随机过程论

王梓坤

科学出版社

51.716
186

随机过程論

王梓坤

1966.2.5

科学出版社

内 容 簡 介

本书介绍随机过程论的基本理论，主要包括随机过程的一般理论、马尔科夫过程与平稳过程三部分. 前九章备有习题与提示(或解答). 各章末的附记中注明进一步的问题与参考文献，以便于自学. 读者对象为高等院校数学专业高年级学生、教师和研究工作者.

随 机 过 程 论

王 梓 坤

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳門内大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1965 年 12 月第 一 版	开本：850×1168 1/32
1965 年 12 月第一次印刷	印张：15
精装：0001—1,400	插页：4
平装：0001—1,200	字数：385,000

統一书号：13031·2205

本社书号：3352·13—1

定价：[科六] 精装本 2.80 元 平装本 2.30 元

序

本书的任务是叙述随机过程论(简称过程论)的基本理论. 要完成这项任务，不可避免地会碰到两个问题: 什么是过程论的基本理论? 怎样才能把它叙述得谨严而又易懂? 前者是选材问题; 后者涉及叙述的方式.

原来,过程论虽是一门年轻的数学学科,它的蓬勃发展不过是近三十年左右的事;但由于实际需要的推动和数学工作者的努力,这门学科已经具有非常丰富的内容: 诸子百家,巧立门戶,早已形成羣峯竞秀、万水爭流的局面. 因此，要在一本篇幅不大的书里,比较直接而又详细地叙述它的核心部分,必须认真选材,才有可能不浪费或少浪费读者的精力. 幸好 1961 年我国部分概率论工作者曾交換意见,认为概率论的基本理论中，应该包括极限理论、平稳过程和马尔科夫过程三方面. 这给作者以很大的启发. 遵照这一意见,本书主要由三部分组成: 随机过程的一般理论、马尔科夫过程和平稳过程 (极限理论不在本书范围内). 在这三部分的具体取材中，作者参考了 Колмогоров, Добрушин, Дынкин, Doob, Loève 和伊藤清等的著作,并包含了作者本人的若干结果. 特别是江泽培同志的“平稳过程讲义”,给了作者很大的启发与帮助,谨此深表谢意.

迄今叙述过程论的方式主要有两种: 一是理论性的，严谨而系统,但不证明的细节太多，以致初学时发生不少困难; 另一种是实用性的,关于应用方面的材料很丰富，涉及面广，但作为数学基本理论,却似乎不很适当. 本书的任务要求采用第一种方式,为了便于初学,作者力求把选定的內容写细. 我们希望,即使在沒有外援的自学条件下,也有可能坚持到底. 除最后一章外,各章末备有习题,它们都不太难，而且几乎每题都附有提示或解答，这些习题

06340

对加深理解无疑是有益处的．此外，在各章末的附记中，简短地指出了作者所知的进一步值得注意的问题与参考文献，这当然是十分浅薄和挂一漏万的．

基于上述想法，我们力求在全书中贯彻选材精炼而叙述详细的原则．

全书共十章，可把它们分成三个单元：一、三章主要讲过程的一般理论；二、四、五、六、十章讲马尔科夫过程；七、八、九章讲（弱）平稳过程．后二单元基本上是彼此独立的．书末附篇中收集了要用到的测度论知识，读者最好先看一下，以便了解正文中的符号．

本书底稿在南开大学部分地讲授过，作者衷心感谢听众所提出的许多宝贵意见．吴荣同志详细阅读了底稿，并提出了许多改进建议；来新三同志校对了文字；胡国定同志对本书的写作始终关心和鼓励．作者谨对以上诸位敬致谢意；同时还感谢审校者的大力协助．

由于作者学识浅薄，尽管竭力而为，错误缺点，仍然难免，敬请随时指教，以便改进．

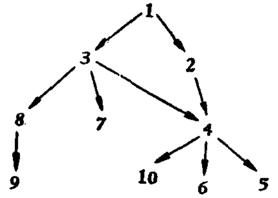
王梓坤 1963年1月

01380

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

各章間关系图



第一章 随机过程的基本概念

§1.1. 随机过程的定义

（一）象许多其它数学学科一样，概率论需要自己的公理结构。我们采用 A. H. Колмогоров 于 1933 年所引进的公理系统，它使概率论建立在测度论的基础上，因而有可能充分利用测度论中的结果和工具。虽然如此，从历史上看，概率论的产生远在一般的测度理论建立以前，它有专门的术语和偏重的问题。为了保留这些术语的直观意义，我们自然应该沿用概率论中的名词。

