

高等学校教学用书



微分几何教程

И. К. 拉舍夫斯基 著

吳祖基 裘光明 譯

人民教育出版社

51.64
132
高等学校教学用书



微分几何教程

И. К. 拉舍夫斯基著

吳祖基 裘光明譯

人民教育出版社

本书系根据苏联技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的拉舍夫斯基 (П. К. Рашевский) 著“微分几何教程” (Курс дифференциальной геометрии) 1950 年增订本译出。原书经苏联高等教育部审定为国立大学的教科书。

本书内容包含曲线论和曲面论。曲线论中包含平面曲线理论和空间曲线理论。曲面论中讨论了曲面基本理论、直纹面和可展曲面及曲面底内蕴几何学。

本书由北京大学吴祖基、裘光明翻译。

微 分 几 何 教 程

П. К. 拉舍夫斯基著

吴祖基 裘光明译

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

京 华 印 书 局 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号 K13010·76 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 13 $\frac{11}{16}$

字数 366,000 印数 17,501—20,500 定价 (6) ¥1.30

1955 年 10 月第 1 版 1962 年 3 月北京第 10 次印刷

第三版序言

在準備第三版時对这教本作了重大的修改。主要是为了在敘述底方法、材料底安排和計劃、証明底選擇等等方面作一些改進。特別重視的是清楚地列举了本課程基本的最低限度的材料。为此把所有其餘的內容(一般說來,它們都与必要的最低限度的材料緊密地相連,而且可以在某种選擇下与那些材料統一起來)都歸入加星号的各節裏。

至於說到在本課程裏所接觸到的实际知識方面,則在這裏改變不大。有的也只是个别的不多的補充:在曲線的參數表示下的奇異點;用極限过程來得出密切圓;直紋面底分佈參數和腰曲線。

在本書最後还添加了簡短的歷史知識。

對於本書編輯A. 3. 雷夫欽(РЫВКИН),由於他對本書的特別誠心的工作和对它所作的有價值的批評,我必須對他表示衷心的感謝。

作者

緒 論

虽然在数学裏对于一个領域在确实熟悉它以前很难建立一个一般的概念,我們还是要以概括的描述來給出微分幾何学对象底特徵。

如所周知,解析幾何建立在这样的对比上:空間底每个點对三个數(坐标);每个曲面对連繫流動坐标的方程;每条曲線对兩個这样的方程。由於这个,幾何事实可以被翻譯成代數的語言,幾何問題可以用代數方法來解,然後利用相反的过程把結果重新用幾何語言來解釋。在這裏基本的觀點顯然在於:使有力的和有用的代數算法規律地为幾何目的而服务。這時这步驟所表示的,不僅在於舊的問題用更完善的解析方法來解,而且在於与由初等方法達到的問題比起來有可能把幾何問題的範圍無比地擴大。

微分幾何表明在幾何目的上微分計算工具底相類的利用。這時重心依然在於創立幾何研究底新的領域上,以便使新的算法得能深入地应用。要知道是什麼決定这个領域——微分幾何底領域,——應該回想一下,無窮小分析这个工具在那裏应用和一般地如何应用。为了引出初等的例子,我們來討論點底不均匀的直線運動,它是按着表達點所經歷的路程依賴於時間的規律 $s=s(t)$ 而進行的。我們在時間底無窮小的區間从 t 到 $t+\Delta t$ 裏來研究这个運動。於是,从微分計算知道,在時間 Δt 內點所經歷的路程可以表示成

$$\Delta s = s'(t)\Delta t + \epsilon\Delta t,$$

(9)

這兒 $s'(t)$ 是微商，而 ε 與 Δt 同時趨向零。我們注意到，如果略去階數比 Δt 高的無窮小 $\varepsilon \Delta t$ ，則 Δs 對 Δt 的依賴是線性的，其係數為 $s'(t)$ 。這就是說，運動可以認為是均勻的，它有固定的速度 $s'(t)$ 。

微分計算底全部應用就立足於這基礎之上：在無窮小範圍內，只要略去高階的無窮小，複雜的依賴關係變成線性的，不均勻的過程變成均勻的，等等。我們就能在特別簡化了的形狀裏（自然只在無窮小範圍內）研究我們所關心的依賴關係。但是，第一，這事實本身有其重要性（在所說的例子裏我們用對時間求微分的步驟達到瞬間速度底計算）；第二，積分計算使我們在需要時能夠回到這步驟在整個範圍內的估價^①。

