

高等数学教学参考书

高等数学习题解

上册

辽宁人民出版社

013-44
0:1

高等数学教学参考书

高等数学学习题解

(上册)

蒋众益 高福岐 演算
蒋非非 周国煜

辽宁人民出版社

一九八二年·沈阳

19748

内 容 提 要

同济大学数学教研室编写的《高等数学习题集》(1965年修订本), 出版以来深受读者欢迎。该书概念准确, 理论清晰, 内容严谨, 形式多样: 既有巩固性的习题, 又有启发性的参考题。它是与樊映川等同志编写的《高等数学讲义》相配套的一本高等学校辅助教材。根据读者需要, 将其全部二八二九道习题, 一一做了演算。为了照顾自学数学青年的具体困难, 又适当注意了它的详尽性。现分上、下两册同时出版, 仅供读者参考。

高等数学教学参考书 高等数学习题解 (上册)

蒋众益 高福岐 演算
蒋非非 周国煜

*

辽宁人民出版社出版
(沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{2}$ 印张: $33 \frac{1}{4}$ 插页: 2

字数: 774,000 印数: 1—47,000

1982年5月第1版 1982年5月第1次印刷

统一书号: 7090·155 定价: 3.60元

第一编 解析几何

第一章 平面上的直角坐标、曲线及其方程	1
平面上点的直角坐标, 坐标变换(1) 两点间的距离, 线段的定比分点(10) 曲线及其方程(24) 杂题(38)	
曲线的参数方程(42)	
第二章 直线	46
杂题(63)	
第三章 二次曲线	85
圆(85) 椭圆(92) 双曲线(99) 抛物线(107)	
一般二次方程的简化(115) 椭圆及双曲线的准线(129)	
杂题(133)	
第四章 极坐标	144
第五章 行列式及线性方程组	161
第六章 空间直角坐标、矢量代数初步	188
空间点的直角坐标(188) 矢量代数(198)	
第七章 曲面方程与空间曲线方程	234
第八章 平面与空间直线方程	256
平面方程(256) 空间的直线方程(276) 杂题(300)	
第九章 二次曲面	320

第二编 数学分析

第十章 函数	334
绝对值的运算(334) 函数值的求法(337) 函数的定义域(341) 建立函数关系(351) 函数性质的讨论(361) 函数的图形(373) 双曲函数(389)	

第十一章 极限393

数列的极限 (393) 函数的极限 (401) 无穷大,
无穷小 (406) 极限的求法 (412) 无穷小的比较
相当无穷小 (435) 杂题 (440)

第十二章 函数的连续性458

第十三章 导数及微分472

导数概念 (472) 求函数的导数 (481) 杂题 (520)
导数的应用 (540) 微分及其应用 (564) 高阶导数
(580) 参变量方程的导数 (596)

第十四章 中值定理, 导数在函数研究上的应用606

中值定理 (606) 罗彼塔法则 (614) 泰勒公式 (633)
函数的单调性 (646) 函数的极值 (659) 最大值
和最小值应用杂题 (679) 曲线的凹性和拐点 (703)
渐近线 (715) 函数研究及其图形的描绘 (725) 平
面曲线的曲率 (766) 方程的近似解 (774)

第十五章 不定积分787

简单不定积分 (791) 换元积分法 (796) 分部积分法
(811) 换元积分法和分部积分法杂题 (817) 分式有
理函数的积分 (841) 三角函数有理式的积分 (856)
简单代数无理式的积分 (861) 杂题 (875)

第十六章 定积分906

定积分概念 (906) 定积分的性质 (912) 上限 (或下
限) 为变量的定积分 (916) 计算定积分 (919) 杂题
(948) 计算定积分 (应用近似积分公式) (964)
广义积分 (970)

第十七章 定积分的应用988

平面图形的面积 (988) 体积 (1014) 平面曲线的
弧长 (1031) 定积分在力学及物理学上的应用 (1041)

第一编 解析几何

第一章 平面上的直角坐标、 曲线及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.1. 设轴上三点 A, B, C 的排列次序如图1—1, A 和 B 间距离为 4, C 和 B 间距离为 1.

