

QIAOLIANG
LIXUE

桥梁力学

铁道部第三勘测设计院
胡人礼 编著



中国铁道出版社

俊
东

铁路科技图书出版基金资助出版

桥 梁 力 学

铁道部第三勘测设计院

胡 人 礼 编著

中 国 铁 道 出 版 社

1999年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是作者在从事桥梁设计工作四十余年中经验总结的基础上撰写而成的。全书共分 26 章,阐述了桥梁力学涉及的力学中的理论力学、结构力学、材料力学、结构动力学、弹性理论、土力学和水力学等诸多分支。与桥梁设计关联甚密的桥梁结构静力学和桥梁结构动力学两大部分,亦是本书的重点部分;其余力学理论,则是以桥梁设计中经常遇到的问题为主线予以论述。这两者可谓本书的特色所在。书末的 15 个附录,是作者为考虑本书的完整性而搜集的,是不可欠缺的资料。

本书的出版,为发展我国的桥梁事业,为同行和在校师生提供一部集桥梁设计的力学计算较全面的理论性参考图书。

图书在版编目(CIP)数据

桥梁力学/胡人礼编著. -北京:中国铁道出版社,1999

ISBN 7-113-03084-X

I. 桥… I. 胡… III. 桥涵工程-结构力学 IV. U441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 22764 号

书 名:桥梁力学

著作责任者:铁道部第三勘测设计院 胡人礼 编著

出版·发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:王俊法

封面设计:陈东山

印 刷:北京市兴顺印刷厂

开 本:787×1092 1/16 印张:73.5 字数:1864 千

版 本:1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1~1000 册

书 号:ISBN 7-113-03084-X/TU·582

定 价:158.00 元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

前言

桥梁力学是指导桥梁设计的理论基础,桥梁建设的发展又是推动桥梁力学进步的基本动力。翻开桥梁建设的发展史,可以清楚地看到,桥梁建设的发展是随着人类文化和经济的发展而发展的。

据文献介绍,*我国早在古代就出现了梁式桥梁、拱式桥梁和悬索式桥梁,但由于受到当时建桥经验的限制,所建桥梁的跨度很小,形式也很简单。到了商代,于公元前 16 世纪至公元前 11 世纪,在现今河北曲周县附近建造了首次为历史所记载名为钜桥的桥梁。到了隋代,由于社会文化和经济的发展,于公元 595 年至公元 605 年之间,在河北赵县建成了净跨为 37.02m、矢高为 7.23m 的赵州石拱桥,或称赵州安济桥。到了金代,在河南开封出现了跨长约 18.5m、矢高约 4.2m 名为虹桥的木质桥梁。到了清代,于公元 1705 年至 1706 年,在四川建成净跨约 100m,由九根底索和两侧各有两根的栏杆索构成跨越大渡河的泸定铁索桥。解放后,由于我国国民经济和科学技术迅速发展,为了适应公路和铁路运输的需要,相继建造了许多具有当今国际先进水平的桥梁,如正桥长度为 1575m、最大跨度达 160m 的连续钢桁梁的南京长江大桥等。

国外桥梁也是随着文化、科学和经济的发展而发展的。**早在罗马时代就出现了用石料建成的梁式桥梁和拱式桥梁。到了 19 世纪,欧洲和美国逐渐采用木材和铸铁建造桥梁。后来由于铁路的出现,锻铁成了桥梁的建筑材料。19 世纪,英国采取铆钉接合建成了不列颠尼亚(Britannia)铁路锻铁管形桥和康卫(Conway)铁路锻铁管形桥。19 世纪后期,西欧和俄国出现了钢材,从而加速了桥梁建设的发展。

随着新型建筑材料不断地出现,建造较大跨度桥梁的可能性愈来愈大,加上桥上通过的荷载不断增长,因而促使人们加紧研究桥梁中的力学问题,这样便推进了桥梁力学的发展;反过来,由于桥梁力学研究的成果广泛为人们用来指导桥梁的设计,因此桥梁设计水平得到新的提高。尽管我国古代桥梁的建造主要是凭藉实践经验来实现的,但是就我国古代已建成的桥梁形式、构造和建筑材料的发展和演变来看,无疑我国古代建桥人员对桥梁中的力学概念是有深刻认识的,而且随着桥梁建设的发展,这种认识不断得到加深,只不过对桥梁力学的研究和认识没有作出系统的记录和完整的总结。近几个世纪国外桥梁的发展史也充分说明,桥梁建设的发展与力学的进步是紧密相联的,而且是互相促进的。

* 见《中国桥梁》,同济大学出版社、建筑与城市出版社出版,1993 年。

** 见 S·P·铁摩辛柯著,常振铎译. 材料力学史. 上海科学技术出版社出版,1961 年。

铁摩辛柯, S. P. (Stephen Prokofievitch Timoshenko) 为当代著名力学大师。1878 年 12 月 23 日出生于乌克兰, 1901 年毕业于俄国彼得堡交通道路学院。1907~1911 年任基辅工学院教授。1912~1917 年在彼得格勒一些学院任教授。1922 年起在美国从事力学研究。1928 年他建立了“美国机械工程师学会力学部”, 同年到密歇根大学任教授。1936 年起到斯坦福大学任应用力学教授达 20 年之久, 培养了不少研究生。1965 年退休, 迁居德国与其女儿团聚共度晚年。1972 年 5 月 29 日去世, 享年九十有三。铁摩辛柯的力学论著很多, 其中有《工程力学》、《结构学原理》、《材料力学》、《弹性力学》、《板壳理论》、《弹性稳定理论》、《工程中的振动问题》、《高等动力学》和《材料力学史》等在国际上影响很大的著作。他的著作以文字简练, 深入浅出、论述精辟、内容实用而闻名于世。