有关测度论的预备知识都收集在附篇中。

测度空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，如果满足条件 $P(\Omega)=1$，就称为**概率空间**。本书中，为了避免许多繁琐的关于零测集的子集的说明，总设 P 为**完全的概率测度**。概率论中，称 Ω 中的点 ω 为**基本事件**，Ω 为**基本事件空间**，$\mathscr{F}$ 中的集 A 为**事件**，称 $P(A)$ 为 **A 的概率**。定义在 Ω 上取实数值的 $\mathscr{F}$ 可测函数 $x(\omega)$ 称为**随机变量**。ω 的复数值函数 $\xi(\omega)$，$\xi(\omega)=y(\omega)+iz(\omega)$，如果它的实部 $y(\omega)$ 和虚部 $z(\omega)$ 都是随机变量，就称为**复随机变量**。以后如果同时研究多个随机变量，除非特别声明，我们总设它们定义在同一个概率空间上。

对随机变量 $x(\omega)$，函数

$$F(\lambda)=P(x(\omega)\leqslant\lambda) \tag{1}$$

称为 **$x(\omega)$ 的分布函数**，它对一切 $\lambda\in R_1$ 有定义，而且是 λ 的不下降右连续函数，满足条件

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=1 \tag{2}$$

（右连续性及（2）由测度的连续性公理推出）。因此，$F(\lambda)$ 具备一

维分布函数的一切性质，从而它在 $\mathscr{B}_{1,F}$ 上产生一个**概率分布**[1)]，后者定义为 $F(\lambda)$所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，即测度

$$\int_A dF(\lambda),\quad A\in\mathscr{B}_{1,F}. \tag{3}$$

这测度在 $\mathscr{B}_1$ 上的限制叫做 $x(\omega)$ **的分布**.

对于任何一个一维分布函数 F（以后“一维”二字省去），如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数 f，使

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)d\mu\quad(\lambda\in R_1) \tag{4}$$

就称 f 为 F **的分布密度**，或者说，F 有分布密度为 f.

今设有 n 个随机变量 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$，它们构成一个 n 维随机矢量

$$X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)). \tag{5}$$

n 元函数

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(x_1(\omega)\leqslant\lambda_1,\cdots,x_n(\omega)\leqslant\lambda_n) \tag{6}$$

是一 n 维分布函数［附篇中（4）式的满足是由于它左方的值等于 $P(\lambda_j<x_j(\omega)\leqslant\mu_j,\ j=1,\cdots,n)\geqslant 0$］，称为 $X(\omega)$ **的联合分布函数**. 它在 $\mathscr{B}_{n,F}$ 上产生一个概率分布，后者定义为 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，即测度

$$\int\cdots\int_A F(d\lambda_1,\cdots,d\lambda_n),\quad A\in\mathscr{B}_{n,F}. \tag{7}$$

这测度在 $\mathscr{B}_n$ 上的限制叫做 $X(\omega)$ **的分布**.

对于任一 n 维分布函数 F，如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数 f，使

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n} f(\mu_1,\cdots,\mu_n)d\mu_1\cdots d\mu_n \tag{8}$$

对任意 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$ 成立，就称 f 为 F 的**分布密度**，或者说，

1) 记号 $\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_{1,F}$ 等的意义见附篇(二)段.

F 有分布密度为 f.

n 维随机矢量的一般化是随机过程. 设 $T\subset R_1$ 是已给的实数集,有穷或无穷、可列或不可列均可. 设 T 中每一元 t 对应于一随机变量 $x_t(\omega)$,就称随机变量族 $x_t(\omega)$ $(t\in T)$ 为一**随机过程**[1]. 与 (5)类似,记此过程(随机过程的简称)为

$$X(\omega)=\{x_t(\omega),\ t\in T\}, \tag{9}$$

$x_t(\omega)$ 有时也写为 $x(t,\omega)$ 或 $x(t)$ 或 x_t.

