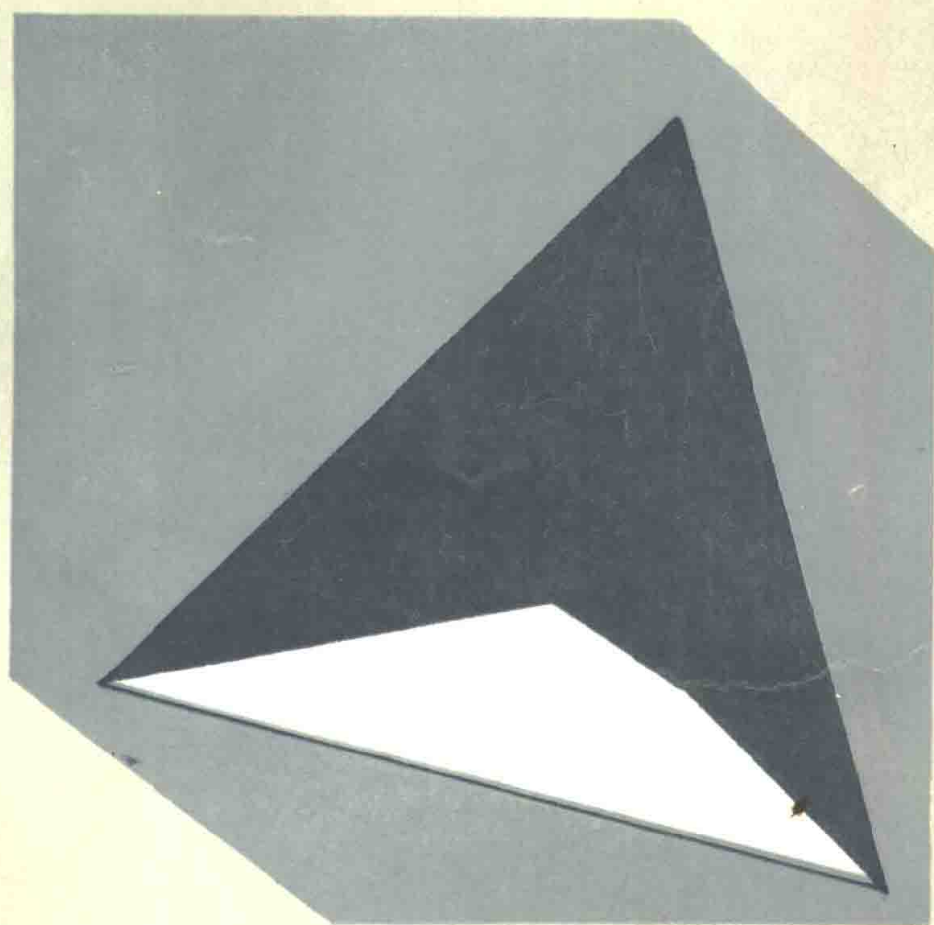


投影理论基础

徐宏文 郭绍仲 著



天津大学出版社

投影理论基础

徐宏文 郭绍仲 著

天津大学出版社

内 容 提 要

本书为投影理论专著,共分 10 章,主要内容如下:系统地阐述了轴测投影、透视投影和仿射图等投影理论;证明了轴测投影、透视投影的定理,推导了轴测投影、透视投影的公式,并对各投影参数进行了分析;评论了奥斯特罗夫斯基、布尔席的正轴测投影参数图表,并提出了正轴测投影参数图表的理论基础;评论了奥达卡方程,并对该方程进行了补充;评论了别斯金定理,并修正、引申了该定理;评论了霍恩伯格仿射图,并发展了该仿射图,定义了广义的仿射图。

本书可作工程图学专业研究生教材,也可供工程图学教师和科研人员及有关工程技术人员参考。

投影理论基础

徐宏文 郭绍仲 著

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:12 字数:300 千字

1991 年 9 月第一版 1991 年 9 月第一次印刷

印数 1—1800

ISBN 7-5618-0240-4

TH·12 定价:9.50 元

前 言

由于生产和生活的需要,人类最早是将所观察到的自然界的形象抄绘于平面上。由于观察的方向或位置不同,对于同一物体在同一平面上可以得到不同的图形,因而形成了正投影图、透视图和轴测图,这就是工程上最常用的三种投影图。

长期以来,人们对各种投影图积累了较多的感性知识,在此基础上开始探索其理性规律,逐渐得到了有关的投影理论。如在18世纪末,蒙日发表了其名著《画法几何学》,该书系统地论述了正投影理论和有关的几何问题;从17世纪至18世纪,由于笛沙格、泰勒、兰姆贝特等对透视图的研究,使绘制透视图有了理论和原则;到19世纪,波尔凯发表了其著名定理——波尔凯定理。这就为投影理论奠定了基础。