今天,人们已普遍认识到,要使桥梁建设不断在既有水平上得到提高和发展,就必须对桥梁力学作不断的研究;要使桥梁设计既能保证桥梁安全可靠又能满足节约建桥资金的要求,桥梁设计人员就应准确、熟练地掌握桥梁力学,以致能灵活、无误地解决桥梁设计中遇到的力学问题。

桥梁力学包括的内容非常广泛,通常认为可分为桥梁结构静力学、桥梁结构动力学、桥梁土力学和桥梁水力学四大部分。桥梁结构静力学主要包括结构静力力系的平衡分析、静定结构的分析、静不定结构的分析、结构强度的检算、结构稳定性的分析等。桥梁结构动力学主要包括桥梁固有振动特征的分析、车辆荷载作用下桥梁强迫振动的分析、风作用下桥梁振动的分析、地震作用下桥梁振动的分析等。桥梁土力学主要包括土对桥梁结构作用的土压力的求算、土与结构相互作用的分析、地基沉降的计算等。桥梁水力学主要包括常态下桥涵的水力计算、陡坡上桥涵的水力计算等。总起来说,桥梁力学涉及力学中的理论力学、结构力学、材料力学、弹性理论、结构动力学、土力学和水力学等诸分支,但由于篇幅有限,本书中所讨论的内容偏重于桥梁结构静力学和桥梁结构动力学两大部分,对于其他部分仅就桥梁设计中经常遇到的问题作一些介绍。

本书是在院领导的大力支持下,由我院教授级高级工程师胡人礼根据国内外大量文献,结合他本人从事桥梁设计工作四十余年的心得和体会编著而成的,我们希望本书能为发展我国桥梁建设尽一份力。本书编者表示谨向本书引用了他们的论著的作者致以谢忱。

最后,诚恳欢迎读者对本书中疏漏和谬误之处给予批评指正。

铁道部第三勘测设计院

1998年7月

目 录

第一章 力和力系	1
第一节 共点力系的合成.....	1
第二节 力的分解.....	8
第三节 共点力系的平衡	10
第四节 力矩、合力矩、力偶和力偶矩	13
第五节 力偶系的合成和平衡	18
第六节 一般力系的合成和平衡	22
第七节 构件和构件系的受力平衡	30
第八节 摩擦和摩擦力	31
第九节 桥梁上作用的力	36
第十节 约束和约束反力	38
第二章 静定结构的分析	43
第一节 静定结构与静不定结构的概念	43
第二节 静定梁的分析	45
第三节 静定平面刚构的内力分析	60
第四节 静定平面桁梁的内力分析	64
第五节 静定拱式结构的内力分析	74
第六节 静定梁的影响线	82
第七节 静定桁架的影响线	98
第八节 静定拱的影响线.....	105
第三章 应力和应变	107
第一节 拉伸和压缩下等截面直杆的应力和应变.....	107
第二节 受剪杆件的应力和应变.....	109
第三节 扭转直杆的应力和应变.....	110
第四节 受弯直梁的应力和应变.....	112
第五节 偏心受拉和偏心受压杆件的应力和应变.....	124
第四章 结构变形的计算	126
第一节 概 述.....	126
第二节 虚功原理.....	126
第三节 求算荷载作用下结构位移的单位荷载法.....	128
第四节 求算荷载作用下结构位移的图乘法.....	135
第五节 求算温度效应下结构位移的单位荷载法.....	139
第六节 支座发生移动时静定结构位移的计算.....	142
第七节 弹性结构的互等定理.....	143
第八节 位移影响线.....	147

第九节	求算结构位移的共轭梁法	147
第十节	求算结构位移的弹性荷载法	154
第五章	静不定梁的分析	162
第一节	静不定梁的概念	162
第二节	藉求解挠曲线微分方程分析结构的方法	163
第三节	力 法	171
第四节	弯矩—面积法	182
第五节	三弯矩方程	188
第六节	有限差分法	195
第七节	位 移 法	199
第八节	连续梁的影响线	207
第六章	静不定刚构的分析	220
第一节	力 法	220
第二节	位 移 法	250
第三节	力矩分配法	264
第七章	静不定桁架分析	281
第一节	概 述	281
第二节	力 法	282
第三节	桁梁中纵、横向联结系及纵梁的分析	296
第八章	静不定拱的分析	313
第一节	概 述	313
第二节	无铰拱的分析	316
第三节	两铰拱的分析	331
第四节	系杆拱的分析	333
第五节	藉柔性拱加强的拱式组合桥的分析	355
第六节	拱与空腹式拱上结构共同作用的分析	367
第七节	连拱计算	387
第九章	等宽变截面梁和变截面刚构的分析	398
第一节	等宽矩形截面的变截面梁	398
第二节	变截面刚构	413
第十章	平面弯梁桥	433
第一节	概 述	433
第二节	单片单跨静定平面弯梁的分析	434
第三节	对弯矩为静定、对扭矩为一次静不定的平面弯梁的分析	440
第四节	平面弯梁桥中各梁的荷载横向分配	446
第十一章	杆系结构分析的矩阵力法	456
第一节	平面单元直杆的分析	456
第二节	平面静定杆系结构结点位移的求算	459
第三节	静不定平面杆系结构中杆端力和结点位移的求算	468
第十二章	杆系结构分析的矩阵位移法	480