(a) 求轴上有向线段 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ 的值.

(b) 若以点 A 为原点, 那么点 A, B, C 的坐标等于什么?

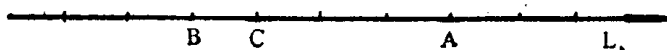


图 1—1

解: (a) 这里, $\overline{AB}, \overline{AC}$ 的方向和轴的正方向相反, 所以 $\overline{AB} = -|AB| = -4$; $\overline{BC}$ 的方向和轴的正向相同, 所以 $\overline{BC} = |BC| = 1$;

(b) 若以点 A 为原点, 则 A 的坐标是 (0) , B, C 的坐标分别是 (-4) , (-3) .

1.2. 已知数轴上点: A, B, C 的坐标依次为 $-6, 0, 8$, 求轴上有向线段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 的值.

解: 根据“有向线段的值等于终点的坐标减去始点的坐标”得出:

$$AB = 0 - (-6) = 6,$$

$$BC = 8 - 0 = 8,$$

$$CA = -6 - 8 = -14.$$

1.3. 作下列各点: $A(2, 7), B(3, 0), C(1, -4), D(0, 5),$
 $E(-1, 2), F(-4, -3), G(-2, 0), H(0, -3), K(-3\frac{1}{2},$
 $2\frac{1}{3}), L(\sqrt{2}, -\sqrt{3}), N(0, \sqrt{5}).$

解: 根据已给的坐标, A 在第一象限, B 在 X 轴的正向上, C 在第四象限, D 在 Y 轴的正向上, E 在第二象限, F 在第三象限, G 在 X 轴的负向上, H 在 Y 轴的负向上, K 在第二象限, L 在第四象限, N 在 Y 轴的正向上.

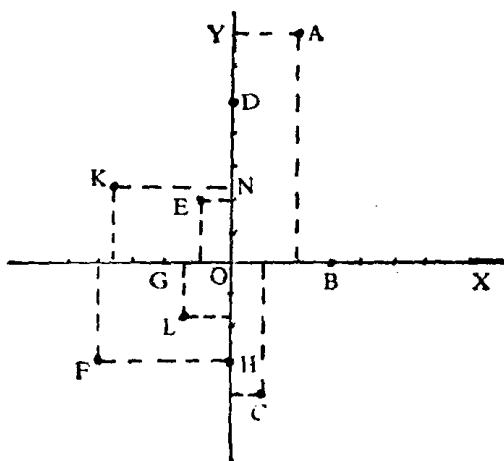


图 1-2

1.4. 三角形的三个顶点的坐标如下;

(a) $(8, 4), (0, -4), (2, 4)$;

(b) $(3, 5), (3, 10), (0, 2.5)$;

(c) $(2, 0), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$.

求作这些三角形.

解: 这些三角形顺次我们用 $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \triangle A''B''C''$ 表示, 作图 1-3 如下:

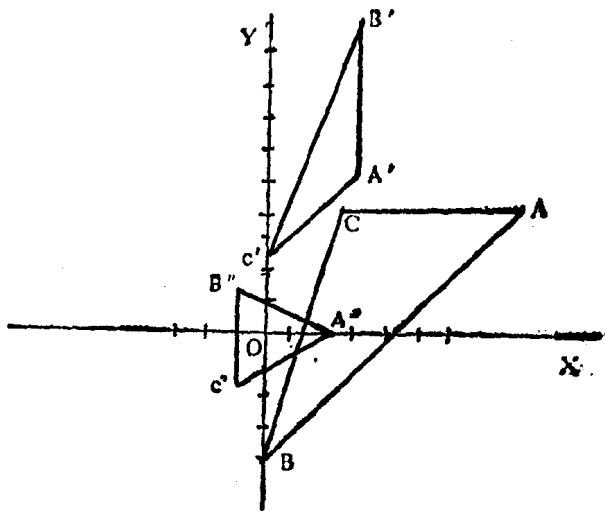


图 1-3

1.5. 设 $a=1, b=2$, 求作点 $(a, b), (b, a), (-a, b), (b, -a), (-b, a), (a, -b), (-a, -b)$ 和 $(-b, -a)$.