对任意 n 个值 $t_1,\cdots,t_n\in T$, 考虑 $x_{t_1},\cdots,x_{t_n}$ 的联合分布函数

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(x_{t_1}\leqslant\lambda_1,\cdots,x_{t_n}\leqslant\lambda_n), \tag{10}$$

当 n 在正整数集及 t_i 在 T 中变动时$(1\leqslant i\leqslant n)$,得到一族分布函数

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ n>0,\ t_i\in T\}, \tag{11}$$

称 F 为过程 $X(\omega)$ **的有穷维分布函数族**.

与附篇中 (10), (11) 二式的证明完全一样(只要在那里的证明中,以 x_t, x_{t_i} 代替 $\lambda(t)$, $\lambda(t_i)$),可见 F 满足相容性条件,根据附篇定理 4, F 在 $\mathscr{B}_{T,F}$ 上产生一概率分布 P_F, 简记 P_F 为 F. 它在 $\mathscr{B}_T$ 上的限制叫**过程 $X(\omega)$ 的分布**. 今证对任意 $A\in\mathscr{B}_T$,有

$$F(A)=P(X(\omega)\in A).$$

实际上,使上式成立的全体 $A\in\mathscr{B}_T$ 构成 R_T 中的 λ-系 Λ. 由(10), Λ 包含全体形如 $(\lambda(t):\lambda(t_j)\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n)$ 的集; 既然全体这种集构成 R_T 中的 π-系 Π,由附篇引理 3, 可见 $\Lambda\supset\mathscr{F}\{\Pi\}=\mathscr{B}_T$.

在上述随机过程的定义中,我们假定了 T 是某实数集,它可解释为时间的集;其次,还假定了 $x_t(\omega)$ 的值为实数(或复数). 其实从数学理论上看来,没有必要一定要这样做. 例如, T 也可以取为

---

1) 以 Y 表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量全体, 可以把随机过程 $\{x_t(\omega),\ t\in T\}$ 看成为定义在 T 上而取值于 Y 中的抽象函数; 或者视为自 T 到 Y 中的映象.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

平面上的点集，而 $x_t(\omega)$ 可取值于任意可测空间 $(E, \mathscr{B})$，其中 $\mathscr{B}$ 为抽象点 e 的集 E 中某指定的 σ 代数．这时，随机变量的定义应如下推广．称 $x(\omega)$ 为**取值于** $(E, \mathscr{B})$ **中的随机变量**，如对任意 $B\in\mathscr{B}$，ω 集 $(x(\omega)\in B)\in\mathscr{F}$．显然，当 $(E, \mathscr{B})$ 为 $(R_1, \mathscr{B}_1)$ 时，这定义化归以前的定义．如对已给集 T 中任一点 t，有一取值于 $(E, \mathscr{B})$ 中的随机变量 $x_t(\omega)$ 与之对应，就称 $X(\omega)=\{x_t(\omega), t\in T\}$ 为**取值于** $(E, \mathscr{B})$ **中的随机过程**；或简称为**随机过程**（如 $(E, \mathscr{B})$ 已明确固定）．因此，对随机过程 $X(\omega)$，$x_t(\omega)$ 是 $\omega\in\Omega$，$t\in T$ 的二元函数；当 $t\in T$ 固定时，$x_t(\omega)$ 是随机变量；而当 $\omega\in\Omega$ 固定时，$x_t(\omega)$ 是定义于 T 上而取值于 E 的函数，称为（对应于 ω 的）**样本函数**．$(E, \mathscr{B})$ 称为**相空間**．

然而以后如无特别声明，总设 t 及 $x_t(\omega)$ 都取实数值．

随着 T 及 E 是可列集[1] 或非可列集，可将随机过程分成四类：E，T 均可列；均不可列；E 可列 T 不可列；T 可列 E 不可列．这是形式上的分类．另一种分类是根据过程內在的概率法则进行的，于是得到以后要专门讲述的各种过程，例如半鞅、正态过程、马氏过程、平稳过程等等，这留待将来细讲．事实上大多是把两种分类结合起来，研究时比较方便．因而，譬如说，马尔科夫过程中又分 E，T 均可列；均不可列等等四种（但对正态过程，E 可列无意义）．