第一节	平面单元直杆的分析	480
第二节	单元刚度矩阵由局部坐标转成整体坐标的变换	483
第三节	自由结构刚度矩阵的形成和结构的分析	486
第四节	连续拱桥的分析	507
第十三章	分析弹性力学中平面问题的有限元法	514
第一节	概 述	514
第二节	弹性力学的几个基本概念	514
第三节	单元分析	521
第四节	自由离散结构的刚度矩阵的建立	530
第十四章	分析弹性薄板弯曲问题的有限元法	541
第一节	弹性薄板弯曲的几个基本概念	541
第二节	弯曲薄板有限元法中矩形板单元位移法	545
第三节	弯曲薄板有限元法中三角形板单元混合法	560
第十五章	各向同性薄板挠曲时挠度和内力的计算	571
第一节	各向同性薄板挠曲分析的弹性理论	571
第二节	各向同性、四边简支矩形薄板在垂直于板面的荷载作用下的分析	577
第三节	各向同性、两条对边简支矩形薄板在垂直于板面的荷载作用下的分析	583
第四节	各向同性、四边固定矩形薄板在垂直于板面的均布荷载作用下的分析	591
第五节	几种边缘支承情况较复杂的各向同性矩形板在垂直于板面的均布荷载作用下的分析	598
第十六章	正交异性弹性薄板的挠曲分析	604
第一节	正交异性弹性薄板的挠曲面微分方程	604
第二节	正交异性板在垂直于板面的荷载作用下的经典弹性理论分析法	608
第三节	比拟正交异性板法	612
第四节	G—M 法对桥上荷载横向分布分析的应用	625
第十七章	弹性地基梁	635
第一节	概 述	635
第二节	按文克尔假设的计算方法	636
第三节	按半无限弹性体的计算方法	656
第十八章	箱形薄壁梁的分析	670
第一节	箱形梁对称弯曲时的应力	670
第二节	矩形箱形薄壁梁的剪力滞效应	678
第三节	矩形薄壁箱形悬臂式梁的负剪力滞效应	687
第四节	箱形薄壁梁的刚性扭转	688
第十九章	构件和结构的稳定性	734
第一节	压杆稳定性的概念	734
第二节	中心受压等截面直杆的临界荷载	735
第三节	小偏心受压等截面直杆的临界荷载	745
第四节	中心受压变截面直杆的临界荷载	747
第五节	中心受压组合直杆的临界荷载	754

第六节	构件纵横弯曲分析·····	759
第七节	梁的侧向稳定性·····	764
第八节	桁架和刚构的稳定性·····	768
第九节	对称拱的面内稳定性·····	779
第十节	对称裸拱的面外稳定性·····	788
第十一节	矩形薄平板的稳定性·····	795
第十二节	板梁中腹板的稳定性·····	804
第二十章	结构振动计算原理·····	814
第一节	概 述·····	814
第二节	单自由度系统的振动·····	815
第三节	多自由度系统的竖向振动·····	832
第四节	计算振动频率的近似法·····	852
第五节	桥墩自振频率和周期的求算·····	866
第二十一章	移动车辆荷载作用下桥跨结构的振动·····	873
第一节	车辆速度对桥跨结构的竖向动力作用·····	873
第二节	车辆产生的竖向周期性力对桥跨结构的竖向动力作用·····	876
第三节	考虑运动荷载的质量对桥跨结构竖向振动的计算·····	879
第四节	考虑运动荷载的质量对桥跨结构振动影响的近似方法·····	884
第五节	同时考虑运动荷载的质量和车轮的周期性竖向力对桥跨结构振动作用的计算·····	887
第六节	梁式桥跨结构竖向自由振动周期的近似求算·····	893
第七节	梁式桥跨结构空间自由振动周期的近似求算·····	896
第八节	桥跨结构与铁路车辆的共同空间振动·····	902
第二十二章	风和地震对桥梁的动力作用·····	905
第一节	稳定平均风压的确定·····	905
第二节	脉动风的动力作用·····	907
第三节	求算水平地震力的方法·····	913
第四节	采用反应谱理论求算桥墩水平地震力的例题·····	916
第二十三章	悬索桥·····	918
第一节	概 述·····	918
第二节	缆索的分析和柔式悬索桥的挠度分析·····	920
第三节	加劲悬索桥的挠度分析·····	925
第四节	三跨带有不变弯曲刚度加劲梁的悬索桥的分析·····	934
第五节	带有变化弯曲刚度加劲梁的悬索桥的分析·····	939
第二十四章	斜拉桥·····	942
第一节	概 述·····	942
第二节	斜拉桥的分析·····	944
第二十五章	地基应力、基础沉降和土压力 ·····	955
第一节	地基中的应力·····	955
第二节	竖向压力荷载作用下刚性浅置基础底面处地基土接触应力	

	的分布和求算·····	960
第三节	刚性基础底面以下下卧土层应力的检算·····	962
第四节	外荷载作用下深基础侧面地基土中应力的求算·····	963
第五节	基础的沉降·····	971
第六节	土 压 力·····	974
第二十六章	水力计算 ·····	981
第一节	静水力学基础·····	981
第二节	动水力学基础·····	985
第三节	明渠均匀水流·····	994
第四节	明渠非均匀水流·····	996
第五节	水 跃 ·····	1001
第六节	跌 水 ·····	1010
第七节	小桥水力计算 ·····	1020
第八节	涵洞水力计算 ·····	1023
第九节	倒虹吸管水力计算 ·····	1027
第十节	陡坡和涵洞水力计算例题 ·····	1028
附 录		
附录一	悬臂梁、简支梁和伸臂梁的支点反力公式、剪力方程、弯矩方程、 最大弯矩公式、挠曲线方程、转角公式、挠度公式·····	1034
附录二	中华人民共和国铁路标准活载(中—活载)的图式及其换算均布 活载 ·····	1051
附录三	中华人民共和国公路标准活载 ·····	1053
附录四	铁路中—活载换算均布活载的加载规定 ·····	1057
附录五	平面图形的特性 ·····	1060
附录六	杆件横截面的截面核心 ·····	1074
附录七	$\int_0^l R_U R_L dx$ 值 ·····	1077
附录八	等截面连续梁由于支承产生单位竖向位移使各支点处引起的反力和 梁内弯矩 ·····	1078
附录九	箱形刚构(刚架)的内力 ·····	1085
附录十	等宽矩形截面加腋梁的计算用表 ·····	1095
附录十一	$G-M$ 法的荷载横向影响系数 K_0 、 K_1 和弯矩系数 μ_0 、 μ_1 曲线图 ·····	1121
附录十二	半无限长梁的反力系数 $\bar{p}$ 、剪力系数 $\bar{Q}$ 、弯矩系数 $\bar{M}$ ·····	1124
附录十三	克雷洛夫函数表 ·····	1136
附录十四	对称拱的面内屈曲临界荷载 ·····	1153
附录十五	变截面墩身任一点处有单位水平力或单位力矩作用时,该点及其他任 一点处所产生的水平位移和转角的近似计算 ·····	1157

