

应用结构力学

——典型例题剖析

郑念国 戴仁杰 编著

同济大学出版社

前 言

本书依据高等学校土建类结构力学教材及高等学校工科“结构力学教学大纲”的要求编写而成。本书内容全部来自教学实践,是一部对教学具有显明的实用性和针对性的结构力学参考书,书中提供了大量的典型例题。为了便于读者阅读与参考,故本书与结构力学教材中有关内容的顺序完全相同,在书后还附有近年来同济大学硕士研究生的入学试题(部分)及解答,以供参考。

本书对大专院校本、专科学生和函授、电视大学、业余大学的学生学习结构力学的课程,能起较全面的辅导作用,同时,对报考攻读硕士研究生的读者及从事结构力学课程教学的教师也有一定的参考价值。

编者在长期教学实践中发现,有些初学者在结构力学的解题中,有时常会感到束手无策、茫然失措,还经常出错。怎样才能牢固掌握结构力学的基本理论、解题思路,减少和避免错误?编者从多年的教学实践中认识到,通过分析初学者在学习容易犯的错误或经常出现的问题,让他们从自己的或他人的失败教训中去熟悉结构力学的原理及解题思路,不失为一个有效的方法。因此,在典型例题的分析中,除了正确的解法外,还列出一些初学者容易犯的错误的,并对它进行剖析,指出它的错误所在。这种正、误解法的对比,将有助于对结构力学的全面理解。

本书经扬州大学水利学院潘炳甫先生审阅,提出了许多宝贵意见,在此,表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,时间匆促,加上书中有些写法是新的尝试,有些分析还不够简练、深刻,有些地方可能会有疏漏、错误,因此,希望读者多加指正。

编 者

1991年6月

目 录

前言

第一章 平面体系的几何组成分析	(1)
第一节 概述	(1)
第二节 几何组成分析习题中常见错误的讨论	(6)
第二章 静定结构受力分析	(19)
第一节 引言	(19)
第二节 静定梁	(19)
第三节 多跨静定梁	(30)
第四节 静定平面刚架	(36)
第五节 三铰拱	(54)
第六节 静定平面桁架	(64)
第七节 组合结构	(83)
第三章 位移计算	(99)
第一节 引言	(99)
第二节 虚功原理	(100)
第三节 弹性体系变形体的虚功原理	(104)
第四节 互等定理	(105)
第五节 梁和刚架的位移计算	(107)
第六节 应用图乘法计算中常见错误的讨论及算例	(111)
第七节 具有弹性支承及其他弹性联系的杆件体系的位移计算公式	(121)
第八节 静定结构由于温度变化、支座移动及制造误差引起的位移计算	(125)
第九节 用功的互等定理求位移及反力的算例	(129)
第四章 力法	(131)
第一节 引言	(131)
第二节 力法方程	(134)
第三节 力法的简化计算	(148)
第四节 弹性支承、温度变化、支座移动时超静定结构的计算	(176)
第五节 超静定结构的位移计算和最后内力图的校核	(183)

第五章 位移法、混合法及渐近法	(195)
第一节 引言	(195)
第二节 等截面直杆杆端力与杆端位移间的关系(转角位移方程)	(195)
第三节 位移法的基本方程和基本未知量	(198)
第四节 超静定单杆内力计算中的问题	(204)
第五节 位移法计算中有关问题的讨论	(207)
第六节 位移法示例	(214)
第七节 位移法中对称性的利用	(224)
第八节 综合例题	(232)
第九节 混合法	(254)
第十节 力矩分配法	(260)
第六章 结构在移动荷载作用下的计算	(286)
第一节 影响线及其作用	(286)
第二节 多跨静定梁的影响线及算例	(291)
第三节 超静定结构影响线	(305)
第七章 矩阵位移法计算桁架、连续梁	(311)
第一节 概述	(311)
第二节 桁架	(313)
第三节 连续梁	(332)
第八章 结构的极限荷载	(345)
第一节 概述	(345)
第二节 梁的极限荷载计算	(346)
第三节 刚架的极限荷载计算	(351)
第九章 弹性稳定计算	(361)
第一节 引言	(361)
第二节 弹性连接刚性体系的稳定计算	(363)
第三节 弹性压杆稳定	(368)
第四节 算例	(373)
第五节 第二类失稳问题	(379)
第十章 结构动力计算	(383)
第一节 体系的自由度	(383)
第二节 单自由度体系	(384)
第三节 单自由度体系示例	(389)
第四节 多自由度体系	(402)

第五节 多自由度体系示例	(404)
--------------------	-------

附录

同济大学硕士研究生入学试题(部分)	(427)
-------------------------	-------

第一章 平面体系的几何组成分析

第一节 概 述

几何组成分析是通过几条组成规则，从刚体运动的角度去研究体系各杆件之间以及杆件与支座之间是否发生相对运动。凡不产生相对运动，形状维持不变的刚片系称为几何不变体系，反之，称为几何可变体系。对较简单的体系有两条几何不变的组成规则可用于判断，这两条规则文字上不难理解，但要正确掌握并能灵活应用，是要下一番功夫的。初学时概念往往理解得不深，运用时考虑不全面易犯生搬硬套的毛病，因此，学习时要仔细弄清概念，运用时要抓住规则中实质性问题多作分析，才能正确无误。并逐步做到熟练掌握。