解: $\because a=1, b=2$, 则 $-a=-1, -b=-2$. 点 (a, b) 和 $(-a, b)$ 关于 Y 轴为对称, 点 (a, b) 和 $(a, -b)$ 关于 X 轴为对称, 点 (a, b) 和 $(-a, -b)$ 关于原点为对称.

同样, 点 (b, a) 和点 $(b, -a), (-b, a), (-b, -a)$ 分别关

于X轴, Y轴, 原点为对称.

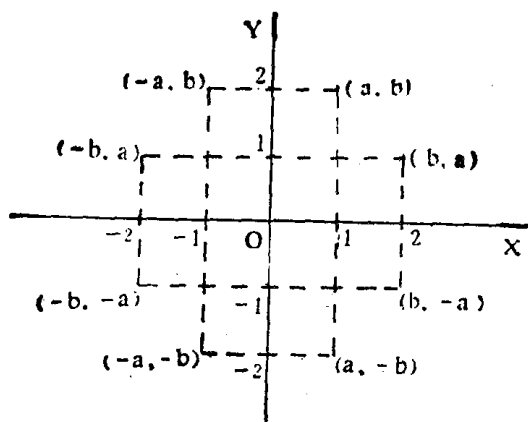
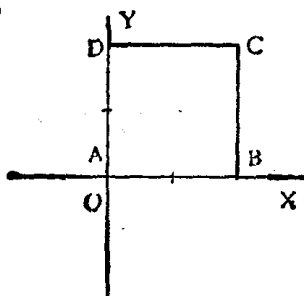


图 1—4

1.6. 一正方形的边长为 2 单位, 如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去, 问正方形各顶点的坐标等于什么?

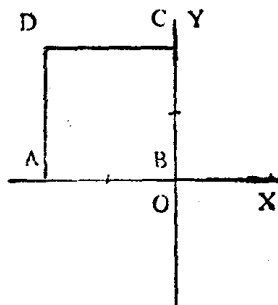
解: 因为正方形的一组邻边和两条坐标轴重合, 可见正方形的一个顶点在原点上, 两个顶点分别在X轴上Y轴上, 根据另一顶点落在哪一个象限中, 它可以分做四种不同的情况:

(1)



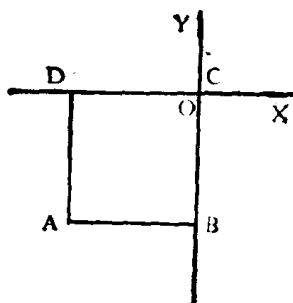
A(0, 0), B(2, 0),
C(2, 2), D(0, 2).

(2)



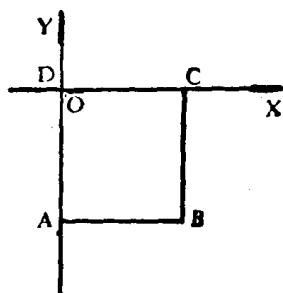
A(-2, 0), B(0, 0),
C(0, 2), D(-2, 2).

(3)



$A(-2, -2), B(0, -2),$
 $C(0, 0), D(-2, 0).$

(4)



$A(0, -2), B(2, -2),$
 $C(2, 0), D(0, 0).$

图 1—5

1.7. 菱形的每边长为 5 个单位, 它有一条对角线长为 6 个单位, 如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上, 求它各个顶点的坐标.

解: 根据所给对角线 AC 与 X 轴重合或与 Y 轴重合, 它有两种情况, 且当 $AC = 6, AB = 5$, 另一条对角线 $BD = 8$.

(1) AC 与 OY 轴重合时, 四个顶点的坐标分别为

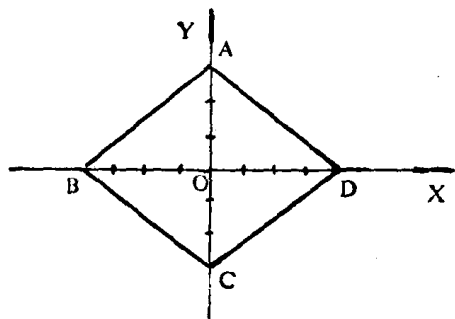


图 1—6(1)

$A(0, 3), B(-4, 0), C(0, -3), D(4, 0).$

(2) AC 与 X 轴重合时,
四个顶点的坐标分别为

$$A(3, 0), B(0, 4),$$

$$C(-3, 0), D(0, -4).$$

1.8. 已知点 $M(3, 2)$, 作
它关于横轴、纵轴、原点的
对称点. 求这些点的坐标.