第一章 力和力系

第一节 共点力系的合成

一、平面共点力系的合成

力是物体之间的一种相互作用,这种作用会使物体的运动状态发生变化。多个力的组合称为力系。力系中诸力的合成、分解和平衡是桥梁力学分析的基础。下面先讨论平面共点力系中诸力的合成。

假设图 1-1-1(a)为位于直线上的桥梁,对于整个桥梁来说,作用于该桥梁上的所有力构成一个力系。对于图 1-1-1(b)所示的梁来说,作用于梁上的外力、梁的自重以及支座的反力构成一个力系。对于图 1-1-1(c)所示的桥台来说,作用于桥台支座上的力、桥台侧面的土压力、桥台(包括基础在内)的自重、基础襟边上的土重以及基础底面处土的反力也构成一个力系。如果同一力系中所有的力位于同一平面内,那么该力系称为平面力系。凡是力系中的力不全部位于同一平面内,则称为空间力系。

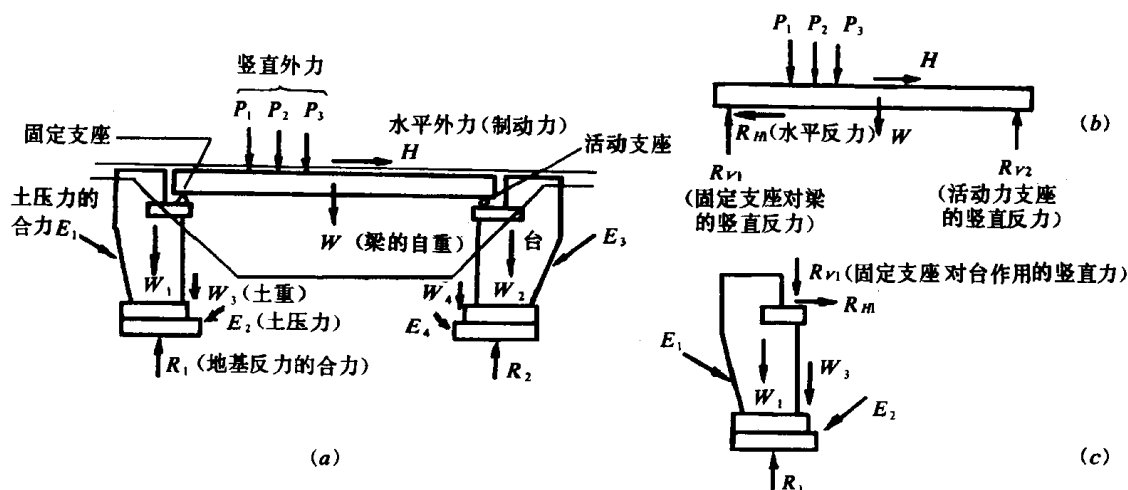


图 1-1-1

当平面力系中的各个力均汇交于同一点时,该力系称为平面共点力系,或平面汇交力系。如图 1-1-2 所示的力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 位于同一 xoy 平面内,且均直接汇交于同一点 P ,所以该力系为一平面共点力系。由于力是具有大小、方向和作力点的量,因此,人们往往用矢量来表示力。表示力的矢量称为力矢量,如图 1-1-2 中的力就是用矢量来表示的。力矢量亦称力向量,通常用带有箭头且按某一比例尺绘成的线段来表示,其线段的长度代表矢量的大小,箭头的指向代表矢量的方向,人们往往以矢量的终端(即箭头端)代表力的作力点。目前,人们以 N 或 kN 等作为力的计量单位。当平面力系

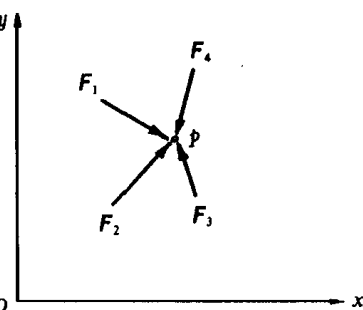


图 1-1-2

中的力不直接汇交于同一点,但这些力的作用线相交于同一点时,根据力可沿其作用线任意移动而不改变该力的效应的性能(通常称这种性能为力的可传性),这些没有直接作用于同一汇交点的力可沿其作用线平移到同一汇交点,所以这些力亦为平面共点力系。这种力系在桥梁结构中是经常出现的。桥梁平面桁架(当假定桁架的节点为铰结时)中作用于同一节点上的力系属于平面共点力系,如图 1-1-3 所示从桁梁中取出的一片平面桁架在外力和桁架自重作用下,作用于该桁架中每一节点的平面力系就是这种平面共点力系。

