材料力学
测试原理及实验

曹以柏　徐温玉　编

航空工业出版社

第一篇　测试原理

第一章　绪　论

§1-1　引　言

任何科学技术的发展都离不开试验和测量，人们为了认识和改造客观世界就要以测试工作为基础。人类最早的测量是从长度、面积、重量和时间开始的，随着科学技术的发展，人们研究的对象越来越复杂，测量的范围也越来越广泛，材料力学测试仅仅是其中的一个方面。材料力学测试包括常用材料基本力学性能的测试及应力、应变测试等。

研究工程强度问题可以有两种不同的途径，即理论应力分析和实验应力分析。实验应力分析是材料力学测试的一个重要部分，也是本课程的主要研究内容。实验应力分析是用实验分析方法确定受力构件的应力、变形状态的一门学科。通过实验应力分析可以检验和提高设计质量，可以提高工程结构的安全度和可靠性，并且达到减少材料消耗、降低生产成本和节约能源的要求。它还可为发展新理论、设计新型结构、创造新工艺以及应用新材料提供依据。实验应力分析不仅可以推动理论分析的发展，而且能有效地解决许多理论上不能解决的工程实际问题，因此它和应力分析理论一样，是解决工程强度问题的一个重要手段。

实验应力分析的方法很多，有电测法、光测法、机械测量法等。随着科学技术和工农业的高速度发展，对应力和应变测试技术也提出了更高的要求。目前测试技术正在向宏观测试和微观测试纵深发展，同时许多科学领域的新成就也给测试技术提供了丰富的物质条件，首先反映在测试方法和仪器设备的改进中，例如半导体技术、激光、光导纤维、声学、计算技术、遥感技术、自动化技术等，此外一大批精度高、灵敏度高、测量范围大的传感器已开始投入使用。可以预期，由于微电子技术和计算机技术的发展将使测试技术发生根本性的变化。

材料力学测试原理及实验是一门综合性课程，它牵涉的知识面较广。学习者除了必须具备应力分析理论、误差分析、数据处理等基础知识外，还必须掌握有关电学、光学等技术知识。此外，本课程具有很强的实践性，在学习中要密切联系实际，掌握实验方法的基本原理和实验技能，培养自己初步具有处理实际测试工作问题的能力。

§1-2　测量的基本概念

测量就是用一定的工具或仪器设备来确定一个未知量数值的过程。测量方法可分为直接测量和间接测量。在测量过程中，有时可以把被测量与同性质的标准量进行比较，例如测量物体的质量，可以通过磅秤与天平的砝码与被测物进行比较。有时则无法将被测量与标准量

直接比较，而是要作一些变换后才能进行比较，例如用压力表测量容器中的气体压力时，必须将压力变换成压力表上指针的刻度。以上两种类型的测量都称为直接测量。但是有许多的物理量、机械量、以及生物医学参量无法用简单的直接测量方法得到。例如用电测法进行测量时，是把被测的非电量通过各种相应的传感器变换成电参量，并将该电参量放大或转换，再送入显示或记录仪器，或送入计算机处理，从而得到被测量，这种测量方法就是间接测量。为了使测量结果得到确认，用来进行比较的标准必须准确并得到公认，此外进行比较所用的方法和仪器必须经过校验。

采用间接测量方法时，需要有一个测量系统。一个完整的测量系统包括以下三部分：

1. 传感级：用来感受被测量，并变换为电量。
2. 中间级：用来将电量进行变换、放大等。
3. 终端级：是一个指示器、一个记录仪或某种形式的控制器，或者是上述几种仪器的组合。

当被测量不随时间变换，或随时间变换非常缓慢时，评价一个测量系统的品质主要是以测量系统的静态特性来衡量的。进行测量时，测量系统的输入和输出的关系曲线称为静态特性曲线。测量系统的静态特性，即指静态特性曲线形状的一些性能，它主要考虑以下几方面：

一、线性度

测量系统的静态特性曲线在理想情况下是线性的，但实际上往往并非如此。图 1-1 中曲线 a 表示静态特性曲线，曲线 b 为曲线 a 的拟合直线。静态特性曲线与拟合直线之间的最大偏差 $|y_i-y_i'|_{max}$ 与全量程输出范围 y_{max} 比值的百分数称为测量系统的线性度。即

$$线性度=\frac{|y_i-y_i'|_{max}}{y_{max}}\times 100\% \qquad (1\text{-}1)$$

线性度说明静态特性曲线与拟合直线的吻合程度。

二、灵敏度

灵敏度是指测量系统输出量的变化量 Δy 与输入量的变化量 Δx 的比值，即

$$灵敏度=\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1\text{-}2)$$

它代表静态特性曲线上相应点的斜率。若静态特性曲线为直线，则灵敏度为常数。若静态特性曲线不是直线，则灵敏度为变量，它随输入量的变化而变化。

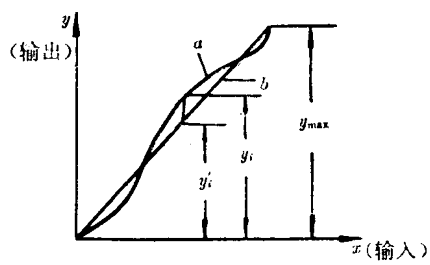

图 1-1 测量系统的线性度

三、滞后

滞后表示测量系统当输入量由小到大和由大到小变化时所得输出量不一致的程度。如图 1-2 所示，同一输入量时的输出量的偏差 $|y_d-y_c|$，称为滞后偏差。最大滞后偏差 $|y_d-y_c|_{max}$ 与全量程输出范围 y_{max} 比值的百分数称为测量系统的滞后。即

