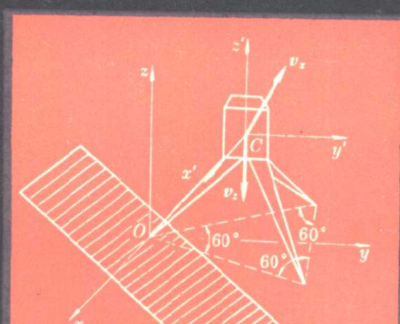
理论力学教学参考丛书

分析力学

浙江大学　汪家训　编



高等教育出版社

理论力学教学参考丛书

分析力学

浙江大学 汪家訸 编

高等教育出版社

内容提要

本书是《理论力学教学参考丛书》的一册。

《理论力学教学参考丛书》是为了满足高等学校工科理论力学课程的教学需要而编写的，结合理论力学教材中的某些专题或内容加深加宽，作了进一步的阐述。这套教学参考丛书可作为理论力学教材的补充，供有关专业的大学生、研究生和教师在教学中参考选用。

本书内容包括：分析力学的基本概念和基本原理、分析力学的基本方程、力学的变分原理、对于求解动力学方程有关的分析力学知识和附录等。书末并附有习题。

本书由西安矿业学院钟奉俄同志、清华大学万嘉镄同志审阅，并由北京航空学院黄克累同志复审。

理论力学教学参考丛书

分析力学

浙江大学 汪家诛 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

崇明大同红卫印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张8.375字数203,000

1982年9月第1版 1983年11月第1次印刷

印数 00,001—14,300

书号 15010·0454 定价 1.30 元

序

用典型的例题来说明分析力学的各原则的用法，是能够帮助我们理解和掌握这些原则的。由此可以训练我们如何使用这些原则，来解决科学和工程上有关的力学问题。作者在编写本书时尽可能在这方面作了努力。但限于篇幅，这种尝试只表现在前二篇。为了使读者多看到一些例题，除了是既典型又重要的例题，本书所选例题尽可能不与以往国内有关的力学书中的例题重复。

以前作者所编的《分析动力学》，在导出了一个力学问题的动力学方程以后，认为已经化成数学问题，往往不再继续求解了。这次采取了不同的方式，不但继续求解，而且进行了适当的讨论。

本书涉及的理论力学中非有关分析力学的知识，如果读者需要，可以参看其它有关的书籍。此外，除了分析力学的基本理论以外，作者不再重复其它书中有关分析力学的内容，以让这些书继续挥发它们的作用。

限于编者水平，错漏之处请读者指正。

汪家訸

一九八〇年七月

目　录

第 三 篇
力学的变分原理

第 四 篇
对于求解动力学方程有关的分析力学知识

绪　论

一、分析力学研究的对象

分析力学研究的对象是质点系力学。质点的个数 n 可以是任何正整数，自 $n=1$ 到 $n=\infty$。所以分析力学研究的对象也包括质点力学和刚体力学。例如，导弹的飞行路线，人造卫星的运行，月球探测器的飞往月球等问题，属于质点动力学的范围，需要用分析力学作为基础进行研究。又如回转仪的运动，属于刚体定点旋转和刚体群的运动，也需要用分析力学进行研究。近代把分析力学的研究方法扩充到研究流体力学和固体力学，而形成连续介质分析力学。

分析力学的方法也可用于电动力学、统计力学和相对力学的研究。虽然分析力学属于古典力学的范畴，但是它在早期原子物理学中的应用有它光辉的历史。例如卢瑟福(Rutherford)用 α 射线冲击金属片的散射理论确定了原子核的存在和原子序数。又如索末菲(Sommerfield)用分析力学的理论扩充了玻尔(Bohr)的氢原子模型到椭圆轨道，为以后用量子力学研究光谱理论和原子构造开辟了道路。就是对量子力学的内容而言，也需要有分析力学的基本知识才容易理解。例如薛定谔(Schrödinger)波动方程就是应用分析力学的哈密顿(Hamilton)-雅科毕(Jacobi)方程，以算符代换而得到的。

对于工程上的力学问题，分析力学的方法是解题的重要的基础工具，缺少了分析力学的知识，对于复杂和困难的力学问题将无法处理。

二、分析力学的研究任务

分析力学虽然是一门成熟的经典科学，可是还没有统一的涵

义，与理论力学的界线和分工也不明确。国内以前出版的理论力学，有的附有部分分析力学的内容，但是内容较少，也不深入。限于篇幅，本书也只能把分析力学的主要内容，作一扼要的介绍。