一、几何不变体系的两条组成规则

规则一 两个刚片用一铰和一根不通过此铰的链杆相连，或两个刚片用三根不全平行也不交于一点的链杆相连，则组成无多余约束的几何不变体系。

规则二 三个刚片用不在一直线上的三个铰两两相连则组成无多余约束的几何不变体系。

从规则二引伸出二元片规则，即在一个体系上增加或减去二元片，并不影响原有体系的几何构造性质(图 1-1)，即原体系几何不变，增加二元片后仍为几何不变，反之，原体系几何可变，增加二元片后仍为几何可变。



图 1-1

二元片就是用不共线的两链杆连接一个新结点(铰)的构造，如图 1-1 中 $AC \sim CB$ 。

二、与两个组成规则有关的几个基本概念

对一个体系作几何组成分析时，常把体系中某些部分看作可以自由运动的运动主体，而把另一些部分看作对运动主体起限制作用的约束，然后分析两者之间的关系是否符合几何不变的组成规则，确定体系是否几何不变即

体系 { 运动主体——有自由运动的研究对象(刚片或点)
约束——限制主体运动的装置(铰, 链杆)

1. 刚片——平面体系中，不考虑材料变形的一根杆或已被确认为几何不变的部分，

称为刚片(图 1-2)。

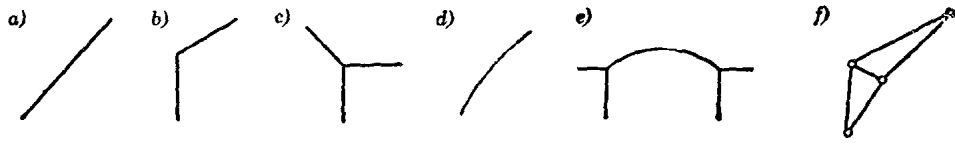


图 1-2

2. 约束

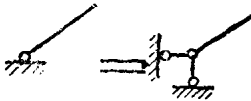
(1) 刚片与基础间的约束

- 滚轴支座(链杆)