$$滞后=\frac{|y_d-y_c|_{max}}{y_{max}}\times 100\% \qquad (1\text{-}3)$$

四、灵敏限和分辨率

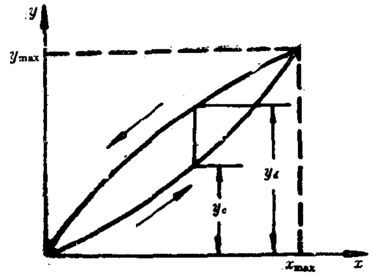

图 1-2　测量系统的滞后

当输入量由零逐渐加大时，存在着某个最小值，在该值以下，系统不可能检测到输出，这个最小值一般不易确定，为此规定了一个最小输出值，而与它相应的输入值即为系统能够检测到输出的最小输入值，称为灵敏限。如果输入量从任意非零值缓慢地变化，将会发现在输入变化值没有超过某一数值之前，系统不可能检测到输出变化，因此存在一个最小输入变化量。为便于确定，规定了一个最小输出变化量，而与它相应的输入变化量即为系统能够检测到输出变化的最小输入变化量，称为分辨率。一般指针式仪表的分辨率规定为最小刻度分格值的一半，数字式仪表的分辨率是最后一位的一个字。

当被测量随时间快速变化或具有瞬态现象时，测量系统的品质是以系统的动态特性来评价的，如振幅响应、频率响应等。

§1-3　实验应力分析方法

实验应力分析的方法很多，下面简单介绍电测法、光测法及机械测量法。

一、电测法

有电阻、电容、电感等多种方法。其中以电阻应变测试方法应用较为普遍。电阻应变测试方法是用电阻应变片测定构件表面的应变，再根据应变—应力关系确定构件表面应力状态。这种方法可用来测量模型或实物表面的应变。它具有很高的灵敏度和精度，由于测量时输出的是电信号，因此易于实现测量数字化和自动化，并可进行遥测。电阻应变测量可以在高温、高压、高速旋转、强磁场、液下等特殊条件下进行。此外它还可以对动应力进行测量。还由于电阻应变片具有体积小、重量轻、价格便宜等优点，因此电阻应变测试方法已成为实验应力分析中应用最广的一种方法。该法的主要缺点是，一个电阻应变片只能测量构件表面一个点在某一个方向的应变，不能进行全域性的测量。

二、光测法

包括光弹性、全息干涉、散斑干涉、云纹等方法。其中以光弹性法应用比较广泛，它是利用偏振光通过具有双折射效应的透明受力模型获得干涉条纹图，因此可以直接观察到模型的全部应力分布情况，特别是能直接看到应力集中部位，并可迅速确定应力集中系数。此外，光弹性法不仅可以测定模型的边界应力，而且可以测定模型的内部应力。这种方法的缺点是周期长，成本较高。

三、机械测试法

该方法是利用引伸仪测定试件的变形，从而得到在载荷作用下的应变。由于变形一般都很小，要经过放大后才能指示。常用的放大机构有杠杆和齿轮两种，前者称为杠杆引伸仪，后者称为表式引伸仪。由于引伸仪体积大、重量较重、使用不方便，所以已逐渐为其它方法所代替。

第二章　误差分析和数据处理

当对某物理量进行测量时，由于测量方法和测量设备的不完善、周围环境的影响和人们认识能力的限制等因素，使被测量的真值和实验所得结果之间存在一定的差异，这就是测量误差。随着科学技术的发展，虽然可将误差控制得越来越小，但终究不能完全消除。误差的存在是必然的、普遍的。误差的存在使人们对客观现象的认识受到不同程度的歪曲，甚至得出虚假的结论或错误的判断。因此必须对误差进行研究，分析其产生的原因，表现的规律，以便消除或减少。

测得量的原始数据一般形式上是参差不齐的，因此需要运用数学的方法加以精选、加工，从中引出反映客观事物内部规律性的东西，从而获得可靠的、真正反映事物本质的结论，这就是数据处理。

测试技术的发展与误差分析和数据处理的发展紧密相关。在新技术、新科学规律的突破和发现过程中，测量是必不可少的；而误差分析和数据处理则是判断科学实验和测量结果的质量和水平的主要手段。

误差分析和数据处理已是一门独立课程，这里只是根据力学测试的需要扼要地介绍一些基本概念和结论，

§2-1　误差的基本概念及定义

一、误差的定义和表示方法

测量误差是指某被测量的实测值或测量值与其真实值（或真值）的差别。测量值与真值偏离的大小，常用以下几种指标来表示。

（一）绝对误差

指测得值与真值之差，可写成：

$$绝对误差 = 测得值 - 真值$$

一般情况下真值是未知的，为了进行误差计算，可以用真值的近似值（例如测得值的算术平均值）来代替。在有些情况下，真值被认为是已知的，它们是：

1. 理论真值：指根据理论公式计算所得到的结果，例如由欧姆定律求得的电流，由转动时角速度求得的圆周速度等。

2. 规定真值：指国际上公认的某些基准量，例如，规定“一米等于光在真空中在1/299792458秒时间间隔内所行进的路程”。

3. 相对真值：指量具按精度不同分为若干等级，上一等级的指示值即为下一等级的真值，此真值为相对真值。

（二）相对误差

指绝对误差与被测量真值之比，可写成：

$$相对误差 = \frac{绝对误差}{被测真值} \times 100\%$$

用相对误差便于评价测量精度的高低。

（三）引用误差

指仪表的最大示值误差与仪表的测量上限或量程之比，可写成：

$$引用误差 = \frac{仪表的最大示值误差}{仪表的测量上限值}$$

引用误差被用来确定仪表的精度等级。

二、误差的来源

（一）测量装置误差

包括试验设备，测量仪器及仪表带来的误差，如设备加工粗糙、安装调试不准确、仪表非线性、滞后、刻度不准以及元件间摩擦或间隙等带来的误差。

（二）环境误差

主要指环境的温度、湿度、气压、振动、电场、磁场等与要求的标准状态不一致，引起测量装置和被测量本身的变化所造成的误差。

（三）方法误差

指测量的方法不准确或错误引起的误差。例如用钢卷尺测量圆柱体的直径，方法本身就不合理。

（四）人员误差

指测量者的分辨能力、熟练程度、精神状态等因素引起的误差。

三、误差的分类

（一）随机误差

在相同条件下，对同一对象进行多次测量时，有一种大小和符号都具有随机性变化而无确定规律的误差称随机误差或偶然误差。随机误差就个体而言，从单次测量结果来看是没有规律的，即大小、正负都不确定，但对一个量进行多次测量后就可发现，随机误差符合统计规律。