对于介绍如力、动量、动能等各力学量的物理概念，这是理论力学的任务，读者早已掌握这方面的知识，因而不再重复。

分析力学的正式创立，可以从 1788 年拉格朗日(Lagrange)出版的《分析力学》(Mécanique Analytique) 开始。他引进了广义坐标的概念，得到了力学上最重要的动力学方程。随后 1834 年哈密顿引入了广义动量的概念，建立了另一套形式完整的力学系统的方程——正则方程(Canonic equation)。

完整系统和非完整系统的区别是无线电波的发现者赫兹(Hertz)在 1894 年首先提出的。适用于非完整系统的动力学方程是吉普斯(Gibbs)首先在 1879 年得到的，不过在当时力学界尚不理解他的研究的重要性。1896 年阿佩尔(Appell)在他的著作《理性力学》(Me'canique rationnelle) 中重新得出了这个方程，随后他自己发现这个方程存在严重错误，在 1904 年再版时他改正了这些错误。这种动力学方程应该称为吉普斯-阿佩尔方程，但大多数分析力学书上称为阿佩尔方程。

1834 年哈密顿得到了以偏微分方程形式出现的动力学方程，不过这个方程能应用于求解动力学问题的完整理论是 1837 年雅科毕得到的，因此合称哈密顿-雅科毕方程。

建立求解动力学问题的动力学方程是分析力学的首要任务，本书第二编集中讨论各种动力学方程的建立问题，并以典型的例题说明它们的应用。

本书第三编的内容是力学的变分原理的讨论，例如哈密顿原理、高斯(Gauss)最小约束原理、赫兹最小曲率原理等。

动力学方程建立以后，接着就是求解动力学方程的问题，或寻

求与求解动力学方程这个目标靠近的一切有关理论。例如:

(1) 探求可以施行分离变量法的动力学方程应该具有的数学形式;

(2) 寻找一个动力学方程的运动积分,以便利用它来降阶;

(3) 研究变换理论,以将动力学方程变换成易于求解的新动力学方程;

(4) 寻求变换的不变式,这种不变式有助于研究力学系统的运动性质。

本书内容的安排,有优点,也有缺点。优点是对分析力学中最主要的内容分工相当明确,缺点是叙述的逻辑顺序较难安排,各种理论之间的相互联系减弱。

对于适用于同一个力学系统的力学原则和方程必然是可以相互推导的。例如由适用于保守系统的哈密顿变分原理可以导出拉格朗日方程,反之,也可以由拉格朗日方程导出哈密顿变分原理。本书只取其引出的一种,以节省篇幅。同样,对于同一个力学系统的运动积分,当然也一定可以由它所适用的各种方程导出。例如能量积分、广义动量积分,既可以由拉格朗日方程导出,也可以由哈密顿方程导出。本书也只取其一。

分析力学的基本方法和原则对于研究刚体力学、振动理论、运动稳定性理论、回转仪和天体力学等是必需的基本知识,这些专题的研究反过来又丰富了分析力学的内容,本书对这些专题只作为例题附带地讲到一些,详细的内容另有专书讨论。

力学中的定理是对于某种力学系统在某种条件下可从定律用逻辑推导的自然规律,如果在讨论分析力学的原则时需要的话将顺便提出,但不作为主要内容列入。

第一篇　分析力学的基本概念和基本原理

第一章　分析力学的一些基本概念

§ 1-1　自由系统和非自由系统·约束及其分类

质点系可分为自由系统和非自由系统。例如太阳系中各星体，恒星系，大气中的气体等都是自由系统。各种机器的机件，建筑物的梁和柱等物体都有其它物体在它的周围限制它的运动，这种限制称为约束 (Constraint)，被约束着的力学系统称为非自由系统。

对于刚体来说，它的内部各点也可看成有相互约束，使任何两点间的距离保持不变，这是使刚体在受力和运动过程中保持形状和大小不变的基本条件。

力学系统的约束是通过约束力来起作用的。约束力都是未知力，这些约束力只有当被研究的力学系统的运动情况掌握以后，才能进一步求出它们的大小。非自由系统的牛顿运动方程既然包含了未知的约束力，这样，这些约束力似乎使我们陷入了困境。但是，有不少约束往往可用简单的数学方程来描述。这样的方程称为约束方程。有了这些方程我们就能解脱未知约束力所造成的困难。关于约束方程的建立，可举例如下：

(1) 一个质量为m的质点，用长为l、质量可略去的细刚杆铰

接于 O 点，如图 1-1 所示。这时质点的约束方程可写为

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \tag{a}$$

如果将刚杆改为柔软的细绳，则约束方程可写为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant l^2 \tag{b}$$

