

整体随机过程

帅元祖 著

ZHENG TISUI

JIGUOCHENG

四川科学技术出版社

整体随机过程

帅元祖

Whole Stochastic Processes

Shuai Yuan Zu

四川科学技术出版社

1989年·成都

责任编辑：赵 健
封面设计：吕小晶
技术设计：李 庆
责任校对：李 红

整体随机过程
帅元祖 著

四川科学技术出版社出版、发行
(成都盐道街三号)

新华书店重庆发行所经销
重庆印制一厂印刷

ISBN 7-5364-0769-6/O·24

1989年12月第1版 开本 787×1092 毫米 1/32

1989年12月第1次印刷 字数 334 千

印数 1—1,500 册 印张 15.5

定 价：4.80 元

序

人们从开始研究随机过程到二十世纪七十年代，都是研究一个指标的随机过程，即只把概率性质相同的随机变数（映像）放在一起研究，例如强平稳过程、均匀马尔科夫过程、鞅就是如此。1978年左右，法国由于农业需要研究了双指标鞅。继而又于1981年至1982年研究了多指标鞅。1983年，中国研究了Riesz指标鞅和双指标的马尔科夫过程，法国研究了双指标的扩散过程。1983年10月，由笔者首创研究了半序指标的马尔科夫过程（半序指标包括了双指标、多指标和Riesz指标）。1984年，笔者又研究了半序指标布朗运动，半序指标马尔科夫链，半序指标随机过程与现代科学技术。本书就是这些研究成果的汇集，但是涉及的范围仍然比较狭窄，没有考虑半序指标平稳过程、半序指标鞅，更没有考虑把熟知的强平稳过程、弱平稳过程、鞅、半鞅、马尔科夫过程等放在一起进行研究。对于半序指标马尔科夫过程还有下述问题没有解决：决定半序指标马尔科夫过程有穷维联合分布的最少条件是什么？怎样求出半序指标马尔科夫过程的有穷维联合分布？能否把马尔科夫链与布朗运动放在同一指标集中研究？如此等等。

半序指标随机过程有广泛的应用，这里不妨作一简单说明。

在现代化工厂里，电脑控制着各生产线，使产品源源不断地生产出来。在生产中，每条生产线都会产生随机误差，

只有将这些随机误差控制在允许范围内，才能保证产品符合设计规格。由于每条生产线产生的随机误差的概率性质不一样，不能用单指标随机过程处理。每条生产线产生随机误差的总体误差恰好是半序指标随机过程。如果用半序指标随机过程处理，就能找到控制这些随机误差的方法，从而使源源不断的产品符合设计要求。

在卫星发射系统中，点火的时候，火箭升天的时候，卫星脱离火箭进入轨道的时候，其各部分所产生的随机误差的概率性质一般是不相同的，不能用单一的随机过程处理。如果用半序指标随机过程处理，就能找到控制其随机误差的方法，以保证发射系统的安全和准确。

现代通讯有电缆通讯、微波通讯、卫星通讯、散射通讯、单边带通讯、流星余迹通讯、激光通讯等。在通讯中心，要管好形形色色的通讯手段，必须从总体上研究其有效性和可靠性。对此，单指标过程是无能为力的。如以半序指标随机过程为工具进行研究，就能找到有效和可靠的最优方案。

现代战争是立体战争。指挥作战的总参谋部要进行决策。以前提供决策的手段都是单指标的随机过程，不能反映立体作战的随机性，而半序指标随机过程则能予以反映。用它进行决策，就能找到立体作战的最优策略。

在天气预报中，还有许多疑难天气不能预报出来，因而给人们带来沉重的灾难。要准确预报天气，特别是准确预报疑难天气，就必须捕捉天气，特别是疑难天气的随机性质。只有捕捉到这些随机性质，才能找到预报它的最优策略。以前都是用单指标随机过程刻画这些性质的，不免产生漏洞。预报天气涉及的因素很多，范围很广，单指标过程不足以刻