（二）系统误差

在同一条件下对同一对象进行多次测量时，测量误差的绝对值和符号保持不变，或在工作条件改变时，按某一确定的规律变化的误差，称为系统误差。系统误差由于其数值恒定，或具有一定的规律性，因此可以设法予以排除或对测量予以修正。

（三）粗大误差

由于测试人员的粗心大意而造成的误差。例如，测试设备或测试方法使用不当，实验条件不合要求，错读、错记等造成明显歪曲测试结果的误差。含粗大误差的数据，称为坏值或异常值，必须加以剔除。粗大误差一般由于数值特别大故容易发现。因此在误差分析中要估计的误差只有随机误差和系统误差。

四、测试数据的精度

习惯上所说的精度是一个说明测试数据对真值偏离程度的笼统概念，误差小则精度高，误差大则精度低。实际上测试数据的精度是由系统误差和随机误差的综合影响决定的，具体可分为：

(一)准确度：反映系统误差的大小和程度，表示测试数据的平均值与被测量真值的偏差。

(二)精密度：反映随机误差的大小和程度，表示测试数据相互之间的偏差，亦即重复性。精密度高，则测试数据比较集中。

(三)精确度：反映系统误差和随机误差合成的大小和程度，精确度高则系统误差和随机误差都小，因而其准确度和精密度必定都高。

准确度、精密度和精确度三者的含义，可用图 2-1 所示打靶的情况来比喻。图中 (a) 表示精密度很高，即随机误差小，但准确度低，有较大的系统误差；(b) 表示精密度不如(a)但准确度较(a)高，即系统误差较(a)小；(c) 表示精密度和准确度都高，随机误差和系统误差都小，即精确度高。

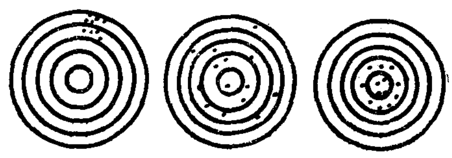

图 2-1　数据精度比较示意图

§2-2　随机误差

为了使测量尽量接近真值，往往要进行多次的重复测量，例如要知道一批产品的某一项性能指标，需要检测其中相当数量的产品，由于每次测量的对象都有一定的能变性，即与某平均值有或多或少的偏差，所以在测量前是无法预言的，这种量称为随机变量。

随机误差属于这一类变量。随机误差是由多种已知和未知的因素微小变动的结果，就其中每一单个误差来说并无确定的规律，但就相同条件下一组误差的总体而言，都具有统计规律。这种规律集中表现在误差值与其出现机率的关系上，即概率分布关系。为了进行误差分析，首先要研究其分布规律。

一、正态分布规律

对同一个量进行等精度的多次重复测量后，发现随机误差的分布有以下特点：

(一)对称性：绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相等；

(二)单峰性：绝对值小的误差出现的概率大，而绝对值大的误差出现的概率小；

(三)有限性：在有限次测量中，绝对值很大的误差出现的概率近于零；

(四)抵偿性：随着测量次数的增加，随机误差 ε_i 的代数和 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ 趋近于零。这就是增加测量次数可以提高测量精度的理论根据。

二、正态分布曲线

高斯于 1795 年提出以下解析式来表示正态分布的误差值与其出现概率之间的函数关系，即

$$y = p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2} \qquad (2\text{-}1)$$

式中 y——误差 ε 出现的概率密度；

σ——均方根差或标准差，由下式求得

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2} \qquad (2\text{-}2)$$

ε_i——随机误差

$$\varepsilon_i = x_i - T_s \qquad (2\text{-}3)$$

x_i 为 n 次等精度测量中，每次测量的结果；T_s 为被测量的真值。将分布函数绘成曲线，就得到正态分布曲线或高斯曲线（图 2-2）。

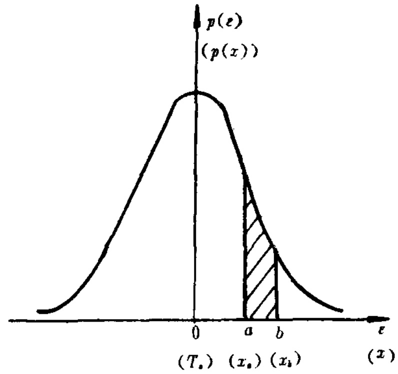

图 2-2　正态分布曲线

图中测量值 x 落在区间 $[x_a, x_b]$ 内的概率，或随机误差 ε 出现在区间 $[a,b]$ 内的概率，为画斜线部分的面积，其计算式为

$$P\{x_a \leqslant x \leqslant x_b\} = \int_{x_a}^{x_b} p(x)dx$$

$$= P\{a \leqslant \varepsilon \leqslant b\} = \int_a^b p(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (2\text{-}4)$$

