全国著名教学专家、扬州中学特级教师张乃达总主编

CHUZHONGJIETI XINSILU

初中几何解题新思路

A

主编 张乃达

長春出版社

张乃达，数学特级教师，江苏省有突出贡献的中青年专家，中国数学会会员，江苏省思维与数学教学研究协作组负责人。长期从事中学数学教学的实践与研究工作，并在有关数学思维与数学教学的研究方面取得了一系列成果。他首先提出的"数学教学要充分暴露数学思维过程的教学原则"已经被写进教学大纲，成为重要的教学指导原则。其代表作《数学思维教育学》荣获全国首届光明杯优秀著作奖。

CHUZHONGJIETIXINSILU

初中几何解题

新思路

总主编
主　编　张乃达
编　写　许克定　潘欣生
　　　　佘　宁　鲁杨公等

长春出版社

图书在版编目(C I P)数据

初中几何解题新思路/张乃达主编.—长春:长春出版社,2001.6(2001.9重印)
(初中解题新思路/张乃达总主编)
ISBN 7-80664-239-0

Ⅰ.初... Ⅱ.张... Ⅲ.几何课-初中-解题
Ⅳ.G634.635

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第031315号

责任编辑:张云峰　　封面设计:郝　威

长春出版社出版
(长春市建设街43号)
(邮编130061　电话8569938)
长春市正泰印务公司制版
吉新月历公司印刷分公司印刷
新华书店经销
850×1168毫米　32开本　32.25印张　752千字
2001年6月第1版　2001年9月第2次印刷
印数:7 001-13 000册　定价:34.80元

前 言

21世纪的教育应该是素质教育，它致力于提高学生的全面素质，特别注意培养学生的创新意识和创新能力。

提高教师的素质是成功地实施素质教育的关键，既要切实有效地减轻学生的学习负担，又要全面地提高学生的成绩，就必须具有高水平的教师。本书就是为了提高教师的素质，帮助教师实施素质教育而编写的教学参考书。

丛书具有如下的特点：

1. 系统性。系统地阐述学科的解题思想、策略、方法和技巧，能切实有效地提高读者的解题能力。

2. 实用性。丛书的内容及时地反映学科教学的变化和特点，能满足教师在课堂教学、竞赛辅导、课外活动等方面的实际需要。

3. 工具性。本丛书具有工具书的性质，为教师提供一个小型“题库”，能切实地帮助教师解决教学中的疑难问题，并便于查询。

为此，本书在内容的取舍和编排的体例上都作了精心的安排。

本书包括下列内容：

(1) 列入大纲和教材的有关内容；

(2) 学科竞赛、课外活动涉及的内容；

(3) 教师在解题方法方面应该掌握的内容。

并特别注意编写以下内容：

(4) 学科方法论（基本解题思想、方法、策略等）；

(5) 近期中考反映出的新题型、新要求；

(6) 应用问题和趣味问题。

为了突出本书的系统性，并尽可能地满足教学的实际需要，我们采用了分编编写的结构。全书分总论、分论和专题研究三篇。

第一编《总论》从总体上阐述学科的解题思想、方法和策略，以帮助读者建立起学科的基本结构，并以此为基础，指导对具体的解题方法和技巧的研究。

第二编《分论》则按照课本和大纲的要求和顺序分章、节阐述解题的思路和方法，其内容的取舍和编排的顺序都和大纲及课本同步。因此这部分内容不仅验证了《总论》的内容，而且其编排的顺序还向读者提供了在实际教学中渗透数学思想和数学方法教育的具体方案，而这一点是具有很大的教育价值的。

第三编《专题研究》，以中考和竞赛中的问题为载体，对学科的解题思想方法和技巧作了更为深入的研究。从这一编的内容中可以看出，那些典型的令人拍案叫绝的技巧是怎样从基本的解题思想和方法中自然地“派生”出来的。这样一来，就不仅加深了对学科结构的理解，而且将把读者的解题能力提高到新的水平。

