目　　录

第一章　场　　论

一、内容提要

1. 场的概念及梯度、散度、旋度

1）数量场　空间区域Ω的每点$M(x, y, z)$对应一个数量值$u(x, y, z)$，它在此空间区域Ω上就构成一个数量场（或称标量场），用点$M(x, y, z)$的数性函数$u(x, y, z)$表示，或记作$u = u(\mathbf{r})$。例如温度场、密度场、电位场等都是数量场。

2）矢量场　空间区域Ω的每点$M(x, y, z)$对应一个矢量值$\mathbf{R}(x, y, z)$，它在此空间区域Ω上就构成一个矢量场，用点$M(x, y, z)$的矢性函数$\mathbf{R}(x, y, z)$表示，或记作$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$。例如力场、流速场、磁场等都是矢性场.

3）梯度

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

式中 $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 称为哈密顿算子。

梯度具有性质：

$$\text{grad}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{grad} u + \mu \text{grad} v \quad (\lambda、\mu\text{为常数})$$

$$\text{grad}(uv) = u\text{grad} v + v\text{grad} u$$

$$\text{grad} F(u) = F'(u)\text{grad} u$$

4）方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \mathbf{l} \cdot \text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

式中 $\mathbf{l} = (\cos\alpha,\ \text{aos}\beta,\ \cos\gamma)$ 为方向 $\mathbf{l}$ 的单位矢量，α，β，γ 为其方向角。

方向导数为 u 在方向 $\mathbf{l}$ 上的变化率，它等于梯度在方向 $\mathbf{l}$ 上的投影。

5）散度

$$\text{div}\mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{R} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

散度具有性质：

$$\text{div}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda \text{div}\mathbf{a} + \mu \text{div}\mathbf{b} \qquad (\lambda,\ \mu\text{为常数})$$

$$\text{div}(u\mathbf{a}) = u\text{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\text{grad} u$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = = \mathbf{b} \cdot \text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot}\mathbf{b}$$

6）旋度

$$\mathrm{rot}\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{j}$$

$$+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

旋度具有性质：

$\mathrm{rot}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mu\mathrm{rot}\mathbf{b}$　（λ，μ为常数）

$\mathrm{rot}(u\mathbf{a})=u\mathrm{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\mathrm{grad}u$

$\mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+(\mathrm{div}\mathbf{b})\mathbf{a}$

$-(\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b}$

7）势量场（守恒场）　若矢量场$\mathbf{R}(x, y, z)$是某一数性函数$u(x, y, z)$的梯度，即

$$\mathbf{R}=\mathrm{grad}u\text{或}X=\frac{\partial u}{\partial x},\ Y=\frac{\partial u}{\partial y},\ Z=\frac{\partial u}{\partial z}$$

则$\mathbf{R}$称为势量场，数性函数u称为$\mathbf{R}$的势函数。

矢量场$\mathbf{R}$为势量场的充分必要条件是：$\mathrm{rot}\mathbf{R}=0$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}$$

势函数计算公式

$$u(x, y, z)=u(x_0, y_0, z_0)$$

$$+\int_{x_0}^{x}X(x, y_0, z_0)dx$$

$$+\int_{y_0}^{y} Y(x,\ y,\ z_0)dy$$

$$+\int_{z_0}^{z} Z(x,\ y,\ z)dz$$

8）管形场　设有矢量场**R**，若其散度div**R**＝0，则称此矢量场为管形场，管形场也称无源场。

矢量场**R**为管形场的充要条件是它为另一个矢量场**B**的旋度场。即　　$\mathbf{R}=\mathrm{rot}\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathrm{rot}\mathbf{R}}{r}dv$$

式中r为dv到M的距离，积分是对整个空间进行的。

9）无旋场　若矢量场**R**的旋度为零，即rot**R**＝0，则**R**称为无旋场。势量场总是一个无旋场，这时必存在一个数性函数u，使$\mathbf{R}=\mathrm{grad}u$，而对任意点$M$有

$$u=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathrm{div}\mathbf{R}}{r}dv$$