由式 (2-1) 可见 y 与 ε 的函数关系取决于标准差 σ，因式中 π, e 均为常数，故 σ 为决定高斯曲线形状（陡峭或平坦）的唯一参数。

三、随机误差的评价指标

（一）算术平均值

测量的目的是为了取得被测量 x 的真值 T_s，但由于每次测量不可避免地带有随机误差 ε_i，所以每次测量都得不到真值，但是我们可以通过一组等精度的 n 次测量结果，对被测量的真值作出估计，根据最小二乘法原理，在具有等精度的许多测量值中，能使各测量值误差的平方和为最小的那个值为最佳值。可以证明，最佳值就是算术平均值，即

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \qquad (2\text{-}5)$$

式中 $\bar{x}$ 为各测量值的算术平均值，即逼近真值 T_s 的最佳值或最可信赖值，各测量值与其差值的平方和最小。

算术平均值是最佳值这一点也可以由正态分布曲线上看出。

（二）剩余误差与算术平均误差

剩余误差是测量值与测量值的算术平均值之差，以 δ_i 表示

$$\delta_i = x_i - \bar{x} \qquad (2\text{-}6)$$

一组测量值的剩余误差的代数和等于零，剩余误差的平方和为最小。

算术平均误差是剩余误差绝对值的算术平均值，以 δ 表示

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| \qquad (2\text{-}7)$$

算术平均误差 δ 是一个较好的随机误差的评价参量，它反映了随机误差大小与测量次数有关

的这一重要特点，但它不能反映 $\bar{\delta}$ 相同的两组等精度测量之间的差异，例如，第一组测量中有较多的 $|\delta_{i1}|$ 接近中值，而第二组测量中 $|\delta_{i2}|$ 大部分在大值和小值两端，但两者的 $\bar{\delta}$ 完全可能是相近的。

（三）标准差

分散性是随机误差的一个重要特征，为了表达分散性的大小，可用标准差 σ。由式 (2-2) 可以看出，标准差与 ε_i 的平方值有关，因此对较大的随机误差反应比较灵敏。因此标准差是表示随机误差分散性的较理想的参量，由它可以反映测量的精密度。

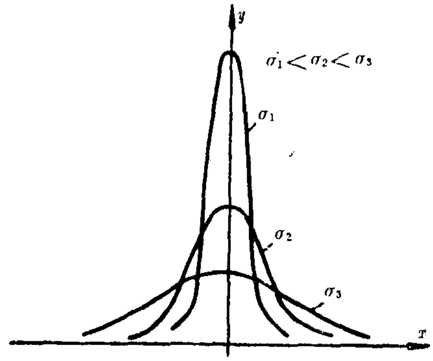

图 2-3 不同 σ 值的正态分布曲线

图 2-3 所示为具有三个不同标准差值 σ_1、σ_2、σ_3 的正态分布曲线。显然，σ 值愈小，曲线愈陡，小误差出现的次数愈多，它表明测量值的分散性较小，也就是说测量的精密度较高，反之，σ 愈大，则测量精密度愈低。

由于真值 T_s 一般无法求得，为此用算术平均值 $\bar{x}$ 代替真值 T_s，并以剩余误差 δ_i 代替随机误差 ε_i。但只有当测量次数无限多时，算术平均值是真值 T_s，而测量次数有限时 $\bar{x}$ 是近似真值，因此 δ_i 与 ε_i 是不相等的。根据测量中正负误差出现的概率相等的特点可以推出

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

由此可见，在有限次数测量时，剩余误差的平方和小于随机误差的平方和。由此得出以剩余误差计算标准差的公式，并以 $\hat{\sigma}$ 来表示

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2} \tag{2-8}$$

在实用中不再区分 σ 和 $\hat{\sigma}$。

下面举例说明用标准差来判断测量结果的分散性。

例 2-1 第一组测量结果为：

100，104，95，99，105，100，101，98，94，100，106。

第二组测量结果为：

96，103，97，102，103，98，102，103，97，103，98。

试求它们的算术平均误差和标准差。

解：

$$\bar{\delta}_1=\frac{0+4+5+1+5+0+1+2+6+0+6}{11}=\frac{30}{11}=2.727$$

$$\bar{\delta}_2=\frac{4+3+3+2+3+2+2+3+3+3+2}{11}=\frac{30}{11}=2.727$$

$$\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{16+25+1+25+1+4+36+36}{11-1}}=\sqrt{\frac{144}{10}}=3.79$$

$$\hat{\sigma}_2=\sqrt{\frac{16+9+9+4+9+4+4+9+9+9+4}{11-1}}=\sqrt{\frac{86}{10}}=2.93$$

所得结果说明，两组测量的算术平均误差 $\bar{\delta}$ 相等，而标准差 $\hat{\sigma}$ 则有较大的差别，说明第一组的分散性较大，第二组则分散性较小，这一点在 $\bar{\delta}$ 中是不易反映出来的。

应该强调指出，σ 值并不是某一次测量中的具体误差，而只是说明一组等精度测量中随

机误差 ε 出现的概率密度分布情况。σ 又是对一组等精度测量中任一次单独测量的随机误差的评价。虽然一组等精度测量中每一次测定的误差一般都不相同，但是每次测量对算术平均值 $\bar{x}$ 具有相同的分散性，即以同一个标准差来衡量。

（四）算术平均值的标准差

只有无限次测量的算术平均值才能逼近真值，随着测量次数的不同，其算术平均值是各不相同的。然而，通常以同一条件下进行有限次测量的算术平均值作为真值，究竟其可靠性如何，是需要研究的。为此以算术平均值的标准差来评价其分散性，经计算可得公式

$$S=\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n(n-1)}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2-9}$$