微分幾何是這同一個觀點在幾何領域裏的具體表現。換句話說，幾何對象——曲線和曲面——我們是從它們在無窮小節段上的結構方面來進行研究的。這個“顯微鏡式的研究”為我們揭露出一系列整齊的規律性，這用簡單的眼光看不出來而且只在無窮小時才能發現。研究幾何對象的一種新的強有力的方法產生了，我們在實地研究時將會得到關於它的更清晰的觀念。

我們還來作一個事先的附言。因為方法底本質與微分計算底應用有關，所以我們不應該在所討論函數底可微分性意義上加以任何限制。假如沒有相反的聲明，我們永遠假定，所有被討論的函數是單值的和可微分的，並且隨着我們的需要它們都有直到任意階的連續的微商。我們還要指出，在整本書裏討論的都是實變數。

① 我們在這裏所說到的已經是關於微分計算的應用。事實上，不僅這些應用，甚至無窮小分析之所以能夠創立，都由於物質的過程在小範圍有獲得均勻特質的趨勢（當然是暫且不談物質底原子結構）。微分計算就以絕對的形式反映這種趨勢。

目 次

第三版序言	7
緒論	9
第一章 關於平面上曲線的初步知識	11
§ 1. 平面曲線底正常點和奇異點	11
§ 2. 曲線在正常點鄰近的結構	14
§ 3. 在正常點處的切線和法線(笛卡兒坐標)	20
§ 4. 在正常點處的切線和法線(參數表示)	25
§ 5. 在正常點處的切線和法線(極坐標)	28
§ 6. 曲線在奇異點鄰近的結構·主要的事實	32
§ 7*. 曲線在奇異點鄰近的結構·嚴密的理論	39
§ 8. 曲線族底包絡	53
§ 9*. 在已知點鄰近的曲線族	60
§ 10. 漸近線	66
§ 11*. 漸近線作為切線底極限位置	70
§ 12. 代數曲線底漸近線	71
第二章 向量函數底微分法和它對曲線理論的最簡單應用	75
§ 13. 微商底定義和微分底技術	75
§ 14. 向量函數解釋作為參數表示的曲線底向徑	82
§ 15. 正常點底充分條件	83
§ 16. 向量函數微分法底幾何意義	85
§ 17. 向量函數底微分	88
§ 18. 兩個引理	90
§ 19. 關於向量函數的泰勒級數	92
§ 20. 參數給定的曲線在任意點底鄰域裏的構造	95
§ 21. 弧長作為參數	100

§ 22. 曲線底接觸.....	106
§ 23*. 關於曲線接觸理論的補充知識.....	110
第三章 平面曲線底曲率理論	118
§ 24. 密切圓.....	118
§ 25. 运用極限过程求作密切圓.....	125
§ 26. 曲率.....	127
§ 27. 向量 t, n	131
§ 28. 佛銳爾公式.....	133
§ 29. 收縮線.....	135
§ 30. 展伸線.....	140
§ 31. 曲線底自然方程.....	143
第四章 空間曲線底曲率理論	152
§ 32. 切線;法線.....	152
§ 33*. 曲線與曲面的接觸.....	159
§ 34. 直化點.....	162
§ 35. 密切平面.....	164
§ 36. 伴隨三面形.....	168
§ 37. 關於圓周的兩個引理.....	172
§ 38. 密切圓.....	174
§ 39. 空間曲線底曲率.....	177
§ 40. 佛銳爾公式・撓率.....	178
§ 41. 曲率和撓率底計算公式.....	186
§ 42. 曲線在正常點近傍的構造.....	194
§ 43*. 密切球面.....	200
§ 44. 自然方程.....	206
第五章 關於曲面論的初步知識	219
§ 45. 面上的曲紋坐标.....	219
§ 46. 面上的曲線.....	223
§ 47. 第一基本二次形式.....	227
§ 48. 面上的第二基本形式.....	236
§ 49. 關於面上曲線底曲率的基本公式.....	241

§ 50. 麥尼埃定理	242
§ 51. 平面上的線性向量函數	246
§ 52. 定態方向與定態值	249
§ 53. 基本向量函數和主方向	253
§ 54. 法截線曲率底研究	255
§ 55. 歐拉公式・主曲率	258
§ 56. 主曲率和主方向底計算	261
§ 57. 曲面上點底三種類型	265
§ 58. 計算公式	270
§ 59. 曲率線	273
§ 60. 漸近曲線	279
§ 61. 第三基本二次形式・共軛方向	285
§ 62*. 三個基本二次形式間的相關性	290
§ 63. 曲面底球面表示	291
第六章 直紋面和可展曲面	297
§ 64. 關於直紋面和可展曲面的概念	297
§ 65. 腰點	301
§ 66. 腰曲線・可展曲面底構造	304
§ 67*. 分佈參數	310
§ 68. 單參數曲面族底包絡	313
§ 69. 可展曲面視為平面族底包絡	317
§ 70*. 平面族包絡底脊線	318
§ 71*. 直紋面底漸近曲線和總曲率	323
§ 72. 可展曲面作為零總曲率的曲面	326
§ 73*. 可展曲面底正交軌線	328
§ 74. 曲率線底幾何特徵	334
§ 75. 曲面上的共軛網	337
第七章 曲面底內蘊幾何學	343
§ 76. 關於彎曲變形的概念	343
§ 77. 曲面底內蘊幾何學和彎曲變形	343
§ 78. 數標記號	345