式中r为dv到M的距离，积分是对整个空间进行的。

10）穿过曲面的流量　若矢量**R**(**r**)在域Ω内产生矢量场，则称积分

$$\iint_{s}\mathbf{R}\cdot d\mathbf{s}=\iint_{s}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}ds$$

$$=\iint_{s}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)ds$$

为穿过位于域Ω内已知曲面S的流向法线上单位矢量**n**$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$所指的那一面的流量。在矢量形式上奥氏公式

为

$$\iint_s \mathbf{R}\cdot d\mathbf{s}=\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{R}dxdydz$$

式中S为包围体积V的曲面，$\mathbf{n}$为曲面S的外法线单位矢量。

11）矢量的环流 数性积分

$$\int_l \mathbf{R}\cdot d\mathbf{l}=\int_l Xdx+Ydy+Zdz$$

称为矢量$\mathbf{R}(\mathbf{r})$沿某曲线l所取的线积分（场作的功）。若曲线l是封闭的，则称线积分为矢量$\mathbf{R}$沿围线l的环流。

在矢量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_l \mathbf{R}\cdot d\mathbf{l}=\iint_s(\mathrm{rot}\mathbf{R})\cdot d\mathbf{s}=\iint_s \mathbf{n}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{R}ds$$

式中l为包围曲面s的封闭曲线，并且对曲面s的法线$\mathbf{n}$之方向，应使立于曲面s上的观察者，以头向着法线的方向，沿l依反时针方向回绕而作成（对于右旋坐标系）。

2. 有关∇的公式

设u与v为数性函数，$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$为矢性函数，$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$r=|\mathbf{r}|$。

1）$\nabla(cu)=c\nabla u$ （c为常数）

2）$\nabla\cdot(c\mathbf{A})=c\nabla\cdot\mathbf{A}$ （c为常数）

3）$\nabla\times(c\mathbf{A})=c\nabla\times\mathbf{A}$ （c为常数）

4）$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$

5）$\nabla\cdot(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}\pm\nabla\cdot\mathbf{B}$

6）$\nabla\times(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}\pm\nabla\times\mathbf{B}$

7）$\nabla\cdot(u\mathbf{c})=\nabla u\cdot\mathbf{c}$ （$\mathbf{c}$为常矢量）

8）$\nabla\times(u\mathbf{c})=\nabla u\times\mathbf{c}$ （$\mathbf{c}$为常矢量）

9) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

10) $\nabla\cdot(u\mathbf{A})=u\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla u\cdot\mathbf{A}$

11) $\nabla\times(u\mathbf{A})=u\nabla\times\mathbf{A}+\nabla u\times\mathbf{A}$

12) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

13) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

14) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$

15) $\mathrm{divgrad}u=\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2u=\nabla u$　($\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$称为拉普拉斯算子)。

16) $\mathrm{rotgrad}u=\nabla\times(\nabla u)=0$

17) $\mathrm{divrot}\mathbf{A}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$

18) $\mathrm{rotrot}\mathbf{A}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}$

(其中$\Delta\mathbf{A}=\Delta\mathbf{A}_x\mathbf{i}+\Delta\mathbf{A}_y\mathbf{j}+\Delta\mathbf{A}z\mathbf{k}$)

19) $\mathrm{divgrad}(\lambda u+\mu v)$

$=\nabla\cdot\nabla(\lambda u+\mu v)$

$=\lambda\mathrm{divgrad}u+\mu\mathrm{divgrad}v$

$=\lambda(\nabla\cdot\nabla u)+\mu(\nabla\cdot\nabla v)$　(λ，μ为常数)

20) $\mathrm{divgrad}(uv)$

$=\nabla\cdot\nabla(uv)$

$=u\mathrm{divgrad}v+v\mathrm{divgrad}u+2\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v$