式中 σ 为单次测量的标准差，S（或$\sigma_{\bar{x}}$）为 n 次测量中算术平均值 $\bar{x}$ 的标准差。

由式（2-9）可见，n 次等精度测量中，算术平均值的标准差要比单次（$n=1$）测量的标准差小 $\sqrt{n}$ 倍。当 n 增大时，测量的精密度也相应增高，但 S（或$\sigma_{\bar{x}}$）的减小与测量次数 n 的平方根成反比（不是与 n 成反比），图 2-4 表示 n 与 $1/\sqrt{n}$ 的关系曲线，可见在 σ 为一定值时，当 $n>10$ 以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 下降得很慢，因此无限增大 n 无实际意义，一般取 $n=5\sim10$ 即足够。

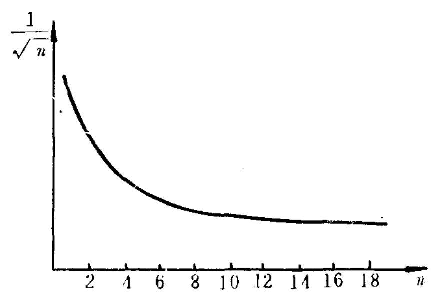

图 2-4　n 与 $1/\sqrt{n}$ 的关系曲线

四、置信概率和极限误差

在一组等精度测量中，大小为 x 的测量值落入某指定区间 $[x_a, x_b]$ 内的概率称为置信概率，该指定区间称为置信区间（见图 2-2）。测量值概率分布可用式（2-1）类似的方程来表示随机变量 x 在 $-\infty$ 到 ∞ 范围内概率密度 y 随测量值 x 而变的函数关系。显然，落在 $-\infty<x<\infty$ 范围内的全部测量值的概率 P 就是 $p(x)$ 曲线与横坐标之间的面积，并且其值等于 1，即

$$P\{-\infty<x<\infty\}=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1 \tag{2-10}$$

其物理意义是：在 $-\infty$ 到 ∞ 范围内，全部随机变量 x 出现的概率为 100%。

测量值落入任意区间 $[x_a, x_b]$ 的概率为

$$P\{x_a\leqslant x\leqslant x_b\}=\int_{x_a}^{x_b}p(x)dx \tag{2-11}$$

当这一概率足够大时，这种测量值就有一定的可信程度。对于一个测量结果来说，置信区间和置信概率结合起来才能说明其可信赖程度（即置信度）。因为对于同一个测量结果来说，置信区间取得宽，其置信概率就大，反之置信区间取得窄，置信概率必然就小。

工程中置信区间值常以 σ 的倍数 $k\sigma$ 来表示，经计算，落入（$T_s\pm\sigma$）区间（即 $k=1$）的概率为 68.3%。这就是说，进行 100 次测量，大约有 68 次的测量值是落在 $\pm\sigma$ 的范围内。如把置信区间扩大到（$T_s\pm2\sigma$）（即 $k=2$），则概率为 95.4%，置信区间为（$T_s\pm3\sigma$）（即 $k=3$）则概率为 99.7%。

由上可知，当置信区间为 $\pm2\sigma$ 及 $\pm3\sigma$ 时，测量值的概率已分别达到 95.4% 和 99.7%，

超出此范围的数值其出现的可能性是极其微小了。根据重要性的程度，可选取不同的置信区间和置信概率作为评定限差标准。一般测量值超出 $T_i \pm 3\sigma$ 的情况不可能发生，因此把 $\pm 3\sigma$ 称为测量结果的极限误差，超过此范围则认为含有粗大误差，可作为坏值予以剔除。极限误差常以 δ_{lim} 表示。

例 2-2 测量某小孔 12 次，测得结果为：

0.375，0.371，0.376，0.374，0.375，0.378，0.373，0.375，0.377，0.376，0.374，0.375；

求：1. 单次测量的极限误差；2. 以算术平均值计算的极限误差。

解：1. 单次测量的极限误差

(1) 求算术平均值

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0.375 + 0.371 + \cdots + 0.375}{12} = 0.375\ \text{mm}$$

(2) 求标准差

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum \delta_i^2} = \sqrt{\frac{0^2 + 0.004^2 + 0.001^2 + \cdots + 0^2}{11}} = 0.018\ \text{mm}$$

(3) 单次测量的极限误差为

$$\delta_{lim} = \pm 3\sigma = \pm 0.054\ \text{mm}$$

这就是说，使用同一台仪器在相同条件下测量小孔一次，测量值不超出

$$\bar{x} \pm 3\sigma = 0.375 \pm 0.054\ \text{mm}$$

的可能性为 99.7%。

2. 以算术平均值计算的极限误差

(1) 算术平均值的标准差

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.018}{\sqrt{12}} = 0.0052\ \text{mm}$$

(2) 算术平均值的极限误差

$$\delta_{\overline{lim}} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \pm 0.016\ \text{mm}$$

即以算术平均值计算的测量结果不超出

$$\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = 0.375 \pm 0.016\ \text{mm}$$

的可能性为 99.7%。

例 2-3 为确定某螺纹内径，共测量 10 次，其读数如下：

18.715，18.713，18.716，18.714，18.715，18.717，18.714，18.715，18.716，18.714(mm)

现要求测量精度不低于 ± 0.0015 mm，问需要多少次读数的平均值？

解：1. 求单次测量的标准差（方法同上例略）

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n-1}} = 0.0012\ \text{mm}$$

2. 单次测量的极限差为

$$\sigma_{lim} = \pm 3\sigma = 0.0036\ \text{mm}$$

由于超出允许值±0.0015mm，故应采用多次测量，取平均值。

3．多次测量算术平均值的极限为

$$\pm 3\sigma_{\bar{x}} = \pm 0.0015 \text{ mm}$$

$$\therefore \quad \sigma_{\bar{x}} = \pm 0.0005 \text{ mm}$$

4．由式(2-9)可求出测量次数为

$$n \geqslant \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2 = \left(\frac{0.0012}{0.0005}\right)^2 \approx 5.76 \approx 6$$