作为一例，试引进独立随机过程的观念．

称**随机变量族** $\{x_t(\omega), t\in T\}$ **为独立的**，如对任意有穷多个不同的 t_i，$t_i\in T$，任意 $B_i\in\mathscr{B}$，$i=1, \cdots, n$，有

$$P(x_{t_i}(\omega)\in B_i, i=1, \cdots, n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_{t_i}(\omega)\in B_i). \quad (12)$$

如果 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 独立，称 $X(\omega)=\{x_t(\omega), t\in T\}$ 为**具有独立随机变量族的随机过程**，或简称为**独立随机过程**．

更一般地，设对每个 $\lambda\in\Lambda$，$\Lambda\subset R_1$，存在一随机过程 $X_\lambda(\omega)=$

1）为方便计，有穷集（即只含有穷多个元的集）也算可列集．

$\{x_t(\omega),\ t\in T_\lambda\}$. 考虑乘积空间 E^{T_λ} 中的乘积 σ 代数 $\mathscr{B}^{T_\lambda}$. **说随机过程族** $X_\lambda(\omega)$, $\lambda\in\Lambda$ **是独立的**, 如对任意有穷多个不同的 λ_i, $\lambda_i\in\Lambda$, 任意 $B_{\lambda_i}\in\mathscr{B}^{T_{\lambda_i}}$, $i=1,\cdots,n$,有

$$P(X_{\lambda_i}(\omega)\in B_{\lambda_i},\ i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{\lambda_i}(\omega)\in B_{\lambda_i}).$$

注意,一随机矢量可看成为一随机过程,故上定义中也蕴含着随机矢量族的独立性定义.

以下设 $(E,\mathscr{B})=(R_1,\mathscr{B}_1)$. 条件 (12) 等价于: 对任意 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$,有

$$P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i),\tag{12_1}$$

这可记成

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{t_i}(\lambda_i).\tag{12_2}$$

现在设 $T=(1,\cdots,n)$ 而考虑具有独立分量的随机矢量 $X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$,因而它的分布函数

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(\lambda_i).$$

令 $S_n(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(\omega)$,试证

引理 1. 对任意 $\lambda_j\in R_1$, $j=1,\cdots,n-1$, $\lambda\in R_1$,有

$$P(x_j(\omega)\leqslant\lambda_j,\qquad j=1,\cdots,n-1;$$

$$S_n(\omega)\leqslant\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda_1}F_1(d\xi_1)\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_{n-1}}F_n(\lambda-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1})\,F_{n-1}(d\xi_{n-1}).\tag{13}$$

证. 令 $A\subset R_n$ 为如下的 n 维点集

$$A=\left((\xi_1,\cdots,\xi_n):\xi_j\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n-1;\ \sum_{j=1}^{n}\xi_j\leqslant\lambda\right),$$

又以 W 表 (13) 左方括号中的 ω 集. 由积分变换定理及独立性假

设,(13)左方值等于

$$P(W)=\int_W 1\ P(d\omega)=\int\underset{A}{\cdots}\int F(d\xi_1,\cdots,d\xi_n)$$

$$=\int\underset{A}{\cdots}\int F_1(d\xi_1)\cdots F_n(d\xi_n),$$

计算此式最后的 n 重积分,即得(13)中右方的数值#

作为(13)的特殊情形是

$$P(S_n(\omega)\leqslant\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(d\xi_1)\cdots$$

$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\lambda-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1})F_{n-1}(d\xi_{n-1}).\qquad(13_1)$$

(二)下述定理在理论上具有重要的意义,它肯定了以已给 F 为有穷维分布函数族的过程的存在.

定理 1 (**存在定理**). 设已给参数集 T 及满足相容性条件的有穷维分布函数族

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad n>0,\ t_i\in T\},$$

则必存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义于其上的随机过程 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$,使 $X(\omega)$的有穷维分布函数族与 F 相重合.

証. 令 $\Omega=R_T$; $\omega=\lambda(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ 表定义在 T 上的实值函数 $\lambda(t)$, $t\in T$; $\mathscr{F}=\mathscr{B}_T$.