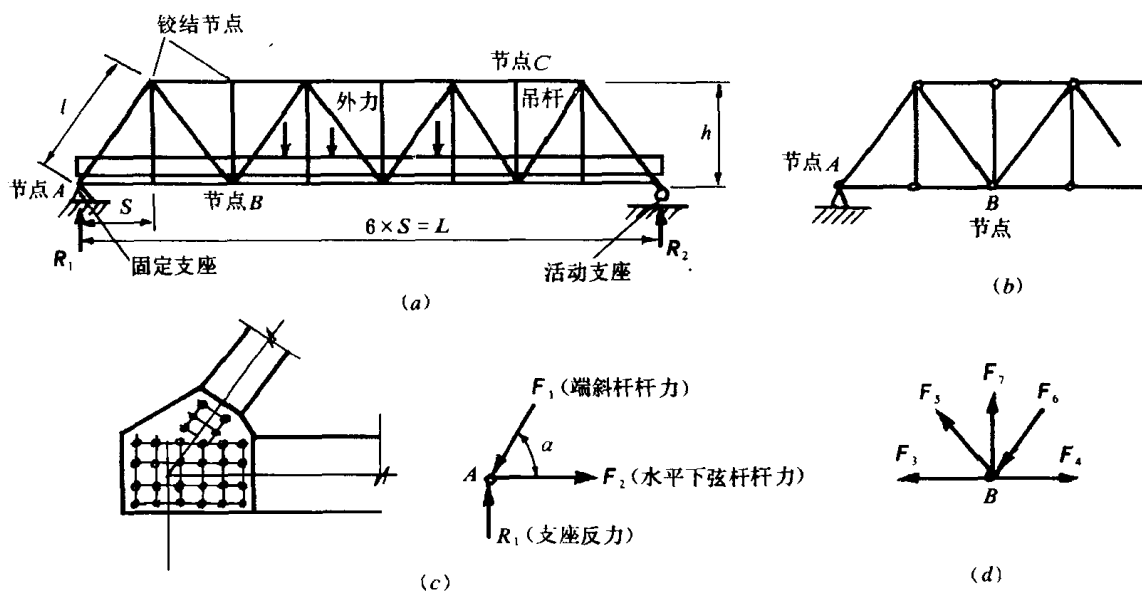


图 1-1-3

平面共点力系中诸力的合成是桥梁设计中经常碰到的问题。平面共点力系中的诸力矢量可藉连续采用力的平行四边形法则(或称矢量加法)合成为一个力(力矢量)或多个力。如图 1-1-4(a)所示力系中的力矢量 F_1 与 F_2 ,应用力的平行四边形方法可合成为合力矢量 R_1 ,力矢量 F_3 与 F_4 可以合成为合力矢量 R_2 ,而 R_1 与 R_2 又可合成为一个力矢量 R ,见图 1-1-4(b)所示,该 R 则称为此力系中 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 诸力的总合力或总合力矢量。倘若用矢量式来表示,则

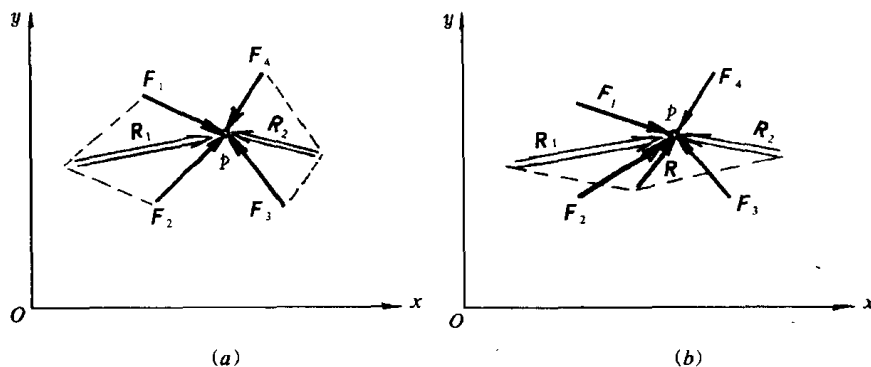


图 1-1-4

$$R_1 = F_1 + F_2$$

$$R_2 = F_3 + F_4$$

$$R = R_1 + R_2$$

当对图 1-1-5 中所示的两个汇交力矢量 F_1 和 F_2 藉力的平行四边形法则求其合力矢量时(亦即求 $R=F_1+F_2$),合力矢量 R 的大小 R 为:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos r}$$

式中的 F_1 和 F_2 分别为力矢量 F_1 和 F_2 的大小, r 为这两个矢量的夹角。根据图 1-1-5(b),

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin r}$$

因此力矢量 F_1 和 F_2 与合力矢量 R 的夹角分别为:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{F_1}{R}\sin r\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{F_2}{R}\sin r\right)$$

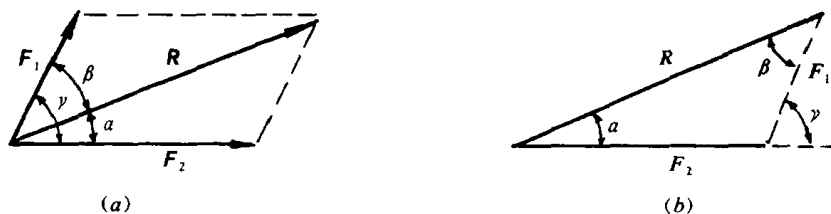


图 1-1-5

二、平面共点力系合成的几何法

力系中诸力的合成除了可采用上面所述的平行四边形法则进行外,还可将平面共点力系中所有的力分别顺它们的作用方向,按同一比例绘成矢量,并将各矢量依次进行首尾连接(也就是将前一个力矢量的箭头与后一个力矢量的尾端相接,但不一定要顺力的编号次序来进行),然后,自最后一个力矢量的箭头至第一个矢量的尾端连接起来作一力矢量,该力矢量即为所欲求的力系的合力矢量,此合力矢量的箭头指向最后一个矢量的箭头。这样所作的多边形称为力多边形,这种用于求力系中的合力的方法,称为几何法,或作图法,或力多边形法。从力多边形中所量得合力系量的大小即为合力的大小,合力矢量的方向即为合力的方向。具体地说,如顺图 1-1-6(a)所示平面共点力系中的各个力顺各自作用方向,按同一比例绘出(图中的力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 和 F_5 均表示为力矢量),按前面所述,以首尾连接方法绘出力多边形,其中矢量 R 即为该力系的合力矢量,量得 R 的大小即为该力系合力的大小, R 的方向即为该力系合力的方向,见图 1-1-6(b)。但是,也可按图 1-1-6(c)绘制力多边形,所得的力系合力矢量 R 的大小和方向均与图 1-1-6(b)所得的结果相同,这也就是上面所说,在绘制力多边形时不一定要顺力的编号次序来进行。