解: 凡是关于 X 轴为对
称的两点, 它们的横坐标相
同, 而纵坐标的绝对值相等,
符号相反. 所以与 $M(3, 2)$
关于 X 轴为对称的点是 $(3,$
 $-2)$.

凡是关于 Y 轴为对称的
两点, 它们的纵坐标相同,
而横坐标的绝对值相等, 符
号相反, 所以与 $M(3, 2)$ 关
于 Y 轴为对称的点是 $(-3,$
 $2)$.

凡是关于原点为对称的两点, 它们的横坐标相等, 符号相
反, 纵坐标也是这样. 所以与点 $M(3, 2)$ 关于原点为对称的点
是 $(-3, -2)$.

1.9. 证明点 $A_1(a, b)$ 关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的
对称点 A_2 必有坐标 (b, a) .

证明: 如图1-8. 连结 A_1A_2 , 命 A_1A_2 与第Ⅰ和第Ⅲ象限
角的平分线的交点为 C , 并过点 A_1 作 $A_1M \perp OX, A_2N \perp OY$.

因为点 A_1, A_2 关于 OC 为对称, 也就是 OC 垂直平分 A_1A_2 ,

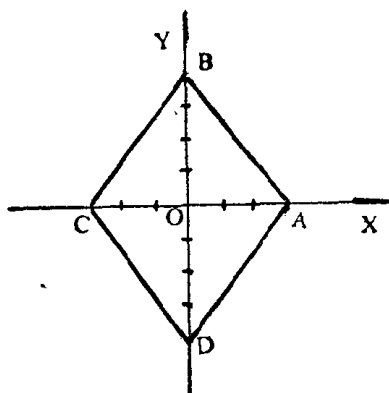


图 1-6(2)

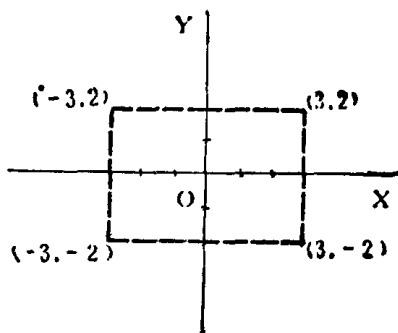


图 1-7

即 $A_1C = CA_2$, $\angle A_1CO = \angle A_2CO = \text{直角}$, 又 OC 公共, 所以 $\triangle A_1CO \cong \triangle A_2CO$.

于是 $OA_1 = OA_2$,
 $\angle COA_1 = \angle COA_2$.
 但 $\angle COX = \angle COY = 45^\circ$, $\therefore \angle COX - \angle COA_1 = \angle COY - \angle COA_2$ 即
 $\angle A_1OM = \angle A_2ON$.

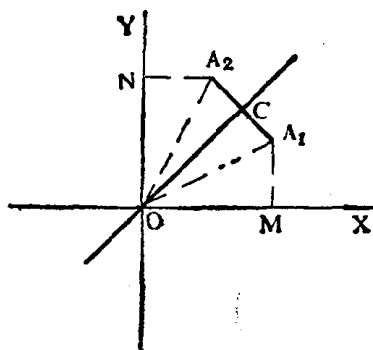


图 1-8

由此得到直角三角形 A_1OM , A_2ON 全等, $A_1M = A_2N$, $OM = ON$.

已知点 A_1 的坐标为 (a, b) 即 $A_1M = b$, $OM = a$.

$\therefore A_2N = b$, $ON = a$. 这也就是说, 点 A_2 的坐标为 (b, a) .

1.10. 点 B 与点 $A(2, 4)$ 对称于第 I 和第 III 象限角的平分线, 求点 B 的坐标.

