面向21世纪课程教材

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

理论力学简明教程

陈世民

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．全书以经典力学传统内容为基础，并较好地融合了该学科内容的最新进展及计算机技术和计算方法；书中丰富的例题和习题紧扣实际应用的需要，例题后附有“评注”，将有助于拓宽和启发学生的解题思路，以灵活地运用理论力学知识．全书包括6章：牛顿力学的基本原理、有心运动与两体问题、非惯性参考系、质点组动力学、刚体力学、分析力学，书中小字排印部分可以供多学时教学的选用．

本书适宜作为物理类专业课程教材，也可供有关专业的学生和教师参考．

图书在版编目(CIP)数据

理论力学简明教程/陈世民．—北京：高等教育出版社，2001.12

ISBN 7-04-010153-X

Ⅰ．理…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．理论力学-高等学校-教材　Ⅳ．O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第050277号

理论力学简明教程

陈世民

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京地质印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2001年12月第1版
印　　张	15.75	印　　次	2001年12月第1次印刷
字　　数	280 000	定　　价	13.70元

前言

理论力学是一门应用广泛的基础课程.不仅物理专业的学生必读,对于工程技术专业的学生而言,理论力学也是不可缺少的知识.为了适应当前社会经济发展的需要,高等学校中创建了许多新型应用物理专业.由于各专业特点不同,对理论力学课程的要求也有较大的差别.本教程就是为适应这一新的情况而编写的.

当今,科学技术突飞猛进,新知识大量涌现,物理学本身也在某些方面有了重大进展.为了适应新的形势,需要对课程内容作必要的调整,删繁就简;某些学科的新进展和新知识在教材中需要有一定的反映,教材内容才能相应地得以充实.这正是作者编写本教程时试图贯彻的精神.

介绍、推演和总结物理学的基本规律是理论物理课程的主要目标.在理论物理的教科书中,不可避免地会出现众多纷繁的数学公式,这给初学者带来困扰,理论力学也不例外.本教程强调基本理论,注重从最基本的理论出发引导读者掌握物体各种机械运动形态下的具体规律.本教程较多地强调了势能函数作为稳定性问题判据的重要性,质点运动的平衡、有心力场中圆轨道运动的稳定性和刚体定点运动的稳定性问题,都以它作为判据.考虑到读者对力学已有一定的基础,在教程中我们并不特别注重理论内容和形式上的系统性.例如很早就用到角速度矢量,虽然它的严格定义在后面刚体力学中才给出.对于部分难点我们尽可能地采用直观形象的讲述方法.例如,对科里奥利力的讲解采用了图解方法;对于刚体定点运动的表述也力求直观.

非线性力学系统的动力学,是近些年蓬勃发展起来的新学科,它对物理学以至其他许多学科的发展,都有巨大的推动作用.非线性动力学的研究赋予古老的经典力学新的活力,对此本教程也给予一定的反映,教程中指出,在非线性力学系统的运动中,普遍存在着有序、分岔和混沌现象,作为例子,介绍了“埃农－黑尔斯(Hénon－Heiles)问题”的计算研究结果.我们希望读者能感受到经典力学中存在着的无序或混沌现象.力学系统中的混沌现象是决定论下无序运动的结果,它与统计物理中的概率不确定性有着本质的区别,力学运动的确定性中存在无序行为,而无序中却又包含着有序的特点.KAM 定理则是对此作出证实的最重要进展,本教程的最后一节将初步介绍这方面的内容.

当今科学技术的发展已进入了计算机时代,单纯依靠人的脑力和解析数学

的时代似乎已经过去，理论物理自身的发展也是如此．我们相信以后在相关的教科书中将逐步引入计算方法和技术，以及计算机技术所带来的其他优秀成果．为此，我们尝试着利用计算机对有心力问题和埃农－黑尔斯问题进行了计算，在附录B和附录C中分别介绍了常微分方程初值问题的数值计算方法，并附有有心力问题的计算程序，这部分内容可作为读者的参考材料，有兴趣的读者也可以在课外上机计算（如果需要，作者可提供源程序软件）．随着计算机的逐步普及，我们相信学生已经有条件这样做了．在这里，我们只是抛砖引玉而已．