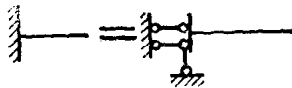
一支杆相当于一个约束

- 铰支座



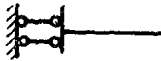
二支杆相当于两个约束

- 固定支座



三支杆相当于三个约束

- 滑动支座



二支杆相当于两个约束

(2) 刚片与刚片之间的约束

- 简单铰——连接两杆的铰



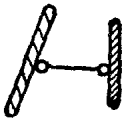
相当于两个约束

- 刚性连接



相当于三个约束

- 链杆——一个仅在两端铰接的二力构件



相当于一个约束

等效链杆如图 1-3 中用虚线表示的 AB 链杆。

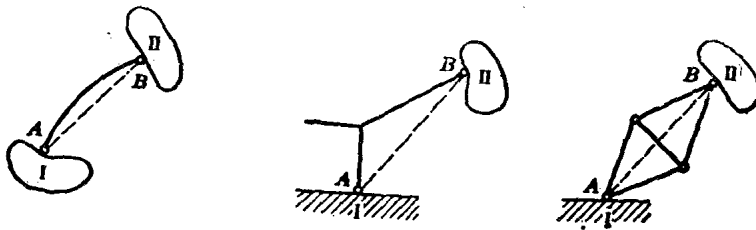


图 1-3

• 瞬铰(虚铰)——两个刚片I、II用两根链杆1、2相连的作用与一个在1、2链杆交点O处用铰相连的作用相同(图1-4)。

若将刚片I视作不动,刚片II绕杆1、2交点处铰O微小转动后,相应两链杆交点位置也随之改变,由O→O',所以铰O称为瞬铰。

瞬铰与实铰从约束物体的角度来看是相同的。而链杆(支杆)与铰的约束作用是不同的(图1-5)。

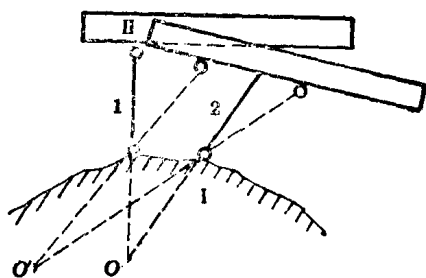


图 1-4

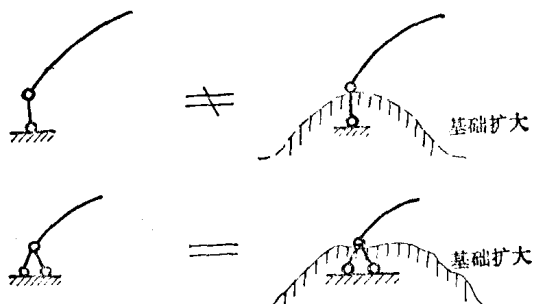


图 1-5

3. 必要约束和多余约束

(1) 必要约束——使体系成为几何不变的最少约束,如图1-6中的三根支杆都是必要约束,缺少任一支杆,体系变成几何可变。因此,必要约束须满足两个条件,即

必要约束 { ①数量上满足组成一个几何不变体的最少约束数
②约束布置上要使体系成为几何不变体

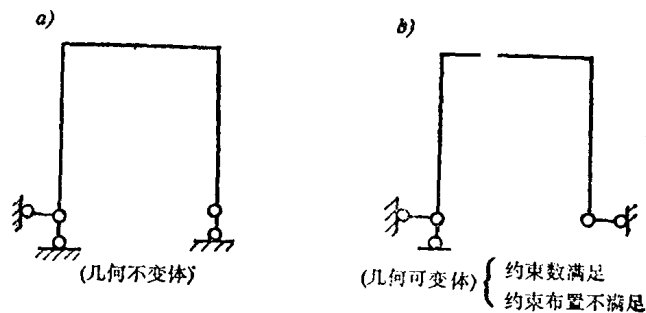


图 1-6

(2) 多余约束——使体系成为几何不变的必要约束之外的约束(图1-7)。

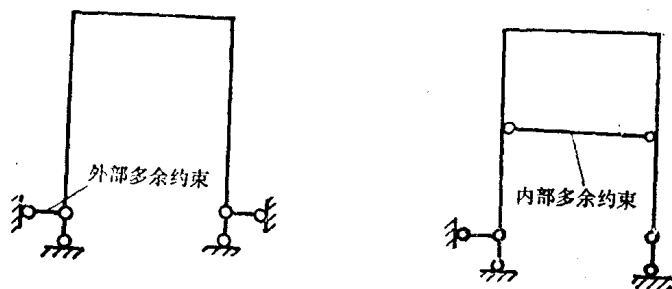


图 1-7

4. 瞬变体系与常变体系

(1) 瞬变体系——原为几何可变, 经微小变形后成为几何不变的体系(图 1-8 a、b、c)。

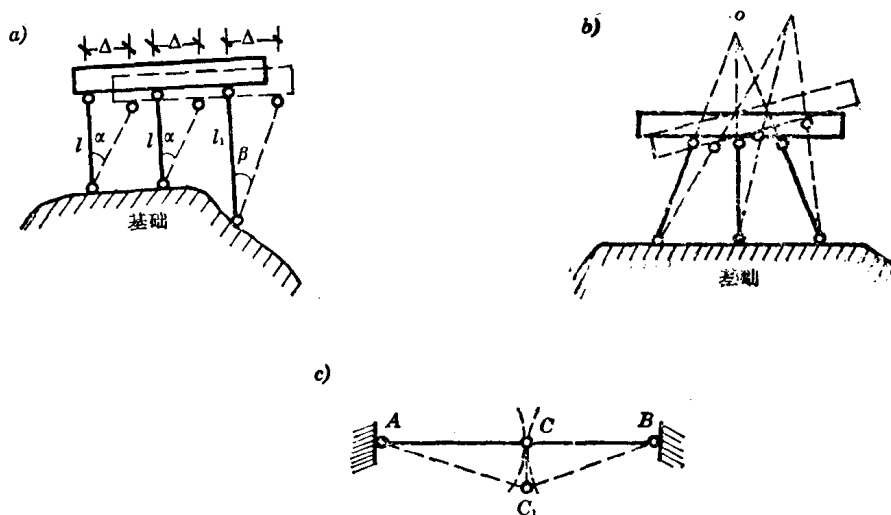


图 1-8

图1-8a 所示体系, 经微小位移后, 三根竖向链杆已经不再平行, 体系就成为几何不变体系。

图 1-8b 所示体系中的刚片, 用交于一点的三链杆与基础相连。当刚片绕虚铰 O 转动微小转角后, 三链杆不再交于一点, 体系即成几何不变, 因此这种体系也是瞬变体系。

显然, 图 1-8c 体系也为瞬变体系。

(2) 常变体系——有大幅度位移发生的可变体系(图 1-9)。

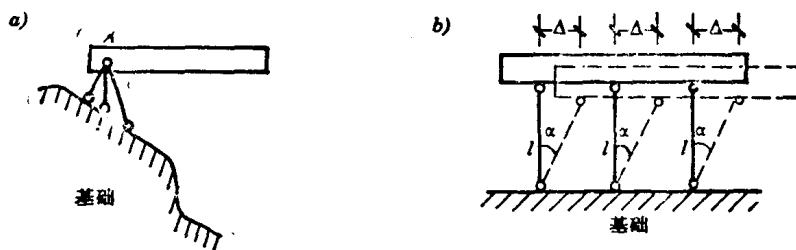


图 1-9

图 1-9a 的刚片由交于一点 A 的三链杆与基础相连, 则刚片可绕 A 铰作大幅度转动, 因此称为常变体系。

图 1-9b 的刚片用等长且平行的三链杆与基础相连, 当刚片沿链杆垂直方向发生 Δ 位移后, 因链杆等长为 l , 所以链杆转角 $\alpha = \frac{\Delta}{l}$, 三链杆仍平行, 即刚片作曲线平动, 体系为几何常变。