近百年来,许多学者如高斯、波尔凯、许华兹、库鲁巴、别斯金、切特维鲁新等都从不同的角度,利用不同的方法对投影理论问题进行了研究,并作出了重要贡献。

1978年,在国际画法几何会议上,日本学者奥达卡、奥地利学者霍恩伯格发表了关于投影理论研究的文章,对现代投影理论的研究作出了贡献。

多年来,通过我们的科学研究工作,对投影理论进行了比较系统的总结,并作了一些开拓性的工作,如对奥达卡方程进行了评论和补充;发展了霍恩伯格的仿射图理论,并提出了由两仿射图求第三仿射图的两种方法;分析和评论了别斯金定理,修正并引申了该定理;对各种坐标系的投影问题作了研究。

作者曾用本书初稿为天津大学应用几何专业研究生讲授过多次,在此基础上,作了一些修改和补充而成本书。本书由林钧齐同志审阅,并提出了很多宝贵意见,在此致以衷心的感谢。

由于作者的水平所限,本书中的缺点和错误在所难免,希望读者给予批评指正。

作 者

1989年6月于天津大学

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 投影与投影法	(1)
§ 1-2 工程上常用的投影图	(1)
§ 1-3 投影理论概述	(5)
§ 1-4 研究投影理论的意义	(6)
§ 1-5 投影理论发展简史	(7)
第二章 投影参数及其方程	(10)
§ 2-1 概述	(10)
§ 2-2 投影与投影指标	(10)
§ 2-3 空间笛卡儿直角坐标系和投影面的几何关系	(21)
§ 2-4 投影参数	(27)
§ 2-5 透视投影	(30)
§ 2-6 各种投影间的联系	(34)
第三章 轴测投影	(41)
§ 3-1 概述	(41)
§ 3-2 波尔凯—许华兹定理	(41)
§ 3-3 轴测投影公式和波尔凯定理的证明	(43)
§ 3-4 用复数和矢量研究轴测投影	(48)
第四章 投影方向和正轴测投影	(52)
§ 4-1 概述	(52)
§ 4-2 投影方向	(52)
§ 4-3 正轴测投影的基本理论	(56)
§ 4-4 正轴测投影投影参数的计算及图解	(62)
§ 4-5 正轴测投影参数图表	(69)
第五章 透视投影	(76)
§ 5-1 概述	(76)
§ 5-2 别斯金定理(空间笛卡儿直角坐标系)	(77)
§ 5-3 库鲁巴定理	(87)
§ 5-4 透视投影的投影参数计算和图解	(95)
第六章 评别斯金定理	(106)
§ 6-1 概述	(106)
§ 6-2 广义轴测投影	(106)
§ 6-3 轴投影	(107)

§ 6-4	空间点及其投影	(107)
§ 6-5	三维图形的七点形	(114)
§ 6-6	别斯金定理(空间射影坐标系)	(115)
§ 6-7	按照射影对应条件证明别斯金定理	(115)
§ 6-8	锥面和柱面截交线的仿射对应形	(118)
§ 6-9	别斯金定理的错误及修正	(119)
§ 6-10	别斯金定理的引申	(121)
§ 6-11	引申的别斯金定理与仿射坐标系	(122)
§ 6-12	关于坐标系投影的一般性结论	(125)
第七章	仿射图	(126)
§ 7-1	概述	(126)
§ 7-2	仿射图	(126)
§ 7-3	投影及其仿射对应形是仿射图	(128)
§ 7-4	仿射图就是投影的仿射对应形	(134)
第八章	由两个仿射图求第三仿射图的相似三角形法	(136)
§ 8-1	概述	(136)
§ 8-2	相似三角形法	(136)
§ 8-3	K 值的涵义	(141)
§ 8-4	相似三角形法的几种性质	(143)
§ 8-5	相似三角形法的其它问题	(146)
第九章	由两个仿射图求第三仿射图的平行线束法	(151)
§ 9-1	概述	(151)
§ 9-2	平行线束法	(151)
§ 9-3	用平行线束法求正轴测图	(153)
§ 9-4	平行线束法在画法几何中的应用	(157)
§ 9-5	平行线束法的推广	(161)
第十章	投影理论及其应用的研究概况	(167)
§ 10-1	投影理论的研究	(167)
§ 10-2	形数结合的研究	(173)
§ 10-3	投影理论应用的研究	(174)
§ 10-4	不断进行投影理论及其应用研究的意义	(175)
附录		(177)
附录一	库鲁巴定理的基本知识	(177)
附录二	射影坐标与射影变换	(180)