划它们。只有半序指标随机过程才能刻划出它们来。

现代技术革命的标志是广泛使用计算机。对它所出现的随机误差如何进行控制呢？特别是对瞬时随机误差，例如0.1秒，0.001秒，0.0001秒的随机误差如何进行控制呢？往往因为一瞬间的误差，会出现很大问题，诸如控制失灵，卫星脱离轨道，导弹打不中目标，工厂出现意外故障，数据出现严重错误，等等。这些都只有借助于半序指标随机过程予以刻划，从而找到校正的方法。

特别值得一提的是第四章。笔者以半序指标布朗运动为工具，对现代物理学中的超光子问题进行了初探。有志者如果沿着这个阶梯走下去，彻底解决这个难题，并用物理实验给予证实，那么未来的诺贝尔物理奖就一定是属于他（她）的。第六章所叙述的半序指标随机过程在各个科技领域中的应用，都是一些新的思想。科技界的行家领略之后，一定会搞出世界第一流的发明创造。

本书是当今崭新研究成果的汇集。读者精读之后，会从多方面进入科学前沿，为祖国创造出丰硕的科学成果。

本书可供理、工、农、医类大专院校、师生、研究生参考，特别值得在工厂、农村、国防、科学战线上工作的同志一读。

由于笔者水平有限，本书疏谬之处在所难免，恳请读者惠赐批评意见。

帅元祖

1985年11月于成都

整体随机过程的背景

一、整体随机过程的一般定义

1. 具有半序的拓扑测度指标空间 $(T, \sigma^0, \mathcal{M}^0, \mu)$,

其中:
$$T = \left\{ t: t = \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i^0, \alpha_i \in [0, \infty), i=1, 2, \right. \\ \left. 3, \dots, n. n=1, 2, 3, \dots \right\};$$

$t_1^0, t_2^0, t_3^0 \dots t_n^0 \dots$ 是 Banach 空间 B 的可数基, 不必是规格化的正交基底;

$\sigma^0 = \sigma \cap T$, σ 是 B 中的开集系;

$\mathcal{M}^0 = \mathcal{M} \cap T$, $\mathcal{M}$ 是 σ 生成的 σ -代数;

μ 是定义在 $\mathcal{M}^0$ 上的 σ -有限测度;

s 表示定义在 T 的一种半序关系。

2. 测度状态空间 $(E, \mathcal{M}, \nu)$

其中: E 是任何一个抽象集合;

$\mathcal{M}$ 是 E 的某些子集生成的 σ -代数;

ν 是定义在 $\mathcal{M}$ 上的 σ -有限测度。

3. 完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

其中: Ω 是样本空间;

$\mathcal{F}$ 是一些样本事件生成的 σ -代数, 且包含关于 P 的一切零事件;

P 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的概率测度。

4. 整体随机过程 $\{X(t, \omega): t \in T\}$

此处对每个 $t \in T$, $X(t, \omega)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E, \mathcal{M}, \nu)$ 的可测映像。

二、引进整体随机过程的直观背景

1. 物理背景

1973年3月8日外电报道澳大利亚物理学家发现超光子，即速度大于光速的粒子，亦即快子。

1974年3月1日英国自然杂志第一期详细报道了澳大利亚物理学家发现超光子的情况。

1974年8月日本物理学家龟渊迪和表实在日本自然杂志发表文章《奇异的超光子》，论述了超光子的物理性质。

1979年纪念爱因斯坦诞辰一百周年时，光明日报撰文纪念爱因斯坦。文章谈到河外星系超星爆发，飞行物体的速度是光速的2~3倍。

直到目前为止，瑞典诺贝尔研究所、孟买的塔塔研究所、美国的普林斯顿大学、加利福尼亚大学、科罗拉多大学、布鲁海文国立实验室，都在探索超光子。

澳大利亚物理学家所做实验是这样的：观察宇宙射线在20公里的高空与大气粒子的碰撞。按照微观粒子的碰撞理论，电子—光子碰撞时会产生新的粒子。第一次碰撞产生的粒子叫二级粒子，二级粒子与大气粒子碰撞产生三级粒子；第 n 级粒子与大气粒子碰撞产生 $(n+1)$ 级粒子。碰撞粒子的速度按 n^2 增加，即若二级粒子的速度为 v ，则第 n 级粒子的速度为 $(n-1)^2v$ ，而且随 n 增加而逼近光速。宇宙射线粒子的速度以29万公里/秒计算，从20公里高空到地面所需时间