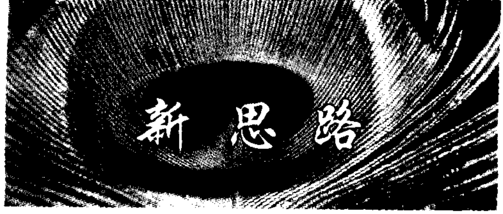
题目及解构成本书的主体。根据题目说方法、谈思路是本书的特点。为了有计划地介绍解题思路和方法，作者特别注意选题的目的性和代表性。在编写中，我们力求多选名题，多选有思考价值的题，多选新颖的有时代感的题。不选既无思考性又过于繁琐的题，杜绝了那种过度包装、“生搬硬造”的题。

本书中的题目分“典型例题”和“题目”两类。编写例题的目的是为了阐述解题的思想和方法。书中给出了所有题目的答案。解答中突出了解题思路的分析，以突出基本的解题思想在探索解题思路时的作用。

全书中的例题和题目统一编号以方便读者查阅。

综上所述，本书集系统性、实用性和工具性于一身，因此它不仅是提供给教师的进修教材和具有重要价值的教学参考书，而且对学生来说，也是一部有用的学习辅导读物。

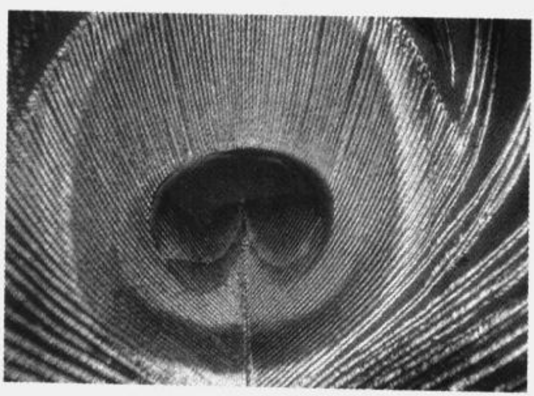
本书由张乃达主编，许克定、潘欣生、佘宁、鲁杨公、佘稚、沈久贵、高源、黄险峰、朱慧、乐锦、周晓菊、江金彪、张茂成、徐科技、王立根、昌明、束荣盛、张爱华、王会银、汤希龙、卫刚、陈迎霞、陆国萍、王玉宏、张晓林编写，全书由张乃达统稿。



目 录

第三编 专题研究

第一编　总　论



一 解题思路的探求

平面几何是以公理、定理、定义为依据，通过演绎的方法来解决问题的.因此，在平面几何的解题活动中，探索解题思路就成为解题的难点和关键，有经验的读者都知道，解平面几何问题和解解析几何问题不同，在用解析法解题时，解题的程序几乎是固定的，你只要循着这个统一的解题程序去做，总是可以获得结果的，不同的解法之间，只有繁简的差别，但是，在平面几何中却不同，解平几问题时，好像是“一把钥匙开一把锁”，每一道题都有不同的方法，让人看了抓不住思路，好像有数不清的技巧.因此，解平几问题成为对解题者智力的挑战.面对着这类挑战，有的人对平面几何产生了畏难情绪，他们对几何题退避三舍；可是另外一些人，却从中体会到了无穷的乐趣，感受到了平面几何的魅力，后者无疑是这类挑战中的胜利者.他们得到的，当然不仅仅是平几解题能力的进步，而且使思维受到了锻炼，使智力得到了发展，身心得到了满足.

本编的目的就在于从总体上分析和介绍探求平面几何问题解法的基本思路和方法，希望读者对这些方法有一个概略的认识，然后再使用这些方法去解决以下各编的问题.我们相信，如果你确实这样做了，就一定会承认：平面几何的解题方法纵然千变万化，但是却是有规律可循的.

大家都知道，几何研究的对象是图形，而使用的工具却是逻

辑,因此,逻辑和图形也就成为平几解题研究的出发点,在本编中,我们也将从这两个方面展开讨论.