三、平面共点力系合成的解析法

平面共点力系中的力的合成还可以采用另一种称为解析法的方法,即通过平面力系的汇交点作一直角坐标系 xoy ,将力系中各个力矢量同时分别投影到该坐标系的 x 轴上和 y 轴上,假定投影力矢量的作用方向与 x 轴的正方向或 y 轴的正方向相同时该投影力矢量为正值,而与 x 轴或 y 轴的负方向相同时,该投影力矢量则为负值。然后分别将所有力矢量投影在 x 轴上和在 y 轴上的大小(即投影值)求代数数和;此代数数和即为该力系的合力矢量在 x 轴上或 y 轴

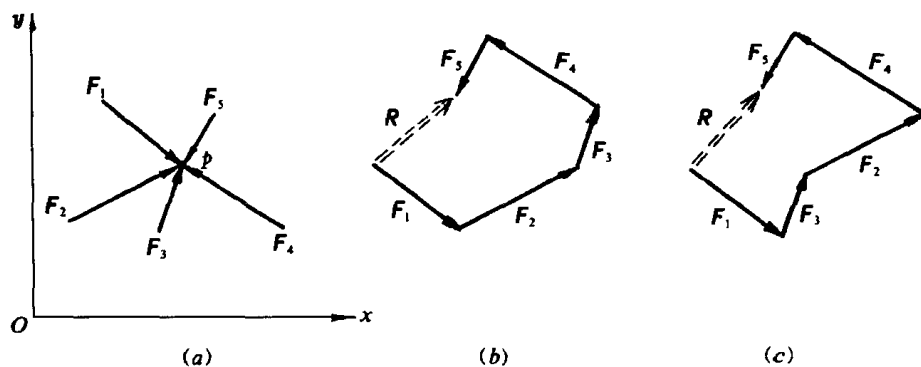


图 1-1-6

上的投影大小。当求得的代数和为正时,说明力系的合力矢量在 x 轴上或在 y 轴上的投影顺 x 轴或 y 轴的正方向,反之,则顺 x 轴或 y 轴的负方向。最后将合力矢量在 x 轴上的投影矢量 R_x 与合力在 y 轴上的投影矢量 R_y 进行合成,便求得该力系的合力 R 。如图 1-1-7(a)所示,

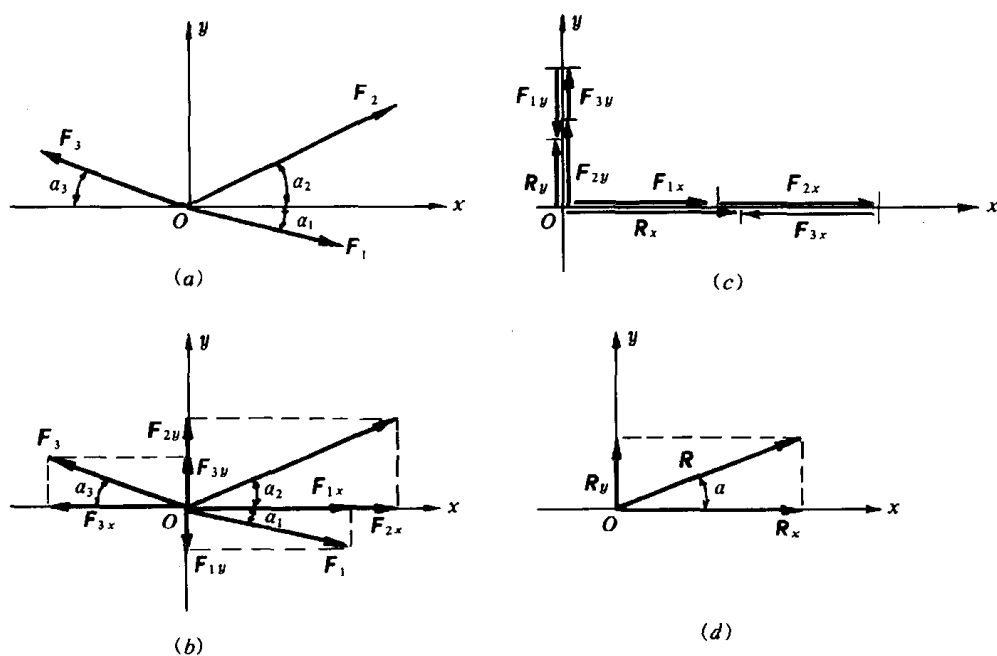


图 1-1-7

由于 $F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1$, $F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2$, $F_{3x} = -F_3 \cdot \cos \alpha_3$,
 $F_{1y} = -F_1 \cdot \sin \alpha_1$, $F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2$, $F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3$,

式中的 F_1, F_2, F_3 分别为力矢量 F_1, F_2, F_3 的大小值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为这些力矢量与 x 轴之间的夹角。所以力矢量 R_x 和 R_y 的大小分别为:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 - F_3 \cdot \cos \alpha_3$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3$$

当力系中有 n 个力时,其合力 R 在 x 轴上和 y 轴上的投影值(即大小)则为

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (1-1-1)$$

因为矢量 R_x 与矢量 R_y 互相垂直(见图 1-1-7(c)),所以力系的合力矢量 R 的大小为:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