$=u(\nabla\cdot\nabla v)+v(\nabla\cdot\nabla u)+2\nabla u\cdot\nabla v$

21) $\mathrm{graddiv}\mathbf{A}-\mathrm{rotrot}\mathbf{A}=\Delta\mathbf{A}$

22) $\nabla r=\frac{\mathbf{r}}{r}$

23) $\nabla\cdot\mathbf{r}=3$

24) $\nabla\times\mathbf{r}=0$

25) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$

26) $\nabla f(r)=\dfrac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$

27) $\nabla\times[f(r)\mathbf{r}]=0$

28) $\nabla\times(r^{-3}\mathbf{r})=0$

29) 奥氏公式 $\oint\!\!\!\oint_{s}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=\iiint_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{A})dV$

30) 斯托克斯公式 $\oint_{l}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\iint_{s}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s}$

二、例题

例1．1 求场

$$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

在：(1) $O(0,0,0)$；(2) $A(1,1,1)$；(3) $B(2,0,1)$ 诸点梯度的大小和方向。在场的怎样的点，梯度等于零？

解 $\mathrm{grad}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$

$$=(2x+y+3)\mathbf{i}+(4y+x-2)\mathbf{j}+(6z-6)\mathbf{k}$$

(1) $\mathrm{grad}u(O)=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

$$|\mathrm{grad}u(O)|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{7},\quad \cos\beta=-\frac{2}{7},\quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}.$$

(2) $\mathrm{grad}u(A)=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

$$|\mathrm{grad}u(A)|=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\beta=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\cos\gamma=0$。

（3） $\mathrm{grad}u(B)=7\mathbf{i}$

$|\mathrm{grad}u(B)|=7$

$\cos\alpha=1$， $\cos\beta=0$， $\cos\gamma=0$。

使 $\mathrm{grad}u=\mathbf{0}$ 得

$2x+y+3=0$，$x+4y-2=0$，

$6(z-1)=0$。

解之得 $x=-2$， $y=1$， $z=1$。

因此在点$M(-2, 1, 1)$处，$\mathrm{grad}u=\mathbf{0}$。

例1．2 在空间$oxyz$的哪些点，场

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的梯度（1）垂直于oz轴；（2）平行于oz轴；（3）等了零？

解 $\mathrm{grad}u=3(x^2-yz)\mathbf{i}+3(y^2-xz)\mathbf{j}+3(z^2-xy)\mathbf{k}$

（1） 当且仅当梯度在oz轴上的投影等于零时，梯度垂直于oz轴。故当$z^2=xy$时$\mathrm{grad}u$垂直于oz轴。

（2） 当且仅当梯度在ox轴和oy轴上的投影都等于零时，梯度平行于oz轴。故当$x^2=yz$和$y^2=xz$同时成立时，即当$x=y=0$或$x=y=z$时$\mathrm{grad}u$平行于oz轴。

（3） 当$x^2=yz$，$y^2=xz$，$z^2=xy$同时成立时，即当$x=y=z$时$\mathrm{grad}u=\mathbf{0}$。

例1．3 求$\mathrm{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})$，其中$\mathbf{c}$为常向量，$\mathbf{r}$为从坐标原点起的向径。

解 设 $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$,

又因 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,

故
$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})&=\mathrm{grad}(c_1x+c_2y+c_3z)\\&=\mathrm{grad}c_1x+\mathrm{grad}c_2y+\mathrm{grad}c_3z\\&=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}\\&=\mathbf{c}.\end{aligned}$$

例1.4求场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在已知点$M(x,y,z)$沿此点的向径$\mathbf{r}$之方向的导数。

在怎样的情况下，此导数将等于梯度的大小？

解法1 设向径$\mathbf{r}$的方向余弦为$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma\frac{z}{r};$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\\&=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}\\&=\frac{2u}{r}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{grad}u=2\left(\frac{x}{a^2}\mathbf{i}+\frac{y}{b^2}\mathbf{j}+\frac{z}{c^2}\mathbf{k}\right),$$

$$|\mathrm{grad}u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

当且仅当

$$\frac{u}{r}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{d^4}+\frac{z^2}{c^4}}\text{时，}\quad\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathrm{grad}u|$$