不同的应用类物理专业，对理论力学内容的要求不同，安排的教学课时数就有很大差异，从36学时至72学时不等．为此，在本教程中，一些内容用小号字排版，可供选用．有些较为具体的力学问题，例如质点力学中的振动问题、抛体和约束运动问题，质点组中的撞击问题以及拉莫尔进动等，则以例题的形式编写．这都是为了适应各专业不同的讲课学时的需要，以方便教师更为灵活地选取讲授内容．没有讲授的部分则可作为读者的课外阅读材料．教程中还安排了较多的例题，求解步骤一般都较详尽，以便读者自阅．大多数例题后面附有“评注”，以帮助读者更好地理解本例题的意图、解题的各种可能途径以及其他应注意的地方．

每章的公式及插图都独立编号，例题和习题的插图在编号前分别加有字母L和T.

本书的初稿完成于1997年底．此后在内容安排和文字上进行了少量调整和修改．此书得以出版，除得到了教育部和高等教育出版社的支持外，还得到了复旦大学贾起民教授、南京大学柯善哲教授的支持和鼓励．此外，对卢德馨教授、朱沛臣教授的支持及董洪光同志富有效率的工作，表示诚挚的谢意！

由于作者水平有限，书中疏漏和错误之处在所难免，敬请读者批评指正．

陈世民

1999年1月于南京大学

责任编辑　董洪光
封面设计　张　楠
责任绘图　郝　林
版式设计　马静如
责任校对　尤　静
责任印制　宋克学

目　　录

绪　论

理论力学是研究物体机械运动基本规律的科学.所谓机械运动,是指物体在空间的相对位置随时间变化的一种运动形态,它是一种最简单最基本的物质运动形态,各种复杂的、高级的运动形态都包含有这种基本的运动形态.

力学是最早发展起来的学科之一.早在古代,人们在日常生活和生产中就已经积累了许多关于物体机械运动的知识.17 世纪末,牛顿(I. Newton)在前人工作的基础上总结出了物体运动的三个基本定律.这三个著名的牛顿定律,奠定了力学的理论基础.微积分等数学工具的发展和广泛应用有力地推动了力学学科的发展.18 世纪后,拉格朗日(J. L. Lagrange)、哈密顿(W. I. Hamilton)等人又发展了"分析力学".分析力学使力学规律具有更严密的数学基础,而且力学问题可以完全用严格的解析数学方法来处理,在风格上分析力学则与具有较强矢量特征的牛顿力学很不相同.分析力学对物理学的发展起着重要的推动作用,在理论物理中占有重要的地位.由于分析力学理论形式简洁且富有公理特性,很容易将它推广应用到其他学科中去.

理论力学又称"古典力学"或"经典力学",以区别于 20 世纪初发展起来的更深层次上的动力学理论和时空理论.经典力学中所描述的物体运动,是指物体的尺度与原子、分子相比大得多的宏观物体的运动,与原子尺度可以相比的微观物体的运动则遵循量子力学的规律.虽然在量子力学中有许多物理量依然沿用经典力学中的概念,然而经典力学和量子力学则分别适宜于描述不同尺度范围内的物体运动的规律.此外,经典力学也仅适用于物体的运动速度远小于光速的情形.速度与光速可以比拟的物体的运动则必须考虑爱因斯坦(A. Einstein)的相对论效应,需由建立在新的时空观念上的相对论力学来处理.尽管如此,经典力学依然是不可取代的.对于尺度远大于原子、速度远小于光速的物体的运动,运用新理论得到的结果与经典力学的结果完全一致.这便证实了经典力学在其适用的物体尺度和运动速度范围内的正确性.在数学处理上经典力学远比新理论简单,从而才有可能对许多宏观低速运动物体的力学问题进行求解.

近两个世纪前经典力学已发展成一门理论严谨、体系完整的学科,用它来处理大至天体、小到尘埃的各种物体运动,都能得出与实际完美符合的结果.然而,刚过去的 100 年中,物理学发生了三次伟大革命,恰恰都涉及了经典力学的基础.如前所述,20 世纪初建立的相对论,否定了牛顿学说的绝对时空观念;20 世

纪 20 年代发展的量子力学则破除了经典力学中物体位置和动量的同时可精确测量原则；到 20 世纪中叶，随着非线性系统研究的开展，力学系统混沌行为的揭示逐渐动摇了经典力学的决定论思维方式. 这启示人们，即使象经典力学这样成熟的物理学科，其背后也潜藏着活力.