5. 虚铰在无穷远处的问题

(1) 一个虚铰在无穷远处(图 1-10)。

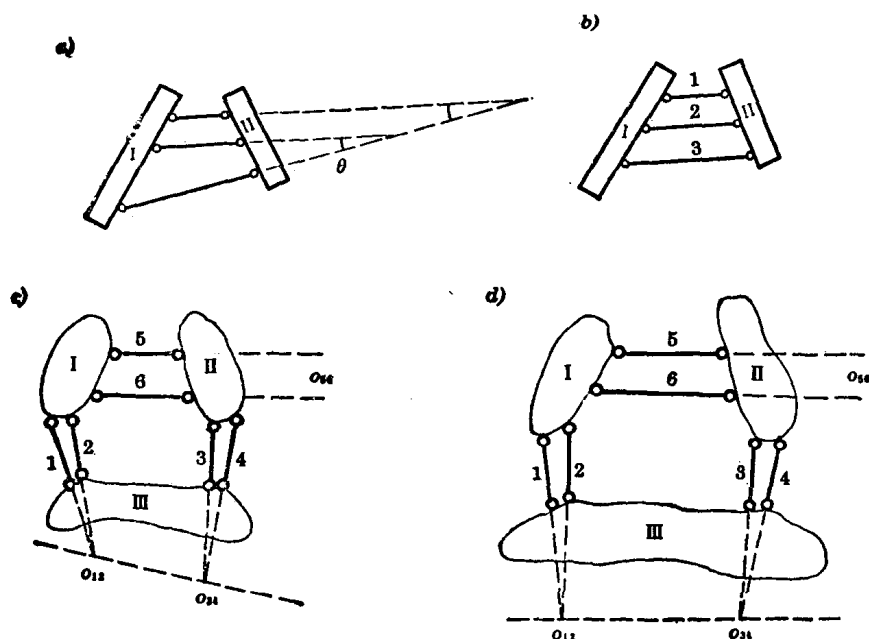


图 1-10

图 1-10a 所示刚片 I、II 用一对平行链杆 1、2 及链杆 3 相连，且链杆 3 与平行链杆夹角为 θ ，由两刚片规则可知，体系几何不变。

图 1-10b 所示刚片 I、II 用三根平行链杆相连，则体系为瞬变体系。

图 1-10c 所示刚片 I、II、III 用一个在无穷远虚铰 O_{56} 及不在无穷远的另两虚铰 O_{12} 和 O_{34} 相连，且虚铰 O_{12} 及 O_{34} 连线不平行链杆 5、6，则体系几何不变；若虚铰 O_{12} 及 O_{34} 连线平行链杆 5、6 (图 1-10d)，则为瞬变体系。

(2) 两个虚铰在无穷远处 (图 1-11)。

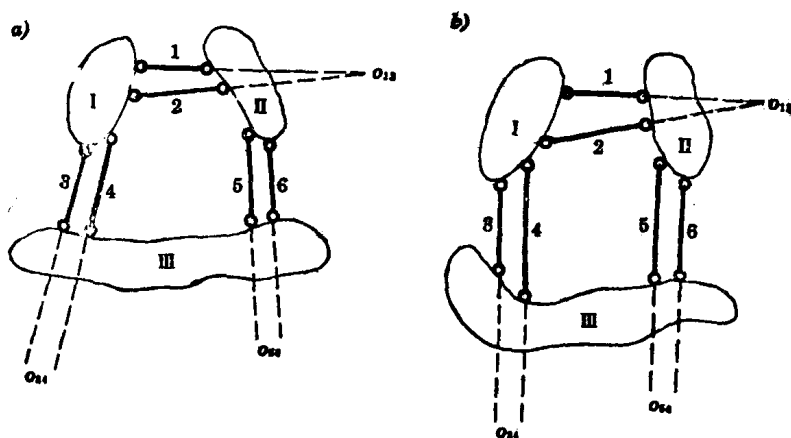


图 1-11

图 1-11a 所示刚片 I、II、III 用虚铰 O_{12} 及两对平行链杆相连，且链杆 3、4 不平行链杆 5、6，则体系几何不变。

图 1-11b 所示刚片 I、II、III 用虚铰 O_{12} 及互相平行的四根链杆相连，则体系几何瞬变。

(3) 三个虚铰在无穷远处 (图 1-12)。

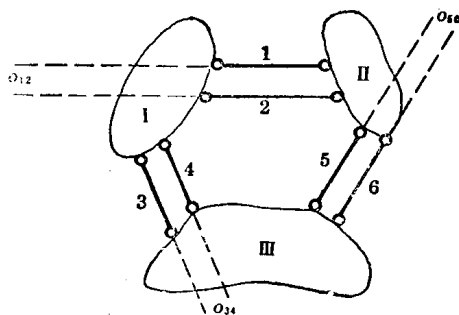


图 1-12

图 1-12 所示三刚片 I、II、III 用三对平行链杆相连, 则体系几何瞬变。

第二节 几何组成分析习题中常见错误的讨论

必须指出: 应用规则对体系进行几何组成分析时, 运动主体是刚片(或点)。链杆与铰则是对运动主体起限制作用的约束。当体系的杆件数目较多而应用规则进行分析时, 常须对体系进行简化。

一、从运动主体方面进行简化

若体系中杆件数太多, 常不易应用规则进行几何组成分析时, 可把体系中由直观肯定为几何不变部分看作一个大刚片(最基本的是铰接三角形), 以减少分析时的刚片数。

二、从约束方面进行简化

利用约束的等效代换:

1. 复杂形状的曲线、折线链杆可用直链杆代替(图 1-3)。
2. 连结两刚片的两链杆, 可用其交点处的瞬铰代替(图 1-4)。

三、按增、减二元片规则进行几何组成分析能较迅速地抓住问题的关键所在

1. 运动主体和约束的错误选定

例 1-1 试对图示体系作几何组成分析(图 1-13)。若为几何不变体系, 指出有无多余约束。

解

(1) 三个刚片 AC 、 DB 和 EF 由三个无穷远虚铰相连, 因此, 体系几何瞬变。

(2) 三个刚片 AD 、 EF 和 BC 由共线的一个虚铰 G 和两个无穷远虚铰相连。故体系几何瞬变。

错误分析:

将三角形 ABC 合成一个刚片, 并与另一三角形 ACD 合成一组合刚片 $ABCD$ 。该组合刚片 $ABCD$ 与基础间用不交于一点的三支杆相连, 故体系几何不变, 且有两个多余约束(链杆 BD 和 EF)。

