，再从最大五位数进行考虑，不妨设此五位数为 $\overline{98ab5}$，根据能被 3、7、11 整除的特征建立方程组，寻求符合条件的 a、b 值.

$\because 3 \mid (9 + 8 + a + b + 5)$，即 $3 \mid (22 + a + b)$

$\therefore a + b$ 应分别等于 2、5、8、11.

又 $\because 11 \mid [(5 + a + 9) - (b + 8)]$，即 $11 \mid (6 + a - b)$

$\therefore a - b = 5$ 或 $b - a = 6$

当 $a + b = 2、5、8、11$，$a - b = 5$ 时，没有符合条件的 a、

b 值.

当 $a+b=2、5、8、11, b-a=6$ 时，只有 $a=1, b=7$ 符合条件.

再验证，98175 能否被 7 整除. ∵ $(175-98)\div 7=11$，∴ 满足题目条件的最大五位数是 98175.

八 遇到较大的数时，要注意寻找整规律除. 据观察不难发现，$5ab5ab$ 可以拆写成 $5ab \times 1001$ 而 $1001=7\times 11\times 13$，而 $(7、11、13)=1$

$\therefore 5ab5ab=5ab\times 1001=5ab\times 91\times 11$

即 $91\mid 5ab5ab$.

而 $\underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{99个5ab}=\underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{98个5ab}\times 1000+5ab$

其中 $91\mid \underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{98个5ab}\times 1000$

$\because 91\mid \underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{99个5ab}$

∴91 能整除 $5ab$.

$\because 91\times 6=546$

∴ 满足题目条件的三位数 $5ab$ 为 546.

九 所求的三个数要符合三个条件：(1)1～9 个这九个数字只用一次；(2) 组成的三个数能被 9 整除的三位数；(3) 这三个数的和尽可能大.

∵ 三个数都能被 9 整除，∴ 每个三位数各数位上数字的和是 9 的倍数. 已知 $1+2+3+\cdots+9=45$，为了满足条件(2)，只能将 45 拆成 9、18、18，先求出各个数位的和是 9 的最

大的数是621，再求各个数位上数字的和是18的最大三位数，才能满足条件(2)，其一的百位数字是9，其二的百位数字是8，为了满足三个条件，所以其一为954，其二为873. 因此，满足题目条件的三个数为621、954、873.

十　一个数要能被36整除，它必须同时能被4和9整除.

一个能被4整除的整数，它的末两位数也应能被4整除，特别是它的最后一位数必须是偶数，在1～9中，只有2、4、6、8是偶数，当4和8中的一个被用来作末位数，它的十位数也必须是偶数，如果4与8同时都用来作末位数，它们的前面又各自用去了一个偶数；即2与6，那么第三个数的末位不可能是偶数，因而不能被4整除. 因此，如果要想编出三个都能被36整除的三位数来，它的三个末位数必须是2、6、4与8这四个数中的一个.

当4或8被用来作末位数时，要保证末二位数能被4整除，还必须十位数上是个偶数. 由于2、6都已经被用来作末位数，所以十位数上只有是8或4. $\overline{a84}$或$\overline{a48}$又能被9整除，所以$a=6$，而6已用过，因此不可能编出三个三位数都能被36整除.

二　奇数与偶数

一　填空

1. 在不大于 1990 的所有的自然数中，奇数的和比偶数的和少________.

2. 在 30 到 100 中所有 3 的倍数的和是偶数还是奇数？答________数.

3. 七个连续偶数，其中最大数是最小数的 3 倍，那么这七个偶数为：________.

4. 有 20 个自然数，其中奇数比偶多，它们总和为 100，那么这些数中偶数至多有____个.

5. 三个相邻偶数的积是一个五位数，$\overline{85aa8}$，那以这三个数为：________.

6. 三个相邻奇数的积是一个六位数$\overline{328ab3}$，那么这三个数为：________.

7. 某班 49 名学生分 7 行，每行 7 人坐好. 现在做一项游戏，当铃声响时，每个同学都与自己相邻（前后左右）的某一个同学交换位置一次，这项游戏能否实现？答：________.

8. 能否在下式的 □ 内填入加号或减号，使下式成立？

$$1\ \square\ 2\ \square\ 3\ \square\ 4\ \square\ 5\ \square\ 6\ \square\ 7\ \square\ 8\ \square\ 9 = 10$$

二　任意交换某个三位数的数字顺序得到一个新的三

位数，小乐将原三位数与新三位数相加求得和为 999，请你指出他的错误.

三　有九只杯子口全部向上，每次将其中的四只杯子同时“翻转”，问能不能经过这样有限次数的“翻转”使杯口全部向下？为什么？

四　分别就 m 是奇数和偶数两种情况，判断下列各式中的 a、b 的奇偶性.

(1) $23 + 45 + 67 + 89 + a + b = m$

(2) $123 \times 455 \times 589 \times a \times b = m$

(3) $90 \div a \div b = m$

(4) $(a + b) \times a = m$

五　平面上有 7 个点，任意三点不在一条直线上，试问：(1) 过这些点最多可画多少条直线？(2) 能不能从每个点都引出三条直线且只引出三条直线与其余的任意三点相连？为什么？

六　某校毕业班同学离校前，互相交换照片留念，“无论人数是什么数，用来交换的照片的张数总是偶数”，这话对吗？说明理由.

七　电视台举办知识竞赛，共 20 道题，评分标准是：基础分 15 分，答对一道加 3 分，不答记 1 分，答错一道减 1 分. 求证：如果有奇数个人参赛，则所有参赛人的得分总和一定是奇数.

八　将 1000 个球分给若干个人，求证：分到奇数个球的人数是偶数.

九　如图是一所房子的示意图，图中数字表示房间号码，每间房子都与隔壁的房间相通. 问：能否从 1 号房间开始，不重复的走遍所有的房间又回到 1 号房间？

1	2	3
4	5	6
7	8	9

思路分析与参考答案

一　1. 在大于 1990 个所有的自然数中，奇、偶数各占一半，即各 995 个，显然$(2+4+6+\cdots+1990)-(1+3+5+\cdots+1989)=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(1990-1989)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{995}=995$

2. 在 30 到 100 中，所有 3 的倍数按从小到大的次序可以写成：

30，33，36，39，…，93，96，99.

其中的奇数是 33，39，45，…93，99. 这些奇数的总个数为 $(99-33)\div 6+1=12$. 这里 12 是一个偶数，根据在加法算式中，如果有偶数个奇数，那么算式的和一定是偶数，所以在 30 到 100 中所有 3 的倍数的和是偶数.

3. 设七个连续偶数中间的一个为 $2x$，则七个连续偶数可