P 为 F 所产生的 $\mathscr{B}_T$ 上的概率测度,即 $P=P_F$ (见附篇定理 4),因而对 n 维柱集 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)$,有

$$P(C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n))=F_{t_1,\cdots,t_n}(B_n).\qquad(14)$$

于是得到概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$,即$(R_T,\mathscr{B}_T,P_F)$. 在此空间上,对每固定的 $t\in T$,定义一 ω 的函数

$$x_t(\omega)=\lambda(t),\ \text{如}\ \omega=\lambda(\cdot),$$

换句话说, $x_t(\omega)$是 R_T 上的 t 坐标函数,亦即 x_t 在 $\omega=\lambda(\cdot)$ 上的值,等于 $\lambda(\cdot)$ 在点 t 上的值 $\lambda(t)$. 由定义并采用附篇(6)式中的记号 W_n,即得

$$(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=W_n\in\mathscr{B}_T,$$

故 $X(\omega)=\{x_t(\omega),\ t\in T\}$是随机过程；由(14)

$$P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=P(W_n)$$
$$=F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

这表示 $X(\omega)$的有穷维分布函数族与 F 重合#

上述定理肯定了以已给 F 为有穷维分布函数族的过程的存在性，然而这种过程及概率空间一般不唯一而有多种造法．定理 1 证明中所造出的空间及过程称为**标准的**．

为了说明造法不唯一，试述两种典型方法：联合与清洗概率空间． 利用这些方法，可以造出无穷多个具有上述性质的过程．不仅如此，这些方法还有其它广泛的用途．

引理 2（空間的联合）． 设 $X(\omega_1)=\{x_t(\omega_1),\ t\in T\}$是定义在 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$ 上的随机过程，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$为另一概率空间，$\Omega_i=(\omega_i),\ i=1,2$．令

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\ P=P_1\times P_2,\tag{15}$$
$$y_t(\omega)=x_t(\omega_1),\ \text{如}\ \omega=(\omega_1,\omega_2),\tag{16}$$

则 $Y(\omega)=\{y_t(\omega),\ t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程，而且 $X(\omega_1)$与 $Y(\omega)$有相同的有穷维分布函数族．

証． 因为

$$(\omega:y_t(\omega)\leqslant\lambda)=(\omega=(\omega_1,\omega_2):x_t(\omega_1)\leqslant\lambda)$$
$$=(\omega_1:x_t(\omega_1)\leqslant\lambda)\times\Omega_2\in\mathscr{F},$$

故 $Y(\omega)$是随机过程；第二结论则由于

$$P(\omega:y_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)$$
$$=P_1(\omega_1:x_{t_i}(\omega_1)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)\times P_2(\Omega_2)$$
$$=P_1(\omega_1:x_{t_i}(\omega_1)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)_\#$$

如果说空间的联合是为了解决原有空间太小的困难，那么空间的清洗便可免除由于空间太大而引起的麻烦．有些基本事件空间过大，其中包含了许多不必要的点，此时自然想把它们清洗出去．

引理 3（空間的清洗）． 设对概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\tilde{\Omega}\subset\Omega$

是外测度为 1 的集[1)],则 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$ 也是概率空间,其中

$$\tilde{\mathscr{F}} = \tilde{\Omega}\mathscr{F},\ 即\ \tilde{\mathscr{F}} = (B) \quad (B = \tilde{\Omega}A,\ A \in \mathscr{F}), \tag{17}$$

$$\tilde{P}(B) = P(A); \tag{18}$$

又如 $X(\omega) = \{x_t(\omega), t \in T\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程,则 $\tilde{X}(\omega) = \{\tilde{x}_t(\omega), t \in T\}$ 是$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$ 上的随机过程,而且 $X(\omega)$ 与 $\tilde{X}(\omega)$有相同的有穷维分布函数族,这里 $\tilde{x}_t(\omega) = x_t(\omega)$, $t \in \tilde{\Omega}$.