错误原因在于把 ABC (和 ACD) 看成一个刚片, 如将此部分单独取出(图 1-14), 显见

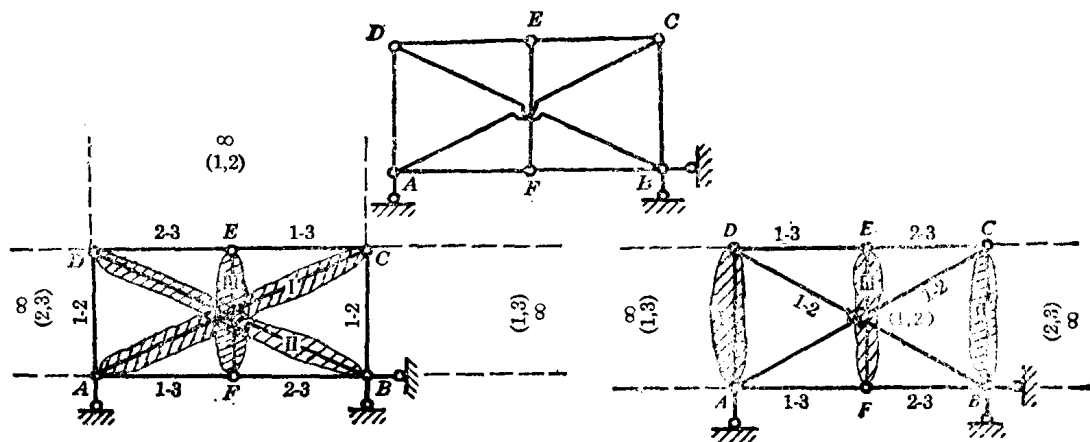


图 1-13

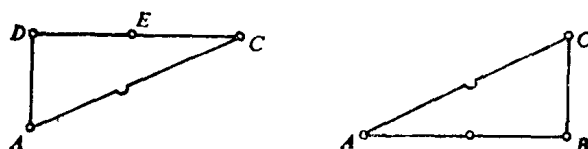


图 1-14

这部分是由四个刚片组成的几何可变体,不能简化为一个刚片。

例 1-2 试对图示体系作几何组成分析(图 1-15)。若为几何不变体系,指出有无多余约束。

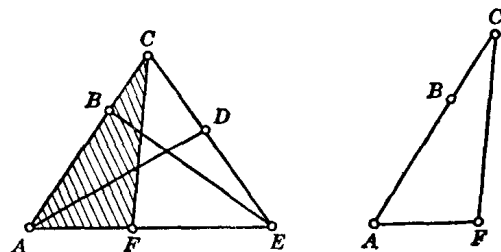


图 1-15

解

分析时,初学者对杆件数较多的体系,往往感到不知哪些杆件作为运动主体(刚片),而哪些杆件又作为约束(链杆)较好。其实运动主体及约束的选取可以任意选定,但如果选定的刚片经分析得不出明确结论,则应选取另一种组合方式的刚片和约束进行分析尝试,直到可用“规则”分析得出明确结论为止。

如对图 1-16 体系,先任选 AB 为刚片 I, 杆 BC 为刚片 II, CD 为刚片 III, 这时刚片 I、II 间有 B 铰相连, 刚片 II、III 间有 C 铰相连, 但刚片 I(AB) 与刚片 III(CD) 间仅有一根链杆 AD 相连, 尚缺一链杆, 因此仅以此三个刚片作为运动主体是不能确定体系是否几何不变。于是应放弃这种组合方式而选取另一种运动主体与约束的组合方式进行分析。

第二次选取方式是放弃上述选相邻杆件作为运动主体的方法, 而从与刚片 I(AB) 相连的杆 BC 及 AD 找到同时与杆 BC 、 AD 相连的另一杆件 CD 作为刚片 II, 同理从与刚片 II

(CD)相连的杆件 CF 及 DE 找到同时与 CF 、 DE 相连的刚片Ⅲ(EF)。选定三个刚片后再按两个几何组成规则进行分析。

三个刚片Ⅰ(AB)、Ⅱ(CD)、Ⅲ(EF)由不共线的三个瞬铰 A 、 C 、 E 相连。由规则二知,该体系为几何不变体且无多余约束。

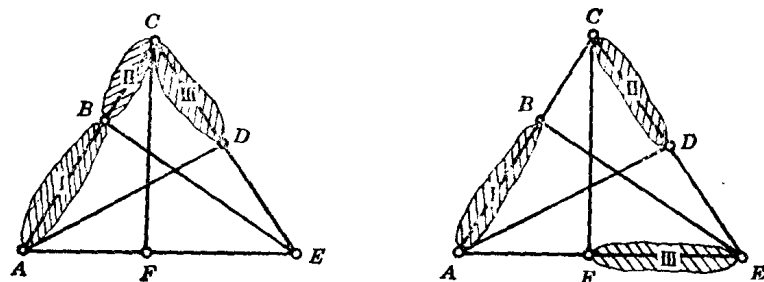


图 1-16

错误分析:

类似例 1-1 所犯错误,把 ACF 视作一个刚片(图 1-15),再以此逐个组装二元片 $AD \sim CD$, $FE \sim ED$,则体系几何不变且有一多余约束 BE 。