物理学中存在着两种典型的思维方法，一是以经典力学为代表的“确定论”思维方式；另一种则是“概率论”思维方式，这是以统计物理学为代表的，量子力学也可以包括在内. 经典力学之所以成为确定论思维方式的代表，是出于多种原因，特别是数学和计算工具的限制，长期以来人们主要用它来处理一些较为简单的可积分的力学问题，在力学教科书中甚至只讲述一些可解的问题. 对于这类可积分问题，给定了外部条件后力学系统的运动完全由初始条件确定，即下一时刻系统的运动状态完全由这一时刻的运动状态确定，而且是可逆的. 这就是说，所描述的物体的运动主要是周期的、有序的机械运动. 这便给人们造成了这样的概念：经典力学是物理学中“确定论”思维方式的典范. 然而早在 20 世纪 20 年代，著名数学家庞加莱(H. Poincaré)①以及爱因斯坦等人② 就曾指出经典力学系统也存在着“无序”或“混沌”的领域，当时却没有引起物理学家们的注意. 随着电子计算机的出现，计算工具有了革命性的改革. 从 40 年代开始，物理学家们逐渐对非线性力学系统的研究重视起来. 特别是在 60 年代，气象物理学家洛伦兹(E. Lorenz)采用计算方法计算了他设计的大气模型，发现了令人惊奇的现象：计算结果对于初始条件十分敏感，从而提出所谓“蝴蝶效应”. 此后的许多学者对非线性力学系统进行了研究，充分展示了某些力学系统的行为从有序向混沌转变的特性，以及力学系统运动的混沌特性的重要意义. 这些研究成果对物理学的进展起着巨大的推动作用，也给古老的经典力学增添了新的活力. 现在对非线性系统的研究已超越了力学学科，扩展到物理学的各个领域，甚至已超越了物理学，而成为许多理工学科以至一些人文学科的共同课题. 对非线性系统的研究正逐步形成一门崭新的学科.

理论力学作为理论物理学的第一门课程，它的任务不仅是介绍物体的机械运动规律，还要引导读者如何应用数学去描写和分析物理问题. 作为科学，就必须使用最严谨的方式去表达，去描写，去推演，去总结自然规律. 在众多的表达方式中数学是最为严谨的工具. 我国古代的科学技术居于世界前列，但是大多停留在语言或文字的表达方式(歌诀)上，以致未能很好地总结并发展为严格的理论.

---

① H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste, Gauthier - villars, Paries(1892); Dover Press(1957); (??) N. A. S. A. Translation TT F - *450/452*, U. S. Fed. Clearinghouse, Springfield, VA, U. S. A. (1967)

② A. Einstein, Zum Quantensatz von sommerfield und Epstein, Verh. Deut. Phys. Ges. 1917(19): 82

理论力学课程中最常用的数学工具是坐标系、矢量代数、微积分和常微分方程，读者通过对本课程的学习应该能熟练地应用这些数学工具去描述物体的机械运动.

第一章　牛顿力学的基本原理

人们对机械运动的理论探讨，首先从对质点运动的研究开始. 三百多年前，牛顿便在前人工作的基础上总结出质点运动的三条定律，从而奠定了牛顿力学的基础. 本章首先讨论如何描写质点的运动，如何以牛顿定律为基础讨论质点动力学问题，并由此引入基本的动力学量.

§1.1　质点运动的描写

物体具有一定的质量、大小和形状. 它的运动一般来说比较复杂，研究起来也较为困难. 为研究方便，我们需要从比较简单的情形入手. 一定大小的物体是由无数具有质量的微小客体组成的. 从微观角度看，虽然这些微小客体仍然具有一定的体积且包含有大量的微观粒子，但在宏观上可以不考虑它的大小和形状，而将其抽象为具有质量的几何点——**质点**. 在有些实际问题中，物体的运动范围比物体本身的尺度要大得多，而且它的形状和大小与问题无关或关系甚小，那么这样的物体也可以作为质点来处理. 例如，地球虽然是一个庞大的物体，但在它围绕太阳作轨道运动时便可以把它当作质点看待. 由于质点没有大小和形状，描述它的运动比较简单，因此我们首先讨论质点的运动.