由此可得

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2$$

$$=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right). \tag{1°}$$

由恒等式

$$\left(x\cdot\frac{x}{a^2}+y\cdot\frac{y}{b^2}+z\cdot\frac{z}{c^2}\right)^2$$

$$=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)$$

$$-\left(x\cdot\frac{y}{b^2}-\frac{x}{a^2}\cdot y\right)^2-\left(y\cdot\frac{z}{c^2}-\frac{y}{b^2}\cdot z\right)^2$$

$$-\left(z\cdot\frac{x}{a^2}-\frac{z}{c^2}\cdot x\right)^2.$$

故知唯有当$|a|=|b|=|c|$时（1）式才成立，即这时方向导数等于梯度的大小。

解法2 当向径$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$的方向与梯度

$$\mathrm{grad}u=2\left(\frac{x}{a^2}\mathbf{i}+\frac{y}{b^2}\mathbf{j}+\frac{z}{c^2}\mathbf{k}\right)$$

的方向一致时，沿此点的向径$\mathbf{r}$的方向导数将等于梯度的大小。由此必需有

$$\frac{x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{z}{\frac{z}{c^2}},$$

即 $\quad |a|=|b|=|c|.$

例1.5 （1）u是$(x,\ y,\ z)$的标量函数，$\mathbf{A}$是$(x,\ y,\ z)$的矢量函数。

证明 $\nabla\cdot(u\mathbf{A})=u\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla u$；

（2） 设有力场$\mathbf{F}$，这个力的大小与作用点到xoy平面的距离成反比，方向指向坐标原点，求力场$\mathbf{F}$；

（3） 利用（1）的公式计算$\nabla\cdot\mathbf{F}$．（长春光学精密机械学院）．

解 （1） 由$u\mathbf{A}=uA_x\mathbf{i}+uA_y\mathbf{j}+uA_z\mathbf{k}$

故
$$\nabla\cdot(u\mathbf{A})=\frac{\partial(uA_x)}{\partial x}+\frac{\partial(uA_y)}{\partial y}+\frac{\partial(uA_z)}{\partial z}$$

$$=u\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$+\left(A_x\frac{\partial u}{\partial x}+A_y\frac{\partial u}{\partial y}+A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\Delta\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla u.$$

（2） $$\mathbf{F}=-\frac{k}{z}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=-\frac{k}{zr}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).$$

（3） $$\nabla\cdot\left(-\frac{k}{z}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=-\frac{k}{z}\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\nabla\left(-\frac{k}{z}\right)$$

$$=-\frac{k}{z}\frac{2}{r}+\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{k}{z^2}\mathbf{k}$$

$$=-\frac{2k}{zr}+\frac{k}{zr}=-\frac{k}{zr}.$$

例1.6 设$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$r=|\mathbf{r}|$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为矢量。

证明 $$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\frac{3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})}{r^5}$$

$-\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{r^3}$。（海军工程学院1982年）。

解 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+zk$，$|\mathbf{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

设 $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$；

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=-\frac{x}{r^3}。$$

由对称性，即知

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^3}，\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z}{r^3}。$$

$$\therefore\quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})；$$

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}(a_1x+b_1y+c_1z)。$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]=-\frac{a_1r^2-3x(a_1x+b_1y+c_1z)}{r^5}；$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]=-\frac{b_1r^2-3y(a_1x+b_1y+c_1z)}{r^5}；$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]=-\frac{c_1r^2-3z(a_1x+b_1y+c_1z)}{r^5}，$$

$$\therefore\quad \nabla\left[\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]=-\frac{1}{r^5}\{[a_1r^2-3x(a_1x+b_1y+c_1z)]\mathbf{i}$$
$$+[b_1r^2-3y(a_1x+b_1y+c_1z)]\mathbf{j}$$
$$+[c_1r^2-3z(a_1x+b_1y+c_1z)]\mathbf{k}\}。$$