解: 根据上题的证明, 立刻可以得到与点 $A(2, 4)$ 关于第 I 和第 III 象限角的平分线为对称的点 B 的坐标是 $(4, 2)$.

1.11. 一点在某一坐标系下的坐标为 $x = 2$, $y = -1$, 如果轴的方向保持不变而将原点移至点:

(a) $(4, 5)$; (b) $(4, -5)$;

(c) $(-4, 5)$; (d) $(-4, -5)$.

该点在新系下的坐标等于什么?

解: 在轴的平移下用旧系坐标表示新系坐标的公式是

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

已知旧系坐标是 $(2, 1)$, 根据所给的 a, b 值, 分别得

到:

$$(a) x' = 2 - 4 = -2,$$

$$y' = -1 - 5 = -6; \quad \therefore \text{新坐标为 } (-2, -6)$$

$$(b) x' = 2 - 4 = -2,$$

$$y' = -1 - (-5) = 4; \quad \therefore \text{新坐标为 } (-2, 4)$$

$$(c) x' = 2 - (-4) = 6,$$

$$y' = -1 - 5 = -6; \quad \therefore \text{新坐标为 } (6, -6)$$

$$(d) x' = 2 - (-4) = 6,$$

$$y' = -1 - (-5) = 4. \quad \therefore \text{新坐标为 } (6, 4)$$

1.12. 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为(12, -7)和(0, 15), 各系的原点在他系下的坐标等于什么?

解: 命该点关于旧系 O 的坐标为(12, -7), 关于新系 O' 的坐标为(0, 15). 设点 O' 关于旧系的坐标为(a, b), 根据在轴的平移下, 用新系的坐标表示旧系的坐标公式得到

$$0 = 12 - a, \quad 15 = -7 - b.$$

求得 $a = 12, b = -22$. 也就是点 O' 关于系 O 的坐标是(12, -22).

所以点 O 关于系 O' 的坐标是(-12, 22).

1.13. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 60° , 点 $M(1, \sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么?

解: 根据在轴的旋转下用旧系坐标表示新系的坐标公式

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

坐标轴依逆时针方向旋转 60° , 点 $M(1, \sqrt{3})$ 关于新系的坐标为

$$x' = 1 \cdot \cos 60^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,$$

$$y' = -1\sin 60^\circ + \sqrt{3}\cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.$$

即新系下的坐标是 $(2, 0)$ 。

1·14. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 45° , 点 $M(1, \sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么?

解: 已知点 M 关于旧系坐标: $x=1, y=\sqrt{3}$, 且 $\alpha=45^\circ$, 所以点 M 关于新系的坐标为

$$\begin{aligned} x' &= 1 \cdot \cos 45^\circ + \sqrt{3} \sin 45^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, \end{aligned}$$

$$y' = -1 \cdot \sin 45^\circ + \sqrt{3} \cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

即新系下的坐标为 $\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}), \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \right]$ 。

1·15. 坐标轴应该旋转多少角度, 方能使点 $M(2, 0)$ 在新系下的横标和纵标变成相等? (我们把角度限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间.)

解: 在坐标轴旋转后, 点 $M(2, 0)$ 在新系下的坐标是

$$x' = 2\cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = 2\cos \alpha,$$

$$y' = -2\sin \alpha + 0 \cdot \cos \alpha = -2\sin \alpha.$$

按照条件, 在新系下横标和纵标相等, 就有

$$2\cos \alpha = -2\sin \alpha,$$

即 $\operatorname{tg} \alpha = -1$ 。

因为我们把角度限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间, 所以

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

两点间的距离，线段的定比分点

1.16. 求下列各题中两点间的距离:

(a) (5, 2) 和 (1, -1); (b) (-6, 3) 和 (0, -5);

(c) (0, 0) 和 (-3, 4); (d) (9, -7) 和 (4, 5).