在60微秒以上。但是在60微秒之前60微微秒就已接收到信号（宇宙射线传来的信号）。这只能有一种解释：超光子存在。

日本一家高能物理研究所以人工方法制造了电子光场。他们使一个强光源定向发射一束强光，与一个定向发射来的电磁波相碰撞，使光沿同一方向反射，生成电子光。这生成的电子光是原来光源能量的千倍，其定向性优于激光。

为了解释电子光形成的原因，这里简单谈谈龟渊迪和表实文章的内容。根据速度能量曲线，小于光速的粒子，当速度增加时能量增加，当速度向光速逼近时能量增加到无穷。超光子速度愈大，能量愈小。如使超光子的速度减小而逼近光速，外界必须给以无穷大的能量。速度小于光速的粒子不可能变成速度为光速的粒子，更不可能变成超光子。同样，超光子也不可能变成速度为光速或小于光速的粒子，自然速度为光速的粒子也不可能变成超光子或速度小于光速的粒子。用单指标马氏链的话来说：速度小于光速的粒子，速度为光速的粒子，超光子是三个闭类。超光子可以被电子、光子吸收，吸收时能量不起变化。根据物理学的对称性原理，既然电子、光子能吸收超光子，则它们在某种条件下，例如碰撞时，就能放出超光子。电子、光子放出超光子时能量不起变化，超光子在某种坐标系下速度可以是无穷，此时超光子通过坐标系下任意两点，其所需时间为零。

现在解释电子光形成的原因。物理学的基本定律之一是能量守恒定律：在一封闭系统中，能量既不能增加，也不能减少。强光束与电磁波的碰撞是电子和电子、电子和光子、光子和光子之间的碰撞。在这些碰撞中只能放出光子和超光子、吸收光子和超光子。在形成电子光的过程中，仅是光

子、电子和超光子的变化。当电子—光子碰撞中放出光子、吸收光子时，无能量变化；而当电子—光子碰撞中放出超光子、吸收超光子时，则可能引起能量变化。因为放出的超光子经电子—光子的碰撞，其速度可能增加，也可能减少，速度增加则放出能量，速度减少则吸收能量。电子光的形成是由于电子—光子碰撞中放出了超光子，吸收了超光子。放出的超光子，其速度增加的概率远远大于速度减少的概率。然后超光子又被吸收，于是使能量陡增，形成电子光。这样，电子—光子的散射理论就扩展到超光子了。

理论上也证明了超光子的存在。设 $X = \{(x, y, z, t) : (x, y, z) \in R^3, t \in R\}$ 是 Minkovsky 空间，即通常说的四维空间：前三个坐标表示位置，后一个坐标表示时间，则 Minkovsky 空间中的旋转群可以用

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11} \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \\ \Delta_{21} \Delta_{22} \Delta_{23} \Delta_{24} \\ \Delta_{31} \Delta_{32} \Delta_{33} \Delta_{34} \\ \Delta_{41} \Delta_{42} \Delta_{43} \Delta_{44} \end{pmatrix}$$

这样一族 4×4 的矩阵表示。此处

$$\Delta_{i1}^2 + \Delta_{i2}^2 + \Delta_{i3}^2 + \Delta_{i4}^2 = 1 \quad i=1, 2, 3, 4$$