因此，要使测量精度不低于±0.0015 mm，需取6次读数的平均值。

由上所述可见，随机误差不可能从测量过程中消除，但可以通过多次重复测量，以减少其影响，并可用统计分析方法估算出它存在的大小范围。

§2-3 系统误差

系统误差是由固定不变的或按确定规律变化的因素造成的，一般说来这些因素是可以掌握的。例如，使用的工具、仪器不完善，测量方法不妥当，环境影响等。对系统误差要具体分析，它很大程度上取决于测量者的知识水平，经验和技巧。

一、系统误差的分类

按系统误差出现的特点以及对测量结果的影响，可分为定值系统误差和变值系统误差两大类。

（一）定值系统误差

在整个测量过程中，误差的大小和符号都是不变的，例如，测力传感器标定误差、千分尺的调零误差等，它对每一测量值的影响均为一定的常量。

（二）变值系统误差

在测量过程中，误差的大小和符号按一定的规律变化。根据变化的规律又可分为：

1．累积性系统误差：在整个测量过程中，随着测量时间的增长或测量数值的增大，误差值逐渐增大或减小，这样的误差称为累积性系统误差或线性变化系统误差。例如，测量过程中仪器温度逐渐升高，使被测量随时间 t 逐渐增大。又如，千分尺微螺杆螺距的累积性误差，使测量误差随被测量尺寸增大而增大。这类累积性误差与时间 t 或被测量大小 S 成正比，故称“线性误差”。

2．周期性系统误差：误差的大小和符号呈周期性变化，例如，仪器刻度盘或传动齿轮偏心，被测对象安装偏心等，都可引起周期性变化的系统误差。

3．按复杂规律变化的系统误差：这种误差在测量过程中按一定的但比较复杂的规律变化，例如，按对数、指数函数或其它初等函数变化，也可能是经验曲线形式，一般可以将它展成代数多项式或三角多项式来分析它与某因素的关系。

二、系统误差的发现和消除

处理系统误差的关键，在于如何发现它的存在，并分析其属于哪一类系统误差，然后才能将它分离和消除。系统误差的消除或修正，主要靠对测量技术的研究，在测量之前对测量

方法、测量装置的原理与调整、操作方法等仔细分析，预计可能产生系统误差的因素，从而加以消除，或得出未能完全消除的修正量。

（一）定值系统误差的发现和消除

定值系统误差对于每一个测量数据的影响，不论在大小和符号上都是相同的，如在一组测量值为 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 中，每个都含有定值测量误差 Δ_0 和随机误差 $\varepsilon_i (i=1,2,\cdots,n)$，若真值为 T_s，则有

$$\begin{aligned} x_1 &= T_s + \Delta_0 + \varepsilon_1 \\ x_2 &= T_s + \Delta_0 + \varepsilon_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= T_s + \Delta_0 + \varepsilon_n \end{aligned}$$

求和

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = nT_s + n\Delta_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

平均值为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = T_s + \Delta_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tag{2-12}$$

当 n 适当大，$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ 趋于零，则有

$$\bar{x} = T_s + \Delta_0 \tag{2-13}$$

上式表明，在计算平均值时，随机误差可以互相抵消，但定值系统误差 Δ_0 不能排除。因此，如果存在定值系统误差，则应以测量值的平均值减去定值系统误差，才是接近于真值的测量结果，即

$$T_s = \bar{x} - \Delta_0$$

再看一下剩余误差 δ_i，有

$$\begin{aligned} \delta_i = x_i - \bar{x} &= (T_s + \Delta_0 + \varepsilon_i) \\ &\quad - \left(T_s + \Delta_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) \approx \varepsilon_i \end{aligned} \tag{2-14}$$

这表明：定值系统误差对剩余误差无影响，因此对标准差 σ 也无影响，所以在分布曲线上（图 2-5），定值系统误差只引起随机误差分布曲线位置上的平移，而不改变分布曲线的形状。定值系统误差不影响标准差 σ 及极限误差 $\delta_{lim} = 3\sigma$，即不影响测量结果的精密度。由此可见包含于平均值中的定值系统误差，无法从测量值中分离出来，但可以通过以下方法发现和消除。

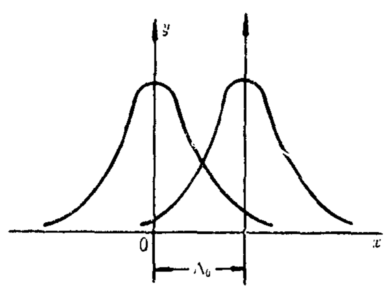

图 2-5 定值系统误差对误差分布的影响

1. 预检法：对测试器具作预先检定，以获得其定值系统误差。方法是将一已知其真值 T_s 的被测件用待检定的测试器具作多次重复测量，以测量值的平均值 $\bar{x}$ 和真值 T_s 的差，作为定值系统误差 $\Delta_0 = \bar{x} - T_s$。此外，也可用多台同类或相近的测试器具进行对比，分析测量结果的差异，以判断有无定值系统误差存在，这种方法一般只说明一种器具对另一种有误差，但不

说明具体哪一种存在误差，除非已知其中有一种是标准器具。

2. 改变测量条件：在测量某一被测量时，作适当变换，使定值系统误差在测量中一次出现为正，另一次出现为负，这样取两次平均值时，定值系统误差恰好相互抵消。

（二）变值系统误差的发现和消除

变值系统误差与定值系统误差不同，它对每一个测量值的影响都不一样。因此，在一组测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中，如果只考虑存在变值系统误差 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，以及随机误差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，若真值为 T_s，则

$$x_1 = T_s + \Delta_1 + \varepsilon_1$$
$$x_2 = T_s + \Delta_2 + \varepsilon_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = T_s + \Delta_n + \varepsilon_n$$