（一）参考系和坐标系

要研究物体在空间的运动，首先就必须确定物体在空间的位置. 在茫茫宇宙中，物体的位置只能相对于某一参考物来确定. 参考物又称**参考系**，由特定的一个或多个物体构成. 例如，通常以太阳为参考物来确定地球和其他行星的位置，研究地面上物体的运动则常以地球为参考物.

选定了参考物后，还要在它上面建立适当的坐标系才能具体地表达物体相对于参考物的位置. 对于三维空间，常用的有直角坐标系、柱坐标系和球坐标系；二维情形时，还常用到平面极坐标系. 有时可能更适宜用自然坐标系来描写质点的运动，自然坐标系也称为“内禀坐标系”.

确定一质点的位置，不仅需要知道它相对于参考物的距离，还要知道它相对于参考物的方位. 很显然，在坐标系中用矢量来表示质点的位置是最为适宜的. 如图 1.1，质点 P 的位置可由坐标原点 O 至 P 点的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示. 这个矢量称为

质点 P 的位置矢量，简称**位矢**或**径矢**. 在各种坐标系中位矢的表达式分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} && \cdots\cdots \text{直角坐标系} \\ &= \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z && \cdots\cdots \text{柱坐标系} \quad (1.1) \\ &= r\boldsymbol{e}_r && \cdots\cdots \text{球坐标系} \end{aligned}$$

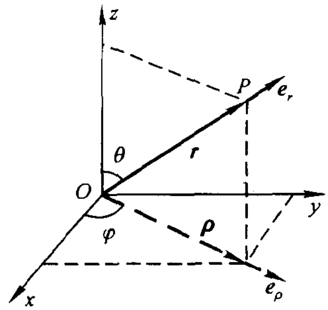

图 1.1

位矢的长度为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = r$$

r 是质点 P 离开 O 点的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 表示径矢 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位矢量(单位矢量是长度为 1 的矢量)，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 习惯上分别用来表示 x、y 和 z 坐标轴方向上的单位矢量.

采用坐标系不仅可以把矢量表达得很明确，而且便于进行运算. 但必须指出，坐标系与参考系在概念上是有一定区别的. 前者主要用作度量空间的数学工具，后者则是物理上实在的物体，物体的运动是以参考物为标准的. 虽然在许多情况下采用完全固定在参考物上的坐标系，这时坐标系本身就成为参考物的一部分，可视为参考物的一种数学抽象. 但是也常选取不固定在参考物上的活动坐标系，同样可用它来表达物体相对于该参考物的位置和运动. 事实上，极坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系都不是固定在参考物上的.

(二) 质点的运动轨道　速度和加速度

质点运动时其位置矢量随时间变化，位移矢量是时间 t 的函数，即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，它直接描绘出质点的运动轨道. 在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

或写成标量方程形式:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

这是以时间 t 为参数的轨道方程，消去参数 t 便得到质点运动的轨道曲线方程. 例如，对上面三个以时间 t 为参量的参量方程，分别消去 t 便得到方程组:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(y, z) = 0 \end{cases}$$

这是两个空间曲面的交线，也即质点的轨道曲线方程. 有时可以不用时间 t 做参量，而用其他与时间相关的量做参量. 例如，

$$\boldsymbol{r}(\theta) = x(\theta)\boldsymbol{i} + y(\theta)\boldsymbol{j} + z(\theta)\boldsymbol{k}$$

其中 θ 是时间 t 的函数，即 $\theta = \theta(t)$，$\boldsymbol{r}(\theta)$是时间 t 的隐函数.