在这个群中的一个子群的作用下，光速不变，该子群称为 Lorentz 旋转群。Lorentz 旋转群中的对称子群，称为 Poincaré 群（Poincaré 是法国数学家）。它包含四个子群，一个子群关于位置的对称变换不变，一个子群关于位置的反对称变换不变，一个子群关于时间的对称变换不变，一个子群关于时间的反对称变换不变。用 Poincaré 群表示粒子有三种情况，即

$$1) \quad m^2 > 0, \quad 2) \quad m^2 = 0, \quad 3) \quad m^2 < 0.$$

此处 m 表示静质量。对应 $m^2 > 0$ 的粒子就是通常的一些粒子，例如中子、质子、电子、 π -介子等。对应 $m^2 = 0$ 的粒子有光子和一种中微子。由对称性原理，必然有对应于 $m^2 < 0$ 的粒子存在。由爱因斯坦狭义相对论知 $m^2 < 0$ 的粒子的速度大于光速，这就证明了超光子存在。另外一个证明见本书第四章§8。

爱因斯坦狭义相对论有两个假设，其一是光速不变，其二是一切惯性系统等价。所谓光速不变，是指在任何坐标系下测得的光速不变；所谓一切惯性系统等价，是指在任何惯性系统中做的物理实验结果一致。故在狭义相对论中，一个坐标系和另一个坐标系的时间是可以比较的。但是在超光系统下，一个坐标系和另一个坐标系的时间却不一定能比较，因为超光子在一些坐标系下速度虽大于光速但小于无穷，而在另一些坐标下速度为无穷。当速度小于无穷时，通过空间两点需要时间；当速度为无穷时，通过空间两点的时间为零，即瞬时通过。一个需要时间，一个瞬时通过，故无法比较。超光子的存在迫使我们时间引入半序，这就是引入整体随机过程的物理背景。

2. 技术背景

近代科学技术突飞猛进。其表现之一是计算机广泛应用于工业、农业、国防、卫星发射和航天技术等。随着计算机的广泛应用，给概率论提出了许多新的困难的问题。例如：

1) 如图所示：设 $\{x_i(t, w) : t \in [0, \infty)\}$ 表示第 i 车间所生产产品的误差过程($i=1, 2, 3, 4$)。第 i 车间产品通过传送带送到组装车间进行组装。由于金工产品、电子产品、能源产品、塑料产品的生产一般不可能同步，因此在组装车间进

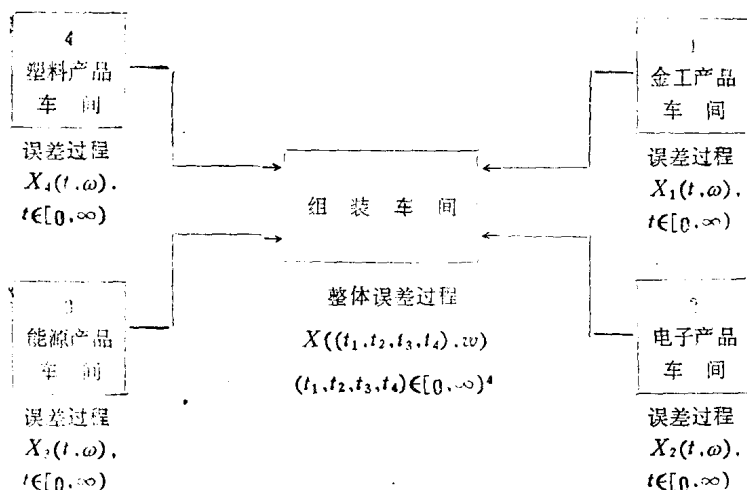
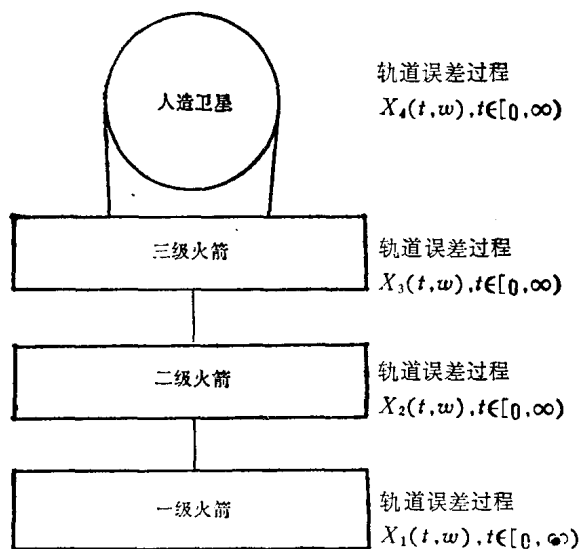