求和

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = nT_s + \sum_{i=1}^{n} \Delta_n + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = T_s + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

当 $n \to \infty$ 时，有

$$\bar{x} \approx T_s + \bar{\Delta} \tag{2-15}$$

式中 $\bar{\Delta}$ 为变值系统误差的平均值。上式表明在计算平均值 $\bar{x}$ 时，由于 $\bar{\Delta} \neq 0$，故仍存在变值系统误差平均值 $\bar{\Delta}$ 的影响，而 $\bar{\Delta}$ 的大小和方向是难以确定的。此外，由于变值系统误差的存在，在剩余误差计算中也不能将它分离，即

$$\delta_i = x_i - \bar{x} = (T_s + \Delta_i + \varepsilon_i) - (T_s + \bar{\Delta}) = \varepsilon_i + (\Delta_i - \bar{\Delta}) \tag{2-16}$$

可见变值系统误差存在于剩余误差中，所以它也对标准差 σ 的估算带来影响，而且影响的大小也难以确定。

由于变值系统误差对整个数据处理的结果都有影响，它不仅会改变误差分布曲线的位置，而且引起分布曲线的形状和实际分布范围的改变。因此，必须发现变值系统误差的存在，然后加以排除。下面介绍两种常用的发现变值系统误差的方法。

1. 剩余误差观察法：在一组测量中，将测量结果剩余误差依次排列起来，如果其大小是有规律朝一个方向变化，譬如从正逐渐变到负(图2-6(a))，或相反，从负逐渐变到正（图2-6(b)），则可能存在递减或递增的变值系统误差。如果发现剩余误差的符号有规律地交替变化(图2-6(c))，则可能存在周期性的变值系统误差。若剩余误差的正负号按测量的顺序来看无一定的规律性（图

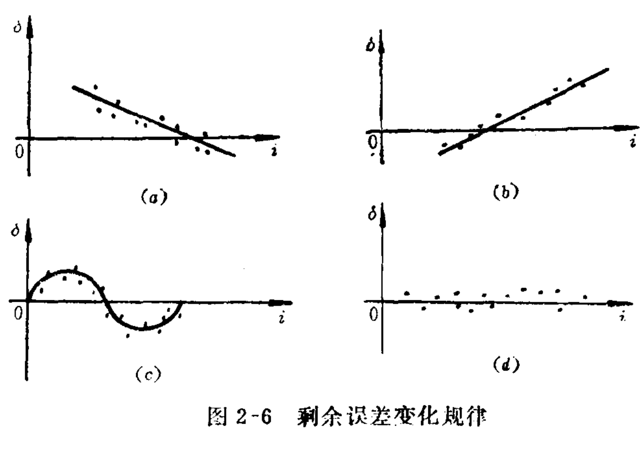

图 2-6 剩余误差变化规律

2-6(d)），则说明不存在较明显变化的变值系统误差。用这种方法来发现变值系统误差时，一般重复测量次数应多于20次，否则效果不好。

2. 剩余误差符号检验法：由于随机误差有相互抵消性，因此剩余误差为正、负号的概率应相等。若以 n_+ 表示正号剩余误差的个数，以 n_- 表示负号剩余误差的个数，当满足

$$|n_+ - n_-| \approx 0 \tag{2-17}$$

时，则可以认为不存在显著的变值系统误差。在重复测量次数 n 较小时，这种方法不太可靠，因为它只考虑了剩余误差符号个数的相消性，而未考虑剩余误差数值大小的相消性，因此只能粗略地判断变值系统误差的存在与否。

一般情况下系统误差都不可能完全消除，而只能把它降低到一定程度使其对测量结果的影响小到可以忽略不计。系统误差被认为已消除的准则是：如果系统误差或残余系统误差代数和的绝对值不超过测量结果总误差绝对值最后一位有效数字的一半，则认为系统误差已被消除。

§2-4 误差处理

一、误差合成

（一）随机误差的合成

如果在一组测量结果中存在 n 项互不相关的随机误差，设每一项随机误差的标准差分别为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$，则 n 个随机误差综合作用的结果，其误差仍为随机误差，它的标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{2-18}$$

在多数情况下，我们已知 n 个随机误差的极限误差 $\delta_{lim1} = \pm 3\sigma_1$，$\delta_{lim2} = \pm 3\sigma_2$，$\cdots$，$\delta_{limn} = \pm 3\sigma_n$，它们的极限值为

$$\delta_{lim} = \pm 3\sigma = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta^2_{limi}}$$

$$= \pm\sqrt{\delta^2_{lim1} + \delta^2_{lim2} + \cdots + \delta^2_{limn}} \tag{2-19}$$

（二）系统误差的合成

1. 定值系统误差：n 个定值系统误差 Δ_1，Δ_2，$\cdots$，Δ_n 产生的综合误差 Δ 仍为定值系统误差，其数值为

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n \tag{2-20}$$

2. 变值系统误差：变值系统误差的特点是：尽管我们无法确定它们的具体数值，但可确定它们的极限变动范围，其合成方法与随机误差相同。若已知 n 个变值系统误差的极限变动范围为 $\pm e_1, \pm e_2, \cdots, \pm e_n$，其综合误差 $\pm e$ 仍为变值系统误差，可按下式计算

$$\pm e = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \pm\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2} \tag{2-21}$$

二、等精度测量的数据处理

等精度测量是采用相同的测量基准、测量工具与测量方法，在同样的测量环境下，由同一个观察者进行的测量。

在等精度条件下对同一测量值进行 n 次测量的处理步骤：

1． 求算术平均值 $\bar{x}$，由式 (2-5)