如图 1.2 所示，质点沿轨道运动，设在 t 时刻质点位于 P_1 点，在 $t + \Delta t$ 时刻到达 P_2 位置. P_1、P_2 两点的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t + \Delta t)$，两位

矢的矢量差

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$
$$=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

称为质点在 Δt 时间内的**位移**，显然位移也是矢量，称**位移矢量**. 由图可知，位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小即是 P_1、P_2 两点间轨道弦的长度. 而 P_1、P_2 两点间轨道的弧长 Δs 则称质点在 Δt 时间内沿轨道运动的路程. 路程是标量，与质点的位移有着明显的区别.

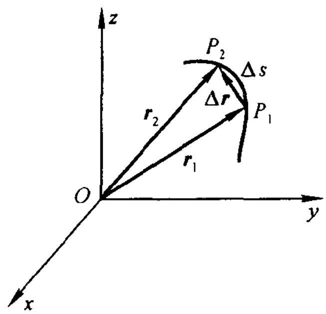

图 1.2

在有限的 Δt 时间间隔内，质点的位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与时间间隔 Δt 的比率，称为在 Δt 时间内质点的**平均速度**. 当 $\Delta t\to 0$ 时，这一比率的极限给出 t 时刻质点的**瞬时速度**，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.2}$$

平均速度只给出了有限的 Δt 时间内质点的平均运动情况，瞬时速度才描述了 t 时刻质点的真实运动. 今后除非特别说明，所指的速度都是指瞬时速度. 速度是位置矢量随时间的变化率，故速度是矢量. 由图 1.2 容易看出，当 $\Delta t\to 0$ 时 P_1、P_2 两点无限靠近，质点位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向便与质点所在位置的轨道切线方向一致，而且两点间轨道的弦长和弧长趋于相等，即 $|\Delta\boldsymbol{r}|\to\Delta s$. 这表明任意时刻质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 总是沿着质点所在位置轨道的切线方向；速度的大小等于路程随时间的变化率，称为速率，用 v 表示，即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

质点作变速运动时，速度也是时间 t 的函数，即 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$. 若质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内速度的改变为 $\Delta\boldsymbol{v}$，则矢量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与时间间隔 Δt 的比率在 $\Delta t\to 0$ 时的极限，叫做质点在 t 时刻的**瞬时加速度**，简称**加速度**，以 $\boldsymbol{a}$ 表示：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}} \tag{1.4}$$

加速度是速度的时间变化率，也是矢量.

位置矢量、速度和加速度是描写质点运动的最基本的物理量；公式(1.1)、(1.2)和(1.4)则是质点运动学理论的基础. 今后我们会看到，质点在任何情形下运动时，不管用什么方式描述，质点的位矢、速度和加速度的表示式都是从这三个基本公式出发的，各种具体的表示式只是这三个公式在不同的描述方式下的推演.

为便于描述，常需采用各种不同的坐标系来描写质点的运动. 在不同的坐标系中，位矢、速度和加速度有着不同的表示形式，下面我们就几种常用的坐标系

分别写出它们的坐标表示式.

1. 直角坐标系

在直角坐标系中,质点位置矢量的表达式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

这里位矢在三个坐标轴方向的分量就是质点位置的坐标 x、y、z,一般来说,质点运动时它们都是时间 t 的函数.对于固定的直角坐标系,坐标轴的方向是固定的,单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不是时间 t 的函数.分别由公式(1.2)及(1.4)得

质点速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}\\&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.6}$$

各速度分量为

$$v_x=\dot{x},\quad v_y=\dot{y},\quad v_z=\dot{z}$$

速度大小(速率)为

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\\&=\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

质点加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{1.7}$$

各加速度分量为

$$a_x=\ddot{x},\quad a_y=\ddot{y},\quad a_z=\ddot{z}$$

加速度大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

2. 平面极坐标系

在平面极坐标系中,质点位置矢量的表达式为

$$\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{e}_r \tag{1.8}$$

这里不仅位矢的大小随时间变化,极坐标轴的方向也随质点运动而变化,它也是时间 t 的函数,即 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_r(t)$,$\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\theta(t)$.由(1.2)式,质点速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

式中右方第一项沿径矢方向,只要知道径矢长度随时间变化的函数关系 $\dot{r}$,就不难求出;第二项则包含单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 对时间 t 的导数项.虽然 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向随时间改变,但总是保持单位长度不变.如图 1.3(a)所示,当质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内沿