图 1

行组装时用的可能是 t_1 时的金工产品, t_2 时的电子产品, t_3 时的能源产品, t_4 时的塑料产品, 而且 t_1 、 t_2 、 t_3 和 t_4 的变化一般是独立的。金工产品、电子产品、能源产品、塑料产品的误差, 构成组装产品的误差。因此, 组装产品的误差过程, 即整体产品的误差过程, 亦即整体误差过程, 是一个 4 指标的随机过程。自然, 它不可能用一个单指标的随机过程表示, 而只能用整体随机过程表示, 此处为 $\{x(t_1, t_2, t_3, t_4), \omega) : (t_1, t_2, t_3, t_4) \in [0, \infty)^4\}$, 由此也足以体会到用整体二字形容随机过程的意义。

2) 如图所示, 卫星发射过程是首先点燃第一级火箭, 然后火箭发射系统升天。第一级火箭点燃后经 s_1 时间后脱落, 同时点燃第二级火箭; 第二级火箭经 s_2 时间后脱落, 同时点燃第三级火箭; 第三级火箭经 s_3 时间后脱离卫星, 同时卫星飞向轨道, 经 s_4 时间后进入轨道。在一般情况下, s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 不必相等。设一级火箭的轨道误差过程是 $x_1(t, \omega) : t \in [0, s_1]$,



整体轨道误差过程 $X((t_1, t_2, t_3, t_4), w): (t_1, t_2, t_3, t_4) \in [0, \infty)^4$

图 2

二级火箭的轨道误差过程是 $x_2(t, w): t \in [0, s_2]$, 三级火箭的轨道误差过程是 $x_3(t, w): t \in [0, s_3]$, 卫星轨道误差过程是 $x_4(t, w): t \in [0, s_4]$ 。整个卫星轨道的误差过程是上述四种轨道误差过程共同作用的结果。它只能表示为整体随机过程 $x((t_1, t_2, t_3, t_4), w): (t_1, t_2, t_3, t_4) \in [0, s_1] \times [0, s_2] \times [0, s_3] \times [0, s_4]$, 而不可能用单指标随机过程表示。在当今世界上, 火箭发射系统的事故层出不穷, 其原因之一大抵就是没有用整体随机过程去研究和表示火箭发射系统的误差过程。事实上, 整体随机过程的概念是在本书中首次提出的。可以预

料, 如果用整体随机过程的方法去随机控制火箭发射系统, 其事故将减少到最小。

3) 如图所示, 设整体噪声信道由白噪声干扰1、白噪声干扰2、白噪声干扰3、白噪声干扰4叠加而成。可以算出整体噪声信道是一整体布朗运动, 具有4个指标 (关于整体布朗运动的定义见第一章 § 4)。

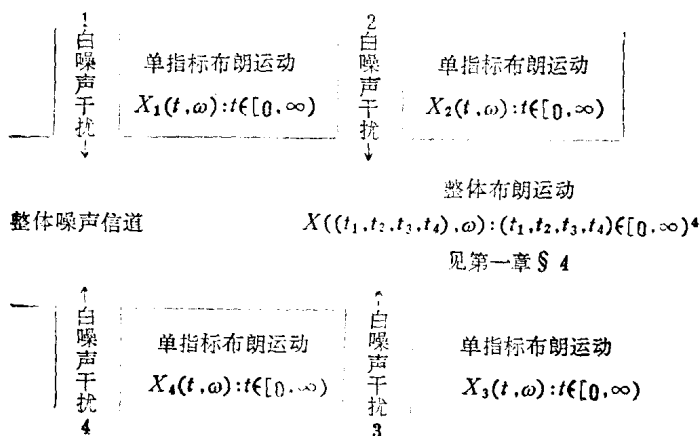


图 3

3. 数学背景

在概率论中常见的, 近年来研究得比较多是, Марков过程、平稳过程 (包括弱平稳过程和强平稳过程)、鞅和半鞅。这些过程都是单指标随机过程, 其概率性质一般说来有明显的差异。是否可以把Марков过程和鞅放在一起研究? 是否可以把 Марков 过程和平稳过程, 把鞅和平稳过程放在一起研究? 要想做到这一点, 单指标过程是无能为力的。只有从本质上扩大随机过程的指标集, 也就是说, 只有整体随机过程才能做到这一点。例如从第六章 § 1 可知, 整体随