§ 79. 第一組導式	347
§ 80*. 第二組導式	351
§ 81*. 第二基本形式底作用	353
§ 82. 高斯定理	358
§ 83*. 彼得松-柯達齊公式	361
§ 84*. 曲面上的向量	363
§ 85*. 曲面上數量場底梯度	366
§ 86*. 曲面上向量底平行移動	369
§ 87*. 平行移動底性質	372
§ 88. 曲面上曲線底法曲率和測地曲率	376
§ 89. 測地曲率底計算	378
§ 90. 曲面上的測地線	381
§ 91*. 从曲面上平行移動的觀點看測地線	385
§ 92*. 曲面上的半測地線坐標	386
§ 93*. 測地線底極值性質	390
§ 94*. 關於非定曲率曲面的彎曲變形	394
§ 95*. 可彎曲變形成旋轉曲面的曲面情況	400
§ 96*. 關於定總曲率曲面的彎曲變形	406
§ 97*. 定總曲率的旋轉曲面	410
§ 98*. 向量繞閉行程底平行移動	417
簡單歷史知識	425
中俄文索引	(1—8)

51.64
132
高等学校教学用书



微分几何教程

И. К. 拉舍夫斯基著
吳祖基 裘光明譯

人民教育出版社

本书系根据苏联技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的拉舍夫斯基 (П. К. Рашевский) 著“微分几何教程” (Курс дифференциальной геометрии) 1950 年增订本译出。原书经苏联高等教育部审定为国立大学的教科书。

本书内容包含曲线论和曲面论。曲线论中包含平面曲线理论和空间曲线理论。曲面论中讨论了曲面基本理论、直纹面和可展曲面及曲面底内蕴几何学。

本书由北京大学吴祖基、裘光明翻译。

微 分 几 何 教 程

П. К. 拉舍夫斯基著

吴祖基 裘光明译

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

京 华 印 书 局 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号K13010·76 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 13 $\frac{11}{16}$

字数 366,000 印数 17,501—20,500 定价(6) ¥1.30

1955年10月第1版 1962年3月北京第10次印刷

目 次

第三版序言	7
緒論	9
第一章 關於平面上曲線的初步知識	11
§ 1. 平面曲線底正常點和奇異點	11
§ 2. 曲線在正常點鄰近的結構	14
§ 3. 在正常點處的切線和法線(笛卡兒坐標)	20
§ 4. 在正常點處的切線和法線(參數表示)	25
§ 5. 在正常點處的切線和法線(極坐標)	28
§ 6. 曲線在奇異點鄰近的結構·主要的事實	32
§ 7*. 曲線在奇異點鄰近的結構·嚴密的理論	39
§ 8. 曲線族底包絡	53
§ 9*. 在已知點鄰近的曲線族	60
§ 10. 漸近線	66
§ 11*. 漸近線作為切線底極限位置	70
§ 12. 代數曲線底漸近線	71
第二章 向量函數底微分法和它對曲線理論的最簡單應用	75
§ 13. 微商底定義和微分底技術	75
§ 14. 向量函數解釋作為參數表示的曲線底向徑	82
§ 15. 正常點底充分條件	83
§ 16. 向量函數微分法底幾何意義	85
§ 17. 向量函數底微分	88
§ 18. 兩個引理	90
§ 19. 關於向量函數的泰勒級數	92
§ 20. 參數給定的曲線在任意點底鄰域裏的構造	95
§ 21. 弧長作為參數	100