质点轨道从P点运动到P'点时，位置矢量转过角度$\Delta\theta$，单位矢量e_r、e_θ也分别转过同样角度，改变为e'_r、e'_θ. 为了便于比较这两组单位矢量的差异，在图1.3(b)中把e'_r、e'_θ自P'点移动到P点，并作了放大. 由于e_r、e'_r的长度相等，都是1个单位，它们和Δe_r构成一等腰三角形. 当$\Delta t\to 0$时$\Delta\theta\to 0$，Δe_r将与e_r垂直，与e_θ方向一致. Δe_r的长度则趋于$\Delta\theta$所张开的单位圆弧长. 因此，

$$\Delta e_r \xrightarrow[\Delta\theta\to 0]{} 1\cdot\Delta\theta e_\theta = \Delta\theta e_\theta$$

在极限情形下，有

$$\frac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta e_\theta}{\Delta t} = \dot{\theta}\, e_\theta \tag{1.10a}$$

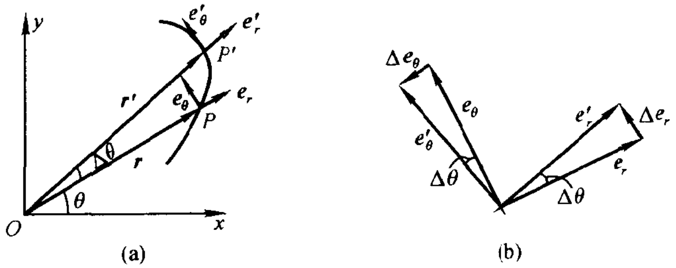

图 1.3

同样可以求出：

$$\frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e_\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta\theta e_r}{\Delta t} = -\dot{\theta}\, e_r \tag{1.10b}$$

这里出现“-”号是因为当$\Delta\theta\to 0$时，Δe_θ将趋向于与e_r相反的方向.

关系式(1.10a)和(1.10b)在今后的运算中经常用到，读者必须熟练掌握. 实际上它们可以用一个统一的公式表示. 为此，引进角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$[①]来描述极坐标轴绕坐标原点的转动；$\dot{\theta}$为角速度矢量的大小，它的方向则与极坐标轴转动的正方向成右手螺旋关系. 设角速度矢量方向的单位矢量为e_z(显然与极坐标平面垂直)，极坐标轴转动的角速度矢量可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\, e_z$$

依照两矢量的矢乘规则，(1.10a)式和(1.10b)式可分别写为

$$\frac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times e_r \tag{1.11a}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times e_\theta \tag{1.11b}$$

① 关于角速度是矢量的证明，将在第五章再作详细讨论.

今后我们还将看到,这样的表示式是具有普遍意义的:对任意保持长度不变的矢量(这里的 e_r 和 e_θ 都是长度恒定为 1 的矢量)都具有类似(1.11)式的关系[1].

现在我们回到(1.9)式,导出极坐标系下质点的速度表达式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ &= v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{1.12a}$$

其中

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{1.12b}$$

分别是质点速度的径向分量和横向分量.

平面极坐标下的加速度表示式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

用(1.10)所示的关系式代入上式,则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \\ &= a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

分别为质点加速度的径向分量和横向分量.

3. 柱坐标系

结合质点速度和加速度在直角坐标系极坐标系中的表达式,极易推广得到柱坐标系中质点的速度和加速度的表达式,只需分别在式(1.12)和式(1.13)中相应地加上 z 方向的分量即可,即

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.15}$$

4. 自然坐标系

质点的运动情况还可以用自然坐标系来描写,尤其是运动轨道已知时更为适宜.对于作平面运动的质点,它的自然坐标用 s 和 θ 两个参量来表示.这里 s 是质点自轨道上某一固定参考点 O 运动所经过的路程,θ 则是质点所在位置的轨道切线与某一固定方向(常用的是 x 轴方向)之间的夹角,如图 1.4 所示.平面自然坐标系有两个独立坐标轴方向,即质点所在位置的轨道切线方向和轨道的主法线方向.切线方向以单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 表示,并以质点的运动方向为正方向;主

① 见本节末的证明.