例 1-3 试对体系进行几何组成分析(图 1-17)。

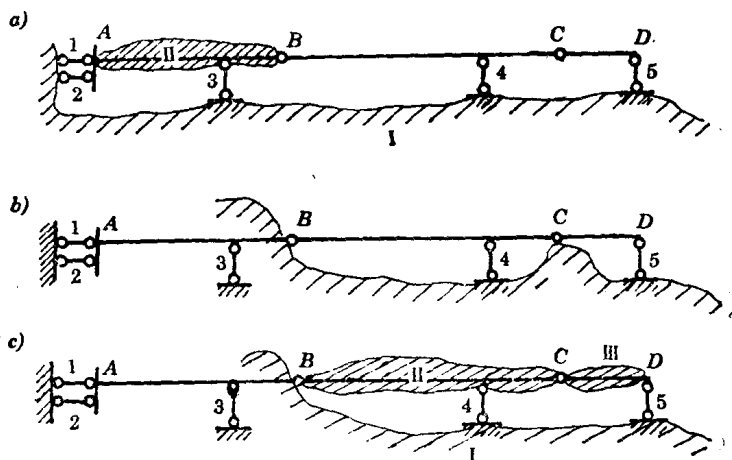


图 1-17

解

把 AB 杆看作刚片Ⅰ,基础视作刚片Ⅱ,则两刚片间由滑动支座 A 处的两根平行链杆1、2和链杆3相连,且三链杆既不平行又不交于一点,故 AB 被固定于基础成为几何不变的整体,如图 1-17b 所示。再把杆 BC 作为刚片,它通过实铰 B 和支杆4与基础相连,则 BC 杆又被固定于基础成为几何不变的大刚片。增加二元片(CD 与支杆5)于大刚片(基础)上,则整个体系几何不变。

错误分析:

基础通过不平行也不相交于一点的三支杆与刚片 AB 相连(图 1-17c), 则 AB 被固定于基础成为大刚片 I。

再取 BC 为刚片 II, CD 为刚片 III, 则刚片 I、II 由实铰 B 相连, 刚片 II、III 由实铰 C 相连, 刚片 II、III 由支杆 4、5 相连则体系几何不变。

例 1-4 试对体系进行几何组成分析(图 1-18)。

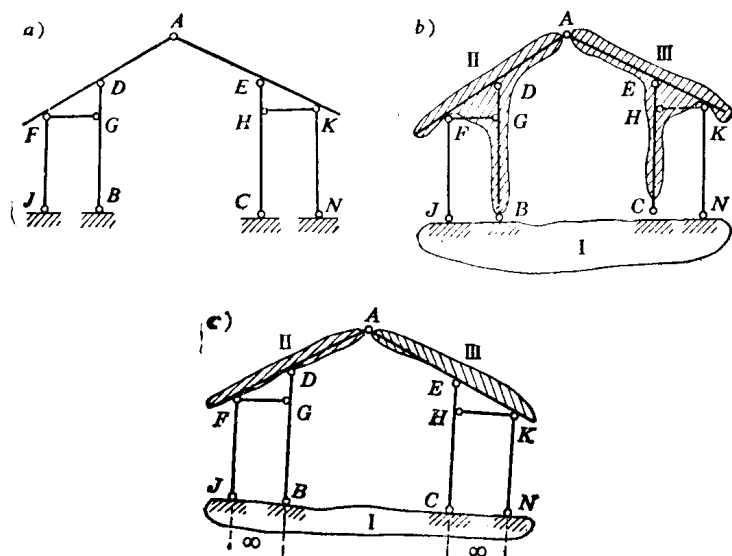


图 1-18

解

选运动主体为刚片 I(地基)、刚片 II($ADFGB$)、刚片 III($AEKHC$), 用不共线的三个实铰 A 、 B 、 C 相连, 则由三刚片规则, 体系几何不变且有两个多余约束 KN 、 FJ 。

错误分析:

选运动主体为刚片 II(ADF)、刚片 III(AEK)、刚片 I(基础), 三刚片用共线的一实铰 A 和两个无穷远虚铰相连, 则体系几何可变且有两个多余约束 FG 、 HK 。

错误原因在于把杆 DB 及杆 EC 误认为链杆, 虽杆两端用铰与其他杆相连, 但在杆中 $G(H)$ 处还与杆 $FG(HK)$ 相连, 故不能忽视它们的约束作用。

通过以上几个例子可见, 运动主体(刚片)的选定、简化以及正确无误地确定约束(链杆与铰)的作用, 是对体系进行几何组成分析的关键。

2. 混淆铰与链杆的不同作用

例 1-5 试对体系进行几何组成分析(图 1-19)。

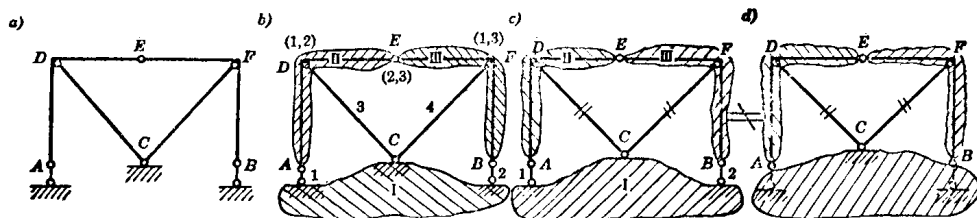


图 1-19

解

选运动主体为刚片 I (基础)、刚片 II (ADE)、刚片 III (EFB), 三刚片由共线的三铰 D、E、F 相连(其中虚铰 D 和 F 分别为支杆 1 与 3 和支杆 2 与 4 的交点), 则体系几何可变。

错误分析:

去两元片 CD~CF, 把基础扩大至铰 A 与铰 B 处(图 1-19d), 分别取基础为刚片 I, EDA 为刚片 II, EFB 为刚片 III。则三刚片由不共线的三铰 A、B、E 相连, 则体系几何不变。