§ 22. 曲線底接觸.....	106
§ 23*. 關於曲線接觸理論的補充知識.....	110
第三章 平面曲線底曲率理論	118
§ 24. 密切圓.....	118
§ 25. 运用極限过程求作密切圓.....	125
§ 26. 曲率.....	127
§ 27. 向量 t, n	131
§ 28. 佛銳爾公式.....	133
§ 29. 收縮線.....	135
§ 30. 展伸線.....	140
§ 31. 曲線底自然方程.....	143
第四章 空間曲線底曲率理論	152
§ 32. 切線;法線	152
§ 33*. 曲線與曲面的接觸	159
§ 34. 直化點.....	162
§ 35. 密切平面.....	164
§ 36. 伴隨三面形.....	168
§ 37. 關於圓周的兩個引理.....	172
§ 38. 密切圓.....	174
§ 39. 空間曲線底曲率.....	177
§ 40. 佛銳爾公式·撓率.....	178
§ 41. 曲率和撓率底計算公式.....	186
§ 42. 曲線在正常點近傍的構造.....	194
§ 43*. 密切球面.....	200
§ 44. 自然方程.....	206
第五章 關於曲面論的初步知識	219
§ 45. 曲面上的曲紋坐標.....	219
§ 46. 曲面上的曲線.....	223
§ 47. 第一基本二次形式.....	227
§ 48. 曲面上的第二基本形式.....	236
§ 49. 關於曲面上曲線底曲率的基本公式.....	241

§ 50. 麥尼埃定理	242
§ 51. 平面上的線性向量函數	246
§ 52. 定態方向與定態值	249
§ 53. 基本向量函數和主方向	253
§ 54. 法截線曲率底研究	255
§ 55. 歐拉公式・主曲率	258
§ 56. 主曲率和主方向底計算	261
§ 57. 曲面上點底三種類型	265
§ 58. 計算公式	270
§ 59. 曲率線	273
§ 60. 漸近曲線	279
§ 61. 第三基本二次形式・共軛方向	285
§ 62*. 三個基本二次形式間的相關性	290
§ 63. 曲面底球面表示	291
第六章 直紋面和可展曲面	297
§ 64. 關於直紋面和可展曲面的概念	297
§ 65. 腰點	301
§ 66. 腰曲線・可展曲面底構造	304
§ 67*. 分佈參數	310
§ 68. 單參數曲面族底包絡	313
§ 69. 可展曲面視為平面族底包絡	317
§ 70*. 平面族包絡底脊線	318
§ 71*. 直紋面底漸近曲線和總曲率	323
§ 72. 可展曲面作為零總曲率的曲面	326
§ 73*. 可展曲面底正交軌線	328
§ 74. 曲率線底幾何特徵	334
§ 75. 曲面上的共軛網	337
第七章 曲面底內蘊幾何學	343
§ 76. 關於彎曲變形的概念	343
§ 77. 曲面底內蘊幾何學和彎曲變形	343
§ 78. 數標記號	345

§ 79. 第一組導式	347
§ 80*. 第二組導式	351
§ 81*. 第二基本形式底作用	353
§ 82. 高斯定理	358
§ 83*. 彼得松-柯達齊公式	361
§ 84*. 曲面上的向量	363
§ 85*. 曲面上數量場底梯度	366
§ 86*. 曲面上向量底平行移動	369
§ 87*. 平行移動底性質	372
§ 88. 曲面上曲線底法曲率和測地曲率	376
§ 89. 測地曲率底計算	378
§ 90. 曲面上的測地線	381
§ 91*. 从曲面上平行移動的觀點看測地線	385
§ 92*. 曲面上的半測地線坐标	386
§ 93*. 測地線底極值性質	390
§ 94*. 關於非定曲率曲面的彎曲變形	394
§ 95*. 可彎曲變形成旋轉曲面的曲面情況	400
§ 96*. 關於定總曲率曲面的彎曲變形	406
§ 97*. 定總曲率的旋轉曲面	410
§ 98*. 向量繞閉行程底平行移動	417
簡單歷史知識	425
中俄文索引	(1-8)

第三版序言

在準備第三版時对这教本作了重大的修改。主要是为了在敘述底方法、材料底安排和計劃、証明底選擇等等方面作一些改進。特別重視的是清楚地列举了本課程基本的最低限度的材料。为此把所有其餘的內容(一般說來,它們都与必要的最低限度的材料緊密地相連,而且可以在某种選擇下与那些材料統一起來)都歸入加星号的各節裏。

至於說到在本課程裏所接觸到的实际知識方面,則在這裏改變不大。有的也只是个別的不多的補充:在曲線的參數表示下的奇異點;用極限过程來得出密切圓;直紋面底分佈參數和腰曲線。

在本書最後还添加了簡短的歷史知識。

對於本書編輯A. 3. 雷夫欽(РЫВКИН),由於他對本書的特別誠心的工作和对它所作的有價值的批評,我必須對他表示衷心的感謝。

作者