合力矢量 R 与 x 轴之间所成的夹角为〔见图 1-1-7(d)〕:

$$\alpha = \arctan \frac{R_y}{R_x} \quad (1-1-2)$$

四、空间共点力系的合成

图 1-1-8(a) 为桥梁的桩基础(这里为了讨论方便,假设该图中桩顶与承台座板之间成铰接),对于承台座板来说,作用于座板底面处的外力 P_x, P_y, P_z 与各桩顶作用于座板底面处的反力 $V_1, V_2, \dots, H_{1x}, H_{2x}, \dots, H_{1y}, H_{2y}, \dots$ 形成一个力系,由于这些力不是全部位于同一平面内,所以该力系为一空间力系。

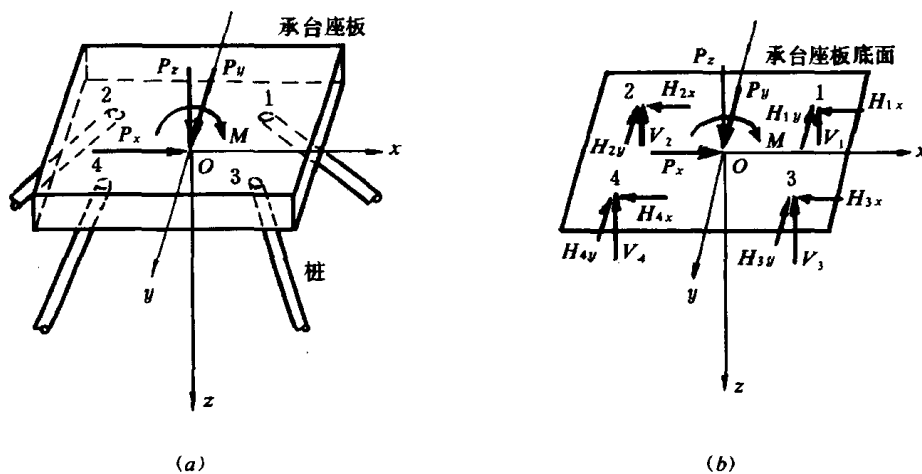


图 1-1-8

图 1-1-9 为位于弯道上的上承式桥梁,作用于该桥中桁梁上的竖向外力、桁梁自重(图中未示出)、侧向风力(或称横向风力)、离心力、支座反力(包括支座竖向反力和支座侧向水平反力,后者在图中未示出),对于桁梁来说形成一个空间力系。

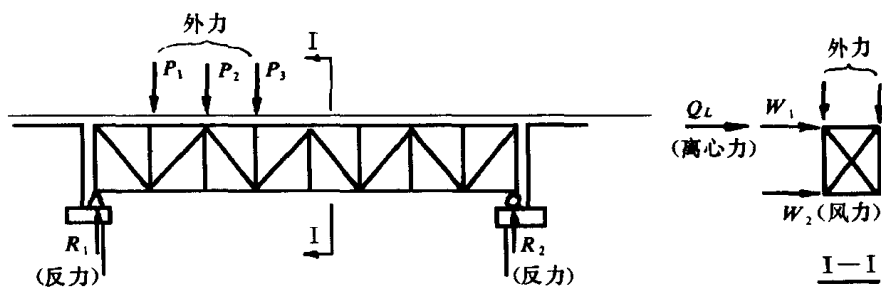


图 1-1-9

1. 空间力系的表示法

空间力的方向必须藉空间直角坐标来表示。空间直角坐标系中的 x, y, z 轴的正方向的相互关系可以任意规定,但是在讨论同一个问题或讨论相互有联系的几个问题时,前后讨论中采用的坐轴正方向的规定应该一致,不要随意变动,否则不留心便会导致分析中产生错误,如果由于特殊原因一定要在讨论过程中改变坐轴正方向的规定,则必须加以说明。下面采用图 1-

1-10 所示的空间直角坐标系,其中 x 、 y 、 z 轴互相垂直,图中的箭头代表这三个轴的正方向,它们可以这样来确定:假定 x 轴的正方向在 xOy 平面内逆时针方向转动 90° (自 z 轴和正方向端头往坐标原点 O 观看)后成为 y 轴的正方向, y 轴的正方向在 yOz 平面内逆时针方向转动 90° (自 x 轴的正方向端头往坐标原点 O 观看)后为 z 轴的正方向。空间直角坐标系中各轴的正方向也可用下述右手规则来确定,人们通常称它为右手法,也就是将右手的大拇指伸直,而将其余四指握紧,这样,右手大拇指的指向定为 z 轴的正方向,其余四指的旋转方向表示由 x 轴正方向往 y 轴的正方向转动 90° 时的旋转方向。这里介绍的只是规定空间直角坐标系中 x 、 y 、 z 正方向的相互关系的方法之一,还有其他规定的办法,这里就不多述了。

空间力应用空间力矢量来表示,其矢量的长度代表力的大小,矢量的指向代表力的指向。为了清晰地表明力矢量在空间直角坐标系中的方向,通常可采用下面三种表示方法中的任何一种。

(1) 用方向角 α 、 β 、 γ 表示力矢量的方向

图 1-1-11 所示的力矢量 F 与空间直角坐标系中 x 、 y 、 z 的正方向的关系,可分别藉方向角 α 、 β 、 γ 来表示,这样也就确定了该力矢量在空间中的方向。