错误在于把支杆 1、2 的约束作用与铰 A、B 的约束作用等同起来。构件 CD~CF 也不是二元片。

例 1-6 试对体系进行几何组成分析(图 1-20)。

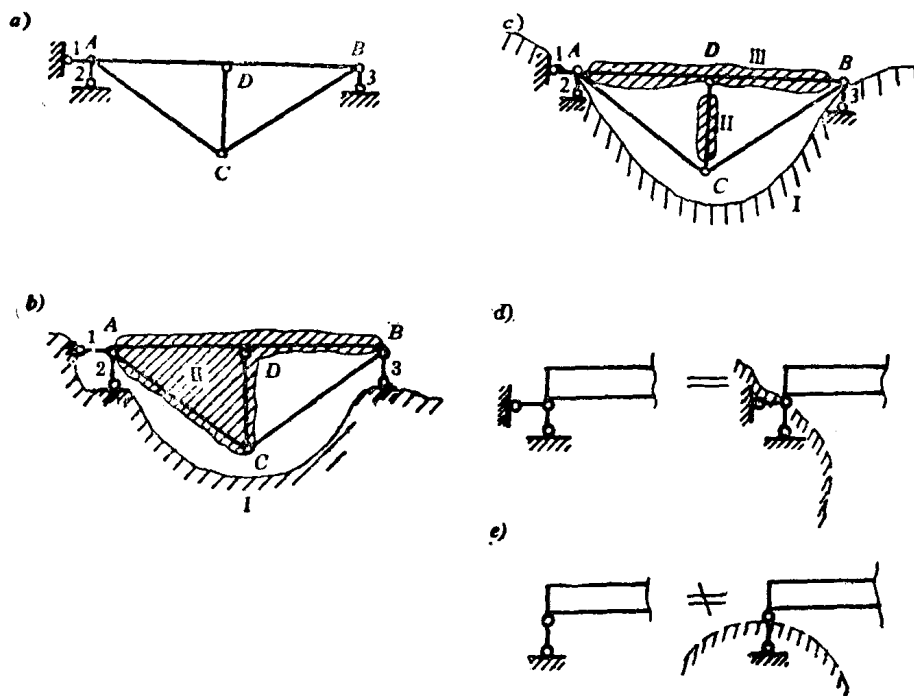


图 1-20

解

把基础作为刚片 I, ACDB 作为刚片 II, 由两刚片规则, 刚片 I、II 由不平行也不交于一点的三支杆 1、2、3 相连, 则体系几何不变且有一多余约束(图 1-20b)。

错误分析:

取基础作为刚片 I, CD 为刚片 II, AB 为刚片 III, 则三刚片由实铰 A、D 和 C 相连, 由三刚片规则知体系几何不变无多余约束。错误在于混淆了支杆 3 和铰 B 的作用(图 1-20e)。

从约束作用来看, 支杆 3 只限制杆端的竖向位移, 而铰 B 能同时限制杆端的水平位移与竖向位移。

3. 二元片判断错误

例 1-7 试对体系进行几何组成分析(图 1-21)。

解

拆去二元片 HG~GK 不影响下部结构的几何组成性质。取运动主体刚片 I (EA)、刚片 II (EB)、刚片 III (基础), 三刚片用不共线的三个铰 E、D、F 相连, 则体系几何不变(图 1-

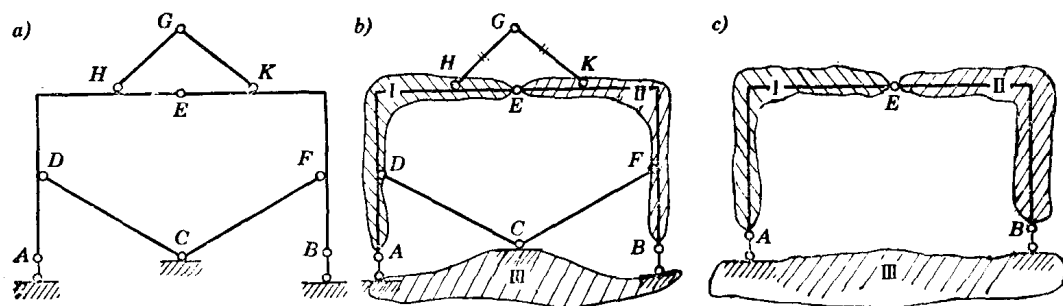


图 1-21

21b)。

错误分析:

拆去二元片 $HG \sim GK$ 和二元片 $DC \sim CF$ (图 1-21c), 把 AE 作为刚片 I, EB 作为刚片 II, 基础作为刚片 III, 则因缺少必要的链杆体系几何可变。

错误在于把杆 $DC \sim CF$ 误认为二元片。因为 C 点为基础上不动点, 它通过链杆 DC 、 CF 与刚架 AEB 相连, 影响了整体的几何性质, 故 $DC \sim CF$ 不是二元片 (增、减二元片不影响体系几何性质)。

类似错误还发生在下面的情况中:

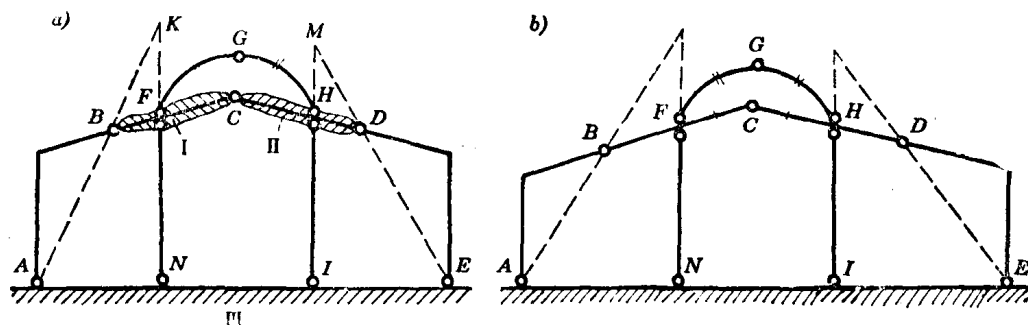


图 1-22

如图 1-22b, 拆去二元片 $FG \sim GH$ 、 $BC \sim CD$, 则体系几何可变。这是错误的分析方法, 因 $BC \sim CD$ 不是二元片。

正确的分析:

拆去二元片 $FG \sim GH$, 把 BFC 当作刚片 I, CHD 作为刚片 II, 基础作为刚片 III。三刚片用不在一直线的三铰 C 、 K 、 M 相连, 则体系几何不变 (图 1-22a)。

4. 错误的等效置换

例 1-8 分析体系的几何组成 (图 1-23)。

解

把 AB 作为刚片 I, CD 作为刚片 II, CE 作为刚片 III。三刚片用不共线的三铰 [实铰 C 、两无穷远虚铰 (1, 3)、(1, 2) 相连], 则体系几何不变 (图 1-23b)。

错误分析:

运动主体刚片 I (AB)、刚片 II (CD)、刚片 III (CE), 折杆 AD , BE 用等效直链杆 1、4 代

替, 则三刚片 I、II、III 用不共线三铰 $A(1, 2)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(2, 3)$ 相连, 则体系几何不变。

显然, 错误在于杆 3 不是连结刚片 I、II 的链杆, 杆 2 也不是连结刚片 I、III 的链杆。也就是说, 只有连接相同两个刚片的两根链杆, 才能用铰作等效置换。

同理, 图 1-24 的等效置换才是正确的。

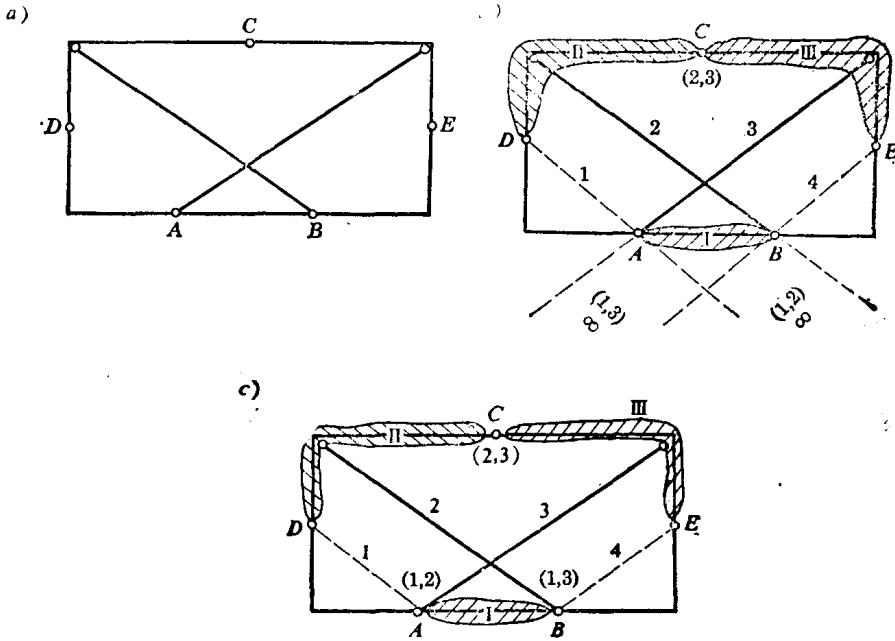


图 1-23

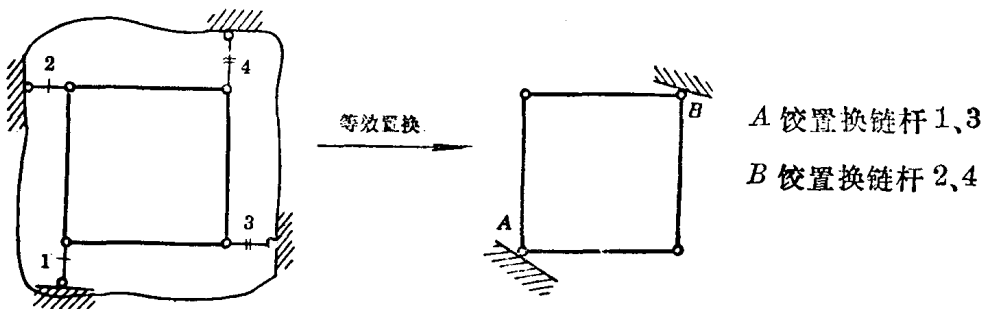


图 1-24

有时还可以多次置换(图1-25)。

5. 一杆两用的错误

例 1-9 分析体系的几何组成(图 1-26)。

解

拆去二元片 $AB \sim AK$ 、 $CD \sim DE$ 。取运动主体为刚片 I(BCJ)、刚片 II(HGK)、刚片 III(EF)，三刚片由不共线的三铰(K 、 E 和一个无穷远虚铰)相连, 则体系几何不变, 且无多余约束(图 1-26b)。

错误分析:

先分析局部(图 1-26c), 再组装成整体来进行分析。

取运动主体为刚片 I(HJ)、刚片 II(JC)、刚片 III(EF)，三刚片由共线的三铰(实铰 J 、虚