机过程可以把Марков过程和平稳过程放在一起研究。

从另一个角度说，要想扩大随机过程类，就必须扩大随机过程的指标集。只有这样，才能引入单指标随机过程难以想象的随机过程（例如本书第一章、第二章和第五章引入的整体随机过程、整体 Марков 过程、整体布朗运动和整体 Марков 链）。也就是说，为了扩大随机过程类，必须引入整体随机过程。这就是引入整体随机过程的数学背景。

三、整体随机过程与半序指标随机过程的关系

从上面的叙述已见，整体随机过程的命名是从概率特征着眼的，而半序指标随机过程的命名则是从指标集着眼的，整体随机过程的抽象性优于半序指标随机过程，因而更具有永恒的性质。本书研究的是半序指标随机过程，故书名用整体随机过程，而在具体的研究中用半序指标随机过程命名。因为我们预测整体随机过程还将包含其他一些随机过程，故对本书使用术语的安排，似乎应当是合理的。

目 录

第一章 一般理论

- § 1. 具有半序指标集的随机过程..... 1
- § 2. 半序指标随机过程的连续性质..... 9
- § 3. 半序指标过程样本映像的性质..... 28
- § 4. 半序指标随机过程的可测性质..... 39

第二章 具有半序指标的马尔科夫性质

- § 1. 半序指标马尔科夫过程(I)..... 52
- § 2. 半序指标强马尔科夫过程..... 64
- § 3. 半序指标马尔科夫过程(II)..... 75
- § 4. 半序指标布朗运动..... 88

第三章 半序指标布朗运动的首中时

- § 1. 半序指标集为 $[0, \infty)^m$ 的布朗运动的首中时
..... 98
- § 2. 半序指标 n -维布朗运动的首中时(I)..... 105
- § 3. 半序指标 n -维布朗运动的首中时(II)..... 125
- § 4. 半序指标 n -维布朗运动的首中时(III)..... 133
- § 5. 半序指标平面布朗运动的首中时..... 142
- § 6. 半序指标布朗运动的末离时..... 152

第四章 Dirichlet问题

- § 1. $R^n (n \geq 3)$ 上的 D_- 问题 162
- § 2. $R^n (n \geq 3)$ 上的外 D_- 问题 188
- § 3. 平面上的 D_- 问题 199

§ 4.	平面上的外 D -问题	226
§ 5.	平面上多连通域上的 D -问题	241
§ 6.	$R^n (n \geq 3)$ 上多连通区域上的 D -问题	248
§ 7.	首中时的公式和ДЫНКИН、钟开莱的瑕点	256
§ 8.	宇宙中无极限速度	264
第五章 半序指标马尔科夫链		
§ 1.	半序指标马尔科夫链的定义	274
§ 2.	半序指标转移概率矩阵	283
§ 3.	标准的 Semi-M	298
§ 4.	标准 Semi-M 的可微性	312
§ 5.	标准 Semi-M 的性质	319
§ 6.	半序指标最小 Q -过程	332
§ 7.	半序指标 Q -过程的唯一性	345
§ 8.	半序指标 Q -过程的构造	354
§ 9.	半序指标马尔科夫链的样本函数	375
§ 10.	半序指标马尔科夫链的状态分类	387
§ 11.	半序指标强马尔科夫链	403
第六章 具有半序指标集的随机过程与现代科学技术		
§ 1.	具有半序指标集的随机过程在研究系列中的 应用	432
§ 2.	半序指标随机过程在生产系列中的应用	455
§ 3.	半序指标随机过程在测量系列中的应用	464
§ 4.	半序指标随机过程在流通系列中的应用	469
参考文献		475
附记		476