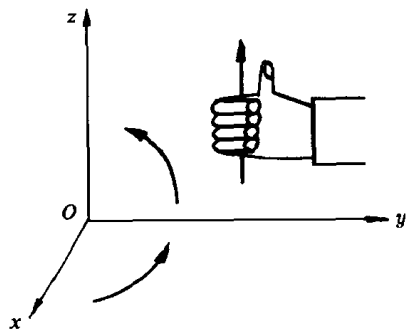


图 1-1-10

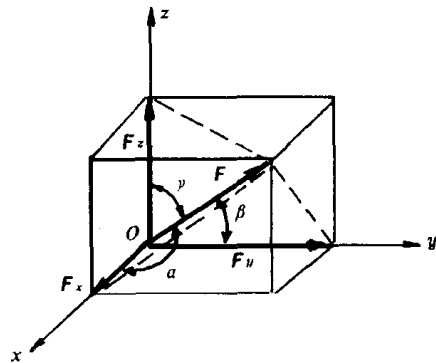


图 1-1-11

将力矢量 F 投影到 x 、 y 、 z 轴上,得到该力矢量的投影力矢量 F_x 、 F_y 、 F_z ,也就是将该力矢量 F 顺已知的 x 、 y 、 z 轴的正方向进行分解, F_x 、 F_y 、 F_z 为力矢量 F 的分力矢量(关于力的分解后面将作详细介绍),它们的大小分别为:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \cos \beta, \quad F_z = F \cdot \cos \gamma \quad (1-1-3)$$

式中的方向角 α 、 β 、 γ 可以为锐角也可以为钝角,因此上面诸式的右边可能为正值也可能为负值,它们均为代数值。式中的 F 为 x 矢量 F 的大小,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1-1-4)$$

于是得

$$\alpha = \arccos \frac{F_x}{F}, \quad \beta = \arccos \frac{F_y}{F}, \quad \gamma = \arccos \frac{F_z}{F} \quad (1-1-5)$$

通常用 i 、 j 、 k 分别代表顺 x 、 y 、 z 轴正方向的单位矢量,于是当力矢量 F 在 x 、 y 、 z 轴上投影的大小 F_x 、 F_y 、 F_z 为已知时,该力矢量 F 可用下列矢量式来表示:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (1-1-6)$$

(2) 用角 θ 、 φ 表示力矢量的方向

图 1-1-12 所示的力矢量 F 与空间坐标系中 x 、 y 、 z 轴的正方向的关系,也可藉角 θ 和 φ 来表示。力矢量 F 在平面 xoy 上的投影力矢量为 F_{xy} 在 z 轴上的投影力矢量为 F_z ,这两个投影

力矢量的大小 F_{xy} 和 F_z 为:

$$F_{xy} = F \cos \varphi, \quad F_z = F \sin \varphi \quad (1-1-7)$$

力矢量 F_{xy} 在 x 和 y 轴上的投影力矢量分别为 F_x 和 F_y 。显然力矢量 F_x 、 F_y 和 F_z 是互相垂直的。 F_x 和 F_y 的大小 F_x 和 F_y 为:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cdot \cos \theta = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ F_y &= F_{xy} \cdot \sin \theta = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-1-8)$$

式中的 θ 和 φ 可以为锐角也可以为钝角, 因此上面两式的右边可能为正值也可能为负值, 它们均为代数值。 F 的大小 F 可按 (1-1-4) 式求得, F_{xy} 的大小 $F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, 因此由 (1-1-8) 式和 (1-1-7) 式得:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{F_x}{F_{xy}} \\ \varphi &= \arcsin \frac{F_z}{F} = \arccos \frac{F_{xy}}{F} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-9)$$

该力矢量 F 也可藉 (1-1-6) 式以矢量式表示。

(3) 用一线段在空间直角坐标系中 x 、 y 、 z 轴上的投影表示力矢量的方向

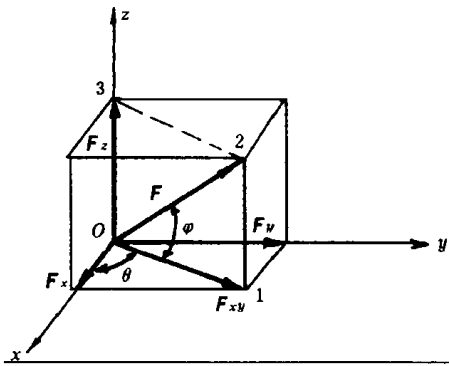


图 1-1-12

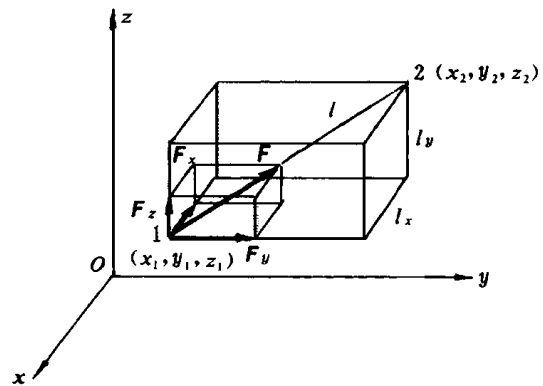


图 1-1-13

假设已知沿力矢量 F 方向上的线段 $\overline{12}$ 的起点 1 和终点 2 的坐标, 如图 1-1-13 所示, 该线段的长度为 l , 在平行 x 、 y 、 z 轴的方向上的投影长度 l_x 、 l_y 、 l_z 分别为:

$$l_x = x_2 - x_1, \quad l_y = y_2 - y_1, \quad l_z = z_2 - z_1 \quad (1-1-10)$$

线段的长度为:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1-1-11)$$

F 在 x 、 y 、 z 方向投影的力矢量 F_x 、 F_y 、 F_z 的大小 F_x 、 F_y 、 F_z 为:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cdot \frac{l_x}{l} = F \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ F_y &= F \cdot \frac{l_y}{l} = F \cdot \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ F_z &= F \cdot \frac{l_z}{l} = F \cdot \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-12)$$

注意随着点 1 和点 2 在空间直角坐标系中的位置不同, 坐标 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 、 z_1 、 z_2 中可能有一部