对于前者，质点既不能进入半径为 l 的球内，又不能脱离球面而外出，所以称为双面约束。对于后者，质点虽然不能脱离半径为 l 的球面外出，但允许质点进入球内，所以质点只受到单方面的约束，称为单面约束。当我们求解力学问题的时候，需要的是约束方程，而不是不等式。当质点所受到的约束虽然是单面的，但是当它仍保留在这约束面上的时候，其约束方程仍可用式(a)表示。如果质点已脱离约束面，那时质点的运动已经与这种约束没有关系，而这个约束方程可以放弃不用。所以今后应用约束方程时不再对这两种情况加以区别，不过要注意将脱离的临界位置。

属于用细线悬挂质点的力学问题如单摆和证明地球自转的傅科(Foucault)摆。

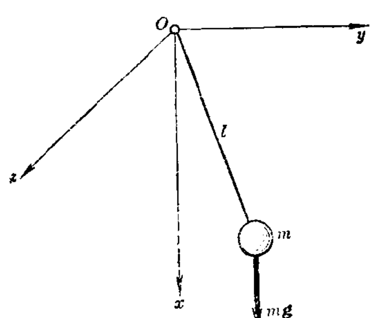


图 1-1

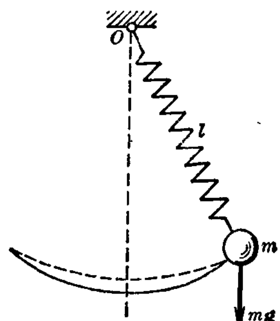


图 1-2

如果将细线换成质量与 m 相比为可略的弹簧，其弹簧常数为 k，如图 1-2 所示。那么，我们无法写出如式(a)那样的约束方程。这样，力学问题就复杂得多了。

(2) 质量为 m_1 和 m_2 的两个质点，以长为 l、质量为可略的刚

性直杆连接，如图 1-3 所示。约束方程可写为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2 \tag{c}$$

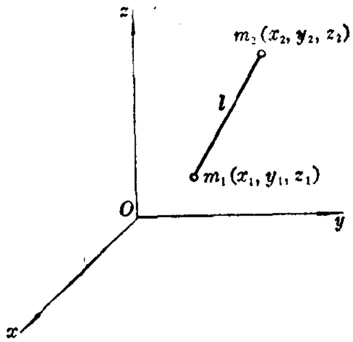


图 1-3

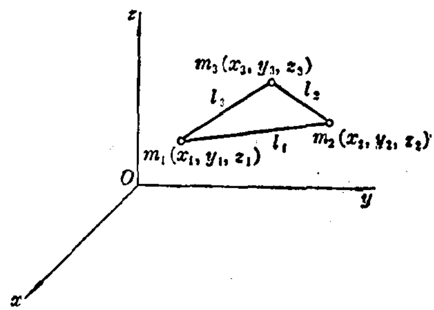


图 1-4

(3) 质量为 m_1、m_2 和 m_3 的三个质点，以长为 l_1、l_2 和 l_3 的三根细刚杆连接，如图 1-4 所示。约束方程为:

$$\left.\begin{aligned}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l_1^2\\(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=l_2^2\\(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=l_3^2\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

(4) 质点 m 约束在光滑曲面上，曲面方程为

$$\varphi(x, y, z)=0 \tag{e}$$

则上式就是约束方程。

以上各约束方程都是质点坐标的函数，属于下列类型:

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots; x_n, y_n, z_n)=0 \tag{1-1a}$$

其中 x_1、y_1、z_1; x_2、y_2、z_2, …, x_n、y_n、z_n 分别为质点 m_1、m_2、…、m_n 的坐标①。为了简便起见，现在改用统一符号 x 来表示。将 x_1、y_1、z_1, x_2、y_2、z_2, …, x_n、y_n、z_n 改写为 x_1、x_2、x_3, x_4、x_5、x_6, … x_{3n-2}、x_{3n-1}、x_{3n}, 这样式(1-1a)可改写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{3n})=0 \tag{1-1b}$$