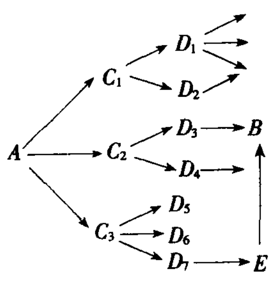
§1.分析法与综合法

由因导果的综合法和执果索因的分析法是两种最基本的逻辑探索方法.

1.综合法

综合法又称顺推法.它从题目中的已知条件出发,顺着往下推,看它能推出什么样的事项,然后再从这些事项往下推,看它们又能推出什么新的事项,如此推下去,一直到推出题目要证的结论为止,这种方法,就如同从一条河流的源头出发,顺流而下,遍历大小支流,直到到在旅行的目的地为止.

下图是用综合法探索证明命题"若 A 则 B" 的思路图,从图中我们找到了两条解题的正确通道.

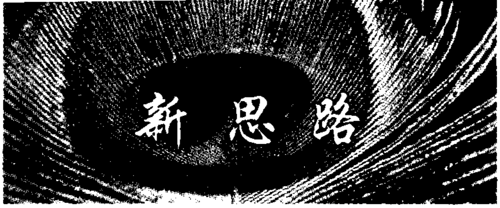


即 $A \to C_2 \to D_3 \to B$

或者 $A \to C_3 \to D_7 \to E \to B$.

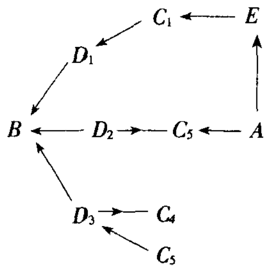
2.分析法

分析法又称倒推法,它的思考路线与综合法相反,是从要证明的结论着手,寻求能保证结论成立的条件,这样一步一步的倒



推上去,直到推出使结论成立的条件与已知条件吻合为止.可见,分析法是从目的地步步上溯,直到江河源头(已知条件)为止.

下图就是用分析法探索证明命题“若 A 则 B”时的思路图,在图中首先假定结论 B 成立.



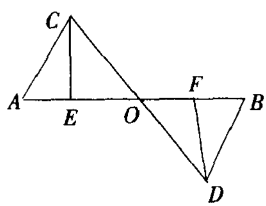
上图提供了两条证明“若 A 则 B”的逻辑通道,即

$$B \leftarrow D_2 \leftarrow C_3 \leftarrow A.$$

或者 $B \leftarrow D_1 \leftarrow C_1 \leftarrow E \leftarrow A$.

例 1 如图,已知 AB、CD 相交于 O,$\triangle ACO \cong \triangle BDO$,$AE = BF$,

求证:$CD = FD$.



分析 1(综合法)

我们看从已知条件能推出什么样的结论.

(1) 从 $\triangle ACO \cong \triangle BDO$,可以推出 $AC = BD$, $AO = BO$, $CO = DO$, $\angle A = \angle B$, $\angle ACO = \angle BDO$, $\angle COA = \angle DOB$ 等等.

(2) 从 $AE = BF$,可推出 $EO = FO$;

(3) 从 AB、CD 相交于 O,可以推出 $\angle AOC = \angle BOD$ 等等.

从这些新的结论出发,还可以推出更多的结论.这样一层层地推下去,一直推到要证明的结论 $CE = FD$ 为止.

可以用下表表示这样的探索过程.

AB、CD 相交于 $O \Rightarrow \angle AOC = \angle BOD$ ①

$$\triangle ACO \cong \triangle DBO \Rightarrow \begin{cases} CO = DO & ② \\ AC = BD \\ AO = BO \end{cases}$$

$$CE \parallel DF \Rightarrow \begin{cases} \angle ECO = \angle FDO & ③ \\ \angle CEO = \angle DFO \end{cases}$$

从 ①、②、③ 出发,又有

$$\left.\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ECO \cong \triangle FDO(ASA) \Rightarrow CE = FD.$$

把这个过程写下来,就得到了本题的证明.