故 $\mathbf{B}\cdot\nabla\left[\mathbf{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]$

$$=-\frac{1}{r^5}\{[a_1a_2r^2-3a_2x(a_1x+b_1y+c_1z)]$$

$$+[b_1b_2r^2-3b_2y(a_1x+b_1y+c_1z)]$$

$$+[c_1c_2r^2-3c_2z(a_1x+b_1y+c_1z)]\}$$

$$=-\frac{1}{r^5}[(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)r^2-3(a_1x+b_1y+c_1z)$$

$$(c_2x+bcy+c_2z)]$$

$$=-\frac{1}{r^5}[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})r^2-3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})]$$

$$=\frac{3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})}{r^5}-\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{r^3}.$$

例1.7 设$\varphi(x, y, z)$和$\psi(x, y, z)$是两个在区域$\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<2$中的二次连续可微函数，求矢量$\text{grad}\varphi\times\text{grad}\psi$，穿过球面$x^2+y^2+z^2=1$的流量。

（华中工学院1984年）。

解 $\text{grad}\varphi\times\text{grad}\psi=\text{rot}(\varphi\,\text{grad}\psi)$
根据斯托克斯公式穿过上半球面$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$，$z>0$的流量等于向量$\varphi\text{grad}\psi$沿着圆周$x^2+y^2=1$在平面xoy上的环流量。圆周的方向与半球面方向一致。通过下半球面$z<0$的流量，等于沿同一圆周，但方向相反的环流量，因而通过球面的流量等于这两部分之和，故等于0。

例1.8 证明场$\mathbf{u}=yz(2x+y+z)\mathbf{i}+xz(x+2y+z)\mathbf{j}+xy(x+y+2z)\mathbf{k}$为有势场。

证 设 $P = yz(2x+y+z)$

$Q = xz(x+2y+z)$

$R = xy(x+y+2z)$

$\because$ $\dfrac{\partial}{\partial x}[xz(x+2y+z)] = z(2x+2y+z)$

$\dfrac{\partial}{\partial y}[yz(2x+y+z)] = z(2x+2y+z)$

$\therefore$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$\dfrac{\partial}{\partial z}[yz(2x+y+z)] = y(2x+y+2z)$

$\dfrac{\partial}{\partial x}[xy(x+y+2z)] = y(2x+y+2z)$

$\therefore$ $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$.

同理可得： $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = x(x+2y+2z)$

由此证得场u是有势场.

例1.9 用高斯公式（或任何其它方法）

$\iiint\limits_V \nabla\cdot \mathbf{A}\,dv = \iint\limits_s \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\,ds$ 证明下列公式：

$\iiint\limits_V \nabla\times \mathbf{A}\,dv = \iint\limits_s \mathbf{n}\times\mathbf{A}\,ds$，其中$S$是体积$V$的包围，n 为$s$上外法线方向的单位矢量. （北京大学）.

证 设$\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\iiint_v \nabla \times \mathbf{A} dv = \iiint_v \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] dv$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R\cos\beta - Q\cos\gamma)\mathbf{i} + (P\cos\gamma - R\cos\alpha)\mathbf{j} + (Q\cos\alpha - P\cos\beta)\mathbf{k}$$

$$\iint_s \mathbf{n} \times \mathbf{A} ds = \iint_s [(R\cos\beta - Q\cos\gamma)\mathbf{i} + (P\cos\gamma - R\cos\alpha)\mathbf{j} + (Q\cos\alpha - P\cos\beta)\mathbf{k}] ds$$

$$= \iint_s [(R dx dz - Q dx dy)\mathbf{i} + (P dx dy - R dy dz)\mathbf{j} + (Q dy dz - P dx dz)\mathbf{k}]$$

$$= \iiint_v \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}\right.$$