① 以后在本书中，n 表示质点系的质点个数。

如把 x_1、x_2、…、x_{3n} 看成为 $3n$ 维空间的矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，则上式又可简写为

$$f(\boldsymbol{x})=0 \tag{1-1c}$$

属于式(1-1)类型的约束称为几何约束 (Geometric constraint)。

有些力学问题的约束方程除了包含质点的坐标以外，还明显地包含时间 t，这样的约束方程可写为

$$f(t, x_1, x_2, \cdots, x_{3n})=0 \tag{1-2a}$$

或

$$f(t, \boldsymbol{x})=0 \tag{1-2b}$$

例如约束曲面在空间运动，或约束面随时间 t 而发生变化，都属于这种约束。这种含时间的几何约束称为含时几何约束或可简称为含时约束 (Time dependent constraint)。几何约束是含时几何约束的特殊情况，因此今后只提含时约束时，就意味着也可以包含若干几何约束，甚至全部都是几何约束时的结论也必成立。

(5) 在等速运动中的火车里的倾斜桌面上放置的质点，其相对于固定于地面的坐标系的约束方程可写为

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0$$

其中 A、B、C、D 和 E 都是常量，D 的量纲与速度相同，与 A、B、C 等不同，上式就是约束面运动的类型。

(6) 一个质点约束在膨胀着的气球上，这时气球的半径 R 为时间 t 的函数，可写成 $R(t)$，则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=R(t)^2$$

应该认识到这些约束方程必须在求解运动微分方程以前就能够写出来，约束方程本身不受被约束物体运动的影响。

设有一小三棱柱 A 放在光滑的大三棱柱 B 上，而大三棱柱又放在光滑的水平面上，如图 1-5 所示。此时 A 受重力作用而下滑时，必然推动 B 向反方向运动。B 的运动受 A 的影响。在这种

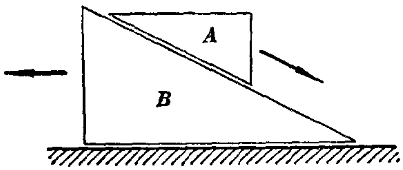


图 1-5

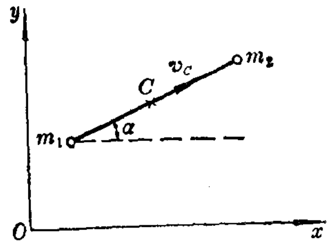


图 1-6

情况下，大三棱柱B的运动，其约束不能作为含时约束来处理。

（7）两质点以刚性杆连接，杆长为l，在(x, y)平面内运动，约束条件是杆的中点速度始终沿杆向，如图 1-6 所示。几何约束方程有三个如下：

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

中点C的坐标为$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，所以中点$C$的速度$v_c$的分量可写为$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}, \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}$。因中点速度的方向角为 $\mathrm{tg}\alpha$，故有约束方程

$$\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\dot{x}_1 + \dot{x}_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

或

$$(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_1 - x_2) = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_1 - y_2) \tag{1-3a}$$

上面的约束方程包含质点的速度，因此称为运动约束（Kinematic constraint）。因式(1-3a)可改写为

$$(dy_1 + dy_2)(x_2 - x_1) = (dx_1 + dx_2)(y_2 - y_1) \tag{1-3b}$$

所以又称微分约束（Differential constraint）。

一般运动约束可写为

$$f(t, x, \dot{x})=0 \tag{1-4}$$

从式(1-3)可看出，我们无法将它单独积分出来。以后我们将讨论这个例题如何与动力学方程联合求解的问题。象式(1-3)那样包含速度而又不能积分的约束，称为非完整约束(Nonholonomic constraint)。当它能不依赖动力学方程而可以单独积分成含时约束或几何约束时，称为完整约束(Holonomic constraint)。

§1-2 广义坐标和自由度

1. 自由系统

如果我们研究的是自由系统，每一个质点在空间的位置由(x, y, z)三个坐标来决定，那么n个质点的自由系统，需要$3n$个坐标来描述。如果不利用由运动微分方程得到的积分——动量积分、动量矩积分、能量积分和质心运动定理等，那么我们无法减少这$3n$个独立变数。

现在设这$N(=3n)$个变数x_1、x_2、…、x_N可用任何其它N个独立变数q_1、q_2、…、q_N来表示：

$$x_i=f_i(q_1、q_2、\cdots、q_N) \qquad (i=1、2、\cdots、N) \tag{1-5}$$

由于这个力学系统是自由系统，N个x_i之间必须不能有任何关系存在，因此这N个函数f_i是相互独立的，也不能存在任何关系。在数学上要求下面的雅科毕式不为0：

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_N)}{\partial(q_1, q_2, \cdots, q_N)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_N} & \frac{\partial x_2}{\partial q_N} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_N} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-6}$$

上式是N个变量q_1、q_2、…、q_N不存在任何关系的充要条件。我们