证明 $\because \triangle ACO \cong \triangle BDO$(已知)

$\therefore CO = DO, AO = BO.$

$\because AE = BF, EO = FO.$

在 $\triangle EDC$ 和 $\angle FOD$ 中,

$$\begin{cases} CO = DO \\ \angle EOC = \angle FOD \\ EO = FO \end{cases}$$

$\therefore \triangle EOC \cong \triangle FOD(SAS)$

$\therefore EC = FD$(全等三角形的对应边相等).

分析 2(分析法)

我们可以这样想:怎样才能断言 $CE = FD$?

需要知道 $\triangle ECO \cong \triangle FDO$.

怎样才能断言 $\triangle ECO \cong \triangle FDO$ 呢?

需要知道……

这样一步一步地推上去,直到需要的条件全部具备为止,于

是有如下的思路.

$CE = FD$(目标)

↑

$\triangle COE \cong \triangle DOF$

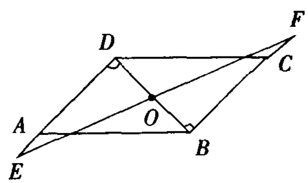
↑

$CO = DO$	$\angle ECO = \angle FDO$	$\angle COE = \angle FOD$
↑	↑	↑
$\triangle ACO \cong \triangle BDO$	$CE /\!/ DF$	$\angle COE = \angle FOD$
↑	↑	↑
$\underline{\triangle ACO \cong \triangle BDO}$	$\underline{CE /\!/ DF}$	$\underline{AB、CD\text{ 交于 }O}$ ①

若把上述分析过程倒过来,即可得到本题的证明.(略)

例2 如图,已知 $AB = DC$,$AD = BC$,O 是 BD 的中点,过 O 点的直线分别交 DA 和 BC 的延长线于 E、F.

求证:$\angle E = \angle F$.



分析 (1) 从右图看 $\angle E$,$\angle F$ 为三角形的内角,有条件全等的三角形是 $\triangle EOD$ 和 $\triangle FOB$.因此,只要能证明 $\triangle EOD \cong \triangle FOB$ 即可(找需知).

(2) 现在设法证明 $\triangle EOD \cong \triangle FOB$,已有条件为 $DO = BO$,$\angle DOE = \angle BOF$(看已知).

还需要找一角($\angle E = \angle F$ 或 $\angle ADB = \angle CBD$)或一边($OE = OF$ 或 $DE = BF$)(找需知).

$\angle E = \angle F$ 正是要证明的.证 $OE = OF$ 或 $DE = BF$,条件不

---

① 式子下面的横线表示它是已知条件,或者是已经证明了的事项.

成熟(看已知,推可知).

比较下来,应该设法证明 $\angle ADB = \angle CBD$(找需知).

(3)由已知 $AB = DC, AD = BC$ 及 BD 为公共边可推出 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$,从而 $\angle ADB = \angle CBD$(由已知,看可知).

这样就找到了条件与结论之间的联系.问题即可解决,以上分析过程可用图示如下.

$\angle E = \angle F$(目标)

↑

$\triangle EOD \cong \triangle FOB$

↑

$\underline{\angle DOE = \angle FOB}$　　$\underline{\angle DO = \angle BO}$　　$\angle EDO = \angle FBO$

↑

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$

↑

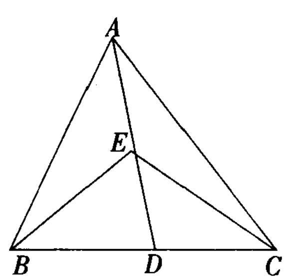
$\underline{AB = DC}$, $\underline{AD = BC}$, $\underline{DB = BD}$

简略地说,其思路是

思路　$\triangle ABD \cong \triangle CDB \to \triangle EOD \cong \triangle FOB \to \angle E = \angle F$.

证明(略).

说明　在证出 $\angle EDB = \angle FBD$ 后,也可直接用三角形内角和定理证出 $\angle E = \angle F$.



例 3　E 为 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上任一点,$\angle B > \angle C$.

求证:$\angle EBC > \angle ECB$.

分析　(1)我们的目标是证明 $\angle EBC > \angle ECB$.①