解: 根据两点间的距离公式

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

我们得到

$$(a) \quad d = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-2)^2} = 5,$$

$$(b) \quad d = \sqrt{(0+6)^2 + (-5-3)^2} = 10,$$

$$(c) \quad d = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = 5,$$

$$(d) \quad d = \sqrt{(4-9)^2 + (-7+5)^2} = 13.$$

1.17. 已知三角形的顶点 A(3, 2), B(-1, -1) 和 C(11, -6). 求三角形的周长.

$$\text{解: } |AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-2)^2} = 5,$$

$$|BC| = \sqrt{(11+1)^2 + (-6+1)^2} = 13,$$

$$|CA| = \sqrt{(11-3)^2 + (-6-2)^2} = 8\sqrt{2}.$$

所以三角形的周长

$$P = 5 + 13 + 8\sqrt{2} = 2(9 + 4\sqrt{2}).$$

1.18. 试证顶点为 A(0, 0), B(3, 1) 及 C(1, 7) 的三角形是直角三角形.

$$\text{证明: } \because |AB| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$|BC| = \sqrt{(1-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{40},$$

$$|CA| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50},$$

这时 $(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{40})^2 = (\sqrt{50})^2$, 也就是 $|AB|^2 + |BC|^2 = |CA|^2$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

1.19. 一点从点 $A(-3, -2)$ 作直线运动移至点 $B(4, 5)$, 求该点所经过的距离.

解: $|AB| = \sqrt{(-3-4)^2 + (-2-5)^2} = 7\sqrt{2}$, 也就是该点所经过的距离是 $7\sqrt{2}$.

1.20. 证明点 $(7, 2)$ 和点 $(1, -6)$ 在以点 $(4, -2)$ 为圆心的圆周上, 并求这个圆的半径.

证明: 因为点 $A(7, 2)$, $B(1, -6)$ 到点 $O(4, -2)$ 的距离是:

$$|AO| = \sqrt{(7-4)^2 + (2+2)^2} = 5,$$

$$|BO| = \sqrt{(1-4)^2 + (-6+2)^2} = 5,$$

$$\therefore |AO| = |BO|.$$

所以它们在以点 O 为圆心的圆周上, 而且半径 $R = 5$.

1.21. 在 X 轴上求与点 $A(5, 12)$ 的距离为 13 个单位的点的坐标.

解: 在 X 轴上的点的纵标等于零, 所以我们假设所求点的坐标为 $(x, 0)$, 根据两点间的距离公式有

$$\sqrt{(x-5)^2 + 12^2} = 13.$$

两边平方, 得

$$x^2 - 10x + 25 + 144 = 169,$$

即 $x^2 - 10x = 0,$

$$x(x-10) = 0.$$

$$\therefore x=0, x=10.$$

所以, 所求点的坐标是 $(0, 0)$ 或 $(10, 0)$.

1·22. 在第 I 象限角的平分线上求一点. 使它与点 $A(0, 2)$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 个单位.

解: 因为在第 I 象限角的平分线上的点的横标和纵标相等, 所以我们可以假设所求点的坐标是 (x, x) , 根据条件, 得到

$$\sqrt{x^2 + (x-2)^2} = \sqrt{2}.$$

整理后得 $(x-1)^2 = 0$.

$$\therefore x=1.$$

所以所求点的坐标是 $(1, 1)$.

1·23. 已知点 M 的横坐标等于 7 个单位, 而到点 $N(-1, 5)$ 的距离等于 10 个单位, 求点 M 的纵坐标.

解: 设点 M 的纵坐标为 Y , 也就是它的坐标是 $(7, y)$, 根据条件得到

$$\sqrt{(7+1)^2 + (y-5)^2} = 10$$

整理后, 得

$$y^2 - 10y - 11 = 0$$

$$\therefore y=11, -1.$$

所以点 M 的坐标是 $(7, 11)$ 或 $(7, -1)$.

1·24. 已知点 M 到两坐标轴和点 $(3, 6)$ 都有相等的距离, 求点 M 的坐标.

解: 因为点 M 到两坐标轴和点 $(3, 6)$ 距离都相等, 所以点 M 一定在第 I 象限内. 并且我们可设它的坐标是 (x, x) , 根据条件得到

$$\sqrt{(x-3)^2 + (x-6)^2} = x,$$

整理后得