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

2． 计算剩余误差，由式 (2-6)

$$\delta_i=x_i-\bar{x}$$

3． 判断一组测量结果是否存在定值系统误差或变值系统误差。对于定值系统误差应确定其数值，并在测量结果中加以修正；对于变值系统误差，则应确定其性质，查明其产生原因，并设法减少其对测量结果的影响。

4． 求单次测量的标准差，由式 (2-8)

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

5． 判断测量结果是否含有粗大误差。若

$$|\delta_i|_{max}\leqslant 3\sigma$$

则表示测量数据不含粗大误差，反之，则存在粗大误差，应剔除该数据，并从步骤 1 开始重新进行。

6． 求算术平均值的标准差，由式 (2-9)

$$S=\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

7． 求测量结果的极限误差

$$\pm\delta_{lim}=\pm 3\sigma_{\bar{x}}$$

8． 最后测得结果为

$$x=\bar{x}\pm\delta_{lim}=\bar{x}\pm 3\sigma_{\bar{x}}$$

如果测量中含有定值系统误差 Δ_0，其数值应从测量结果中减去，如果含有变值系统误差 $\pm e$，应写在测量结果中，因此有

$$\begin{aligned}x&=(\bar{x}-\Delta_0)\pm e\pm\delta_{lim}\\&=(\bar{x}-\Delta_0)\pm e\pm 3\sigma_{\bar{x}}\end{aligned}$$

式中　$\bar{x}$——测量结果的算术平均值；

Δ_0——定值系统误差；

$\pm e$——变值系统误差的极限变动范围。

§2-5　有效数字及其运算法则

一、有效数字

在测量与数值计算中，用 n 位数字来代表测量和计算结果，使之既保证一定的准确度，又不致造成不必要的繁琐计算，这是很重要的。有人认为，在一个数值中，小数点后的位数越多，这个数字就越准，或在计算过程中，保留的位数越多，结果的准确度就越高，这些看法实际上是错误的。因为，小数点后的位数并不是决定准确度的标准，而是取决于所使用的单位。例如某构件长度经测量是 3542 mm，也可以表示为 3.542 m，其准确度完全相同。又如

钢的弹性模量 $E \approx 196 \sim 216$ GPa 或 $E \approx 196 \sim 216 \times 10^3$ MPa 其有效数字都是三位。此外，在测量时如果由于各种条件的限制，其准确度是一定的，则无论写多少位数字，都不可能超过测量所能达到的准确范围。数字越多只能给记录和计算带来不必要的麻烦。因此，在测量和数值计算过程中，确定有效数字是非常重要的。

当用直读式仪表测量时，读数要估计到刻度的分数，而不是某一格。例如，某压力表的量程是200MPa，最小刻度是 1 MPa，若读数是 122.5MPa，则四个数字中前三个 122 是十分可靠的，而末一位 0.5 则是估计出来的，虽欠准确，但对测得结果还是有意义的，因此称这四个数字为有效数字。一个数字有 n 个有效数字，也叫这个数有 n 个有效数位。如 3.1416、2.1173、180.00，均为五位有效数，而 0.00274、274、27.4，则均为三位有效数。

一般在判断有效数字时，要特别注意 0 这个数字，它可以是有效数字，也可以不是有效数字。其判断规则可归纳为以下三点：

1. 当"0"处于有效数字中间时，均为有效数字，例如 100.1、1001，中间两个"0"都是有效数字，这两个数都是四位有效数字。

2. 当"0"处于第一个非"0"的数字之前时，都不是有效数字，例如 0.00274 中三个"0"都不是有效数字，因为这与表示的量所取的单位有关。例如原来是 0.00274 米，现在改成毫米，则可写成 2.74 毫米，三个"0"都去掉了，因此实际有效数字是三位。

3. 当"0"处于数字的最末一位，如果有小数点，则"0"是有效数字。例如，1.000、10.10、.001010，都是四位有效数字。如果没有小数点则容易混淆。例如 1010 这个数字，末尾那个"0"究竟是否有效，很不明确，为了避免混淆，最好附上小数点，或以指数形式表示。例如，1010 这个数如果四位都是有效数字，则应写成 1010. 或 1.010×10^3。

一个数究竟取几位，取决于有效数字的位数。当有效位数确定后，其余数字应一律舍去。取舍的原则是四舍五入法，即凡末位有效数字后的第一位数大于5，则在其前位增加 1；小于5，则舍去不计；若等于5，如前一位为奇数则加 1，如前一位为偶数，则舍去不计，使之保留的有效数字末位为偶数。例如，27.025 和 27.035 这两个数，取四位有效数字时，则分别为 27.02 和 27.04。由上可知，经四舍五入后的数字带来的误差不会大于该数末位的 ±0.5 个单位。

在数值计算中，凡有 e、π、$\sqrt{3}$……这些数时，有效位数不受限制，需要几位就取几位。

由上可知，无论是直读式仪表，直记数值的误差，还是经四舍五入后列入的误差，凡是误差的绝对值小于或等于末位数的半个单位时，则该数从第一个非零数字算起的全部数字称为有效数字。

二、运算法则

（一）加减法运算

在加减法运算中，各数所保留的小数点后的位数，应与所给各数中的小数点后位数最少者相同，或者以小数点后位数最少者为准，再在其余各数小数点后多取一位，但最后结果应与小数点后位数最少者相同。例如有以下各数相加

$$105.73 + 56.3 + 2.412 + 0.078$$

则得 $$105.7 + 56.3 + 2.4 + 0.1 = 164.5$$

或 $$105.73 + 56.3 + 2.41 + 0.08 = 164.52 \text{ 或 } 164.5$$