証. $\tilde{\mathscr{F}}$ 是 $\tilde{\Omega}$ 上的 σ 代数是显然的. 试证 $\tilde{P}(B)$ 的值唯一. 设 $\tilde{\Omega}A_1 = B = \tilde{\Omega}A_2$, 则 $A_1\tilde{\Omega}A_1 = A_1\tilde{\Omega}A_2$, $(A_1 - A_1A_2)\tilde{\Omega} = \varnothing$, 于是 $\Omega - (A_1 - A_1A_2) \supseteq \tilde{\Omega}$. 因 $\tilde{\Omega}$ 的外测度为1,故 $P(\Omega) - P(A_1 - A_1A_2) = 1$, $P(A_1 - A_1A_2) = 0$, 于是得证 $P(A_1) = P(A_1A_2)$; 同样, $P(A_2) = P(A_1A_2) = P(A_1)$, 因而证明了 $\tilde{P}(B)$ 的值唯一. 显然 $\tilde{P}(B) \geqslant 0$, $\tilde{P}(\tilde{\Omega}) = 1$,而且 $\tilde{P}$ 在 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上完全可加,故 $\tilde{P}$ 是 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上的概率测度.

最后,由

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}(\tilde{x}_{t_i}(\omega) \leqslant \lambda_i,\ i = 1, \cdots, n) \\
&= \tilde{P}(\tilde{\Omega} \cap (x_{t_i}(\omega) \leqslant \lambda_i,\ i = 1, \cdots, n)) \\
&= P(x_{t_i}(\omega) \leqslant \lambda_i,\ i = 1, \cdots, n),
\end{aligned}$$

即知 $X(\omega)$与 $\tilde{X}(\omega)$有相同的有穷维分布函数族#

现在举一例以说明上述结果. 先引进记号$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \cdots \\ p_0 & p_1 \cdots \end{pmatrix}$,它代表一个分布 F,使

$$F(\{a_i\}) = p_i > 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,$$

$\{a_i\}$ 表示只含一个点 a_i 的集,叫做**单点集**,这种形状的分布 F 叫**离散分布**,它的分布函数为

$$F(\lambda) = \sum_{(i:a_i \leqslant \lambda)} p_i.$$

---

1) 即指 $\tilde{\Omega}$ 具有性质:如 $C \in \mathscr{F}$, $\tilde{\Omega} \subset C$,则 $P(C) = 1$.

例. 试造 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及定义于其上的二随机变量 $x_1(\omega)$, $x_2(\omega)$（即 $T=(1, 2)$的过程），使分别有分布

$$F_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad F_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

而且它们的联合分布为

$$F_{12}=\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

解. 造法 1. 分布族 (F_1, F_2, F_{12}) 是相容的[1]，故由存在定理，可造标准过程. 此时

$$(\Omega, \mathscr{F}, P)=(R_2, \mathscr{B}_2, F_{12}),$$

其中 F_{12} 应理解为 $\mathscr{B}_2$ 中的分布，即

$$F_{12}(A)=\frac{k}{4},$$

而 k 为 A 所含$((0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1))=\tilde{\Omega}$ 中点的个数. 然后定义

$$x_1(\omega)=\omega_1, \ x_2(\omega)=\omega_2, \ 如 \ \omega=(\omega_1, \omega_2) \in R_2.$$

造法 2. 因为 $F_{12}(\tilde{\Omega})=1$，故可清洗上面所造的 $\Omega=R_2$，经清洗后，所得为 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$，其中 $\tilde{\mathscr{F}}$ 为 $\tilde{\Omega}$ 中全体子集所成 σ 代数，$\tilde{P}=F_{12}$. 又

$$\tilde{x}_1(\omega)=\omega_1, \ \tilde{x}_2(\omega)=\omega_2, \ 如 \ \omega=(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{\Omega}.$$

造法 3. 令 $\Omega_1=(0, 1)$，它只含 0 与 1 二点. $\mathscr{F}_1$ 是 Ω_1 中全体子集所成 σ 代数，$P_1=F_1$. 又

$$x_1(\omega_1)=\omega_1, \ \omega_1 \in \Omega_1.$$

于是得到概率空间 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$ 及其上定义的随机变量 $x_1(\omega_1)$，显然 $x_1(\omega_1)$ 的分布是 F_1.

1) $F_{21}=F_{12}$ 略去.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com