第一章 绪 论

§ 1-1 投影与投影法

本世纪以来,由于科学技术不断发展,投影法也不断增多。本书仅就工程上最常用的两种投影法——中心投影法和平行投影法进行研究。

在图 1-1(a)中,设空间有一固有平面 Π ,在平面 Π 以外有一固有点 S ,空间还有任意一点 A ,射线 SA 与平面 Π 的交点为 a ,点 a 为空间点 A 在平面 Π 上的投影。平面 Π 称为投影面;固有点 S 称为投影中心;射线 SAa 称为投影线。

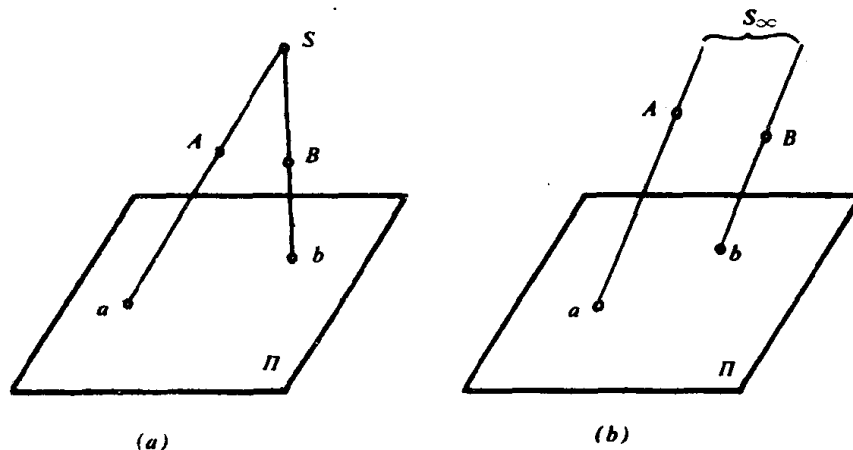


图 1-1

在图 1-1(a)中,当投影中心 S 为固有点时,点 A 在投影面 Π 上的投影为 a ;点 B 在投影面 Π 上的投影为 b 。投影线 SAa 和 SBb 相交于投影中心 S ,这种投影法称为中心投影法。

在图 1-1(b)中,当投影中心 S 为非固有点 S_{∞} 时,点 A 在投影面 Π 上的投影为 a ;点 B 在投影面 Π 上的投影为 b 。投影线 $S_{\infty}Aa$ 与 $S_{\infty}Bb$ 相交于非固有点 S_{∞} ,这种投影法称为平行投影法。

§ 1-2 工程上常用的投影图

目前,工程上最常用的投影法为中心投影法和平行投影法,因而在工程上由这两种投影法产生了几种常用的投影图。

一、透视投影图

应用中心投影法,物体在一个投影面上得到的直观性很强的投影图称为透视投影图,简称为透视图。常用的透视图有三灭点透视图、两灭点透视图和一灭点透视图。透视图多用于

土木、建筑等工程。图 1-2 为一建筑物的透视图。

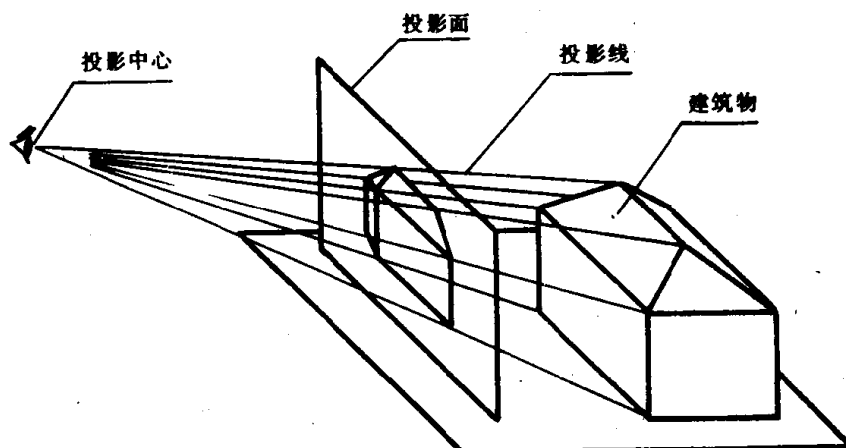


图 1-2

二、轴测投影图

应用平行投影法,物体在一个投影面上得到的直观性较强的投影图称为轴测投影图,简称为轴测图。当投影方向倾斜于投影面时,所得的轴测图称为斜轴测图;当投影方向垂直于投影面时,所得到的轴测图称为正轴测图。轴测图的直观性较强,容易看懂,但是度量性差,不能反映绝大部分表面形状的实长、实形。因此,轴测图在生产上常与多面正投影图配合使用,以弥补多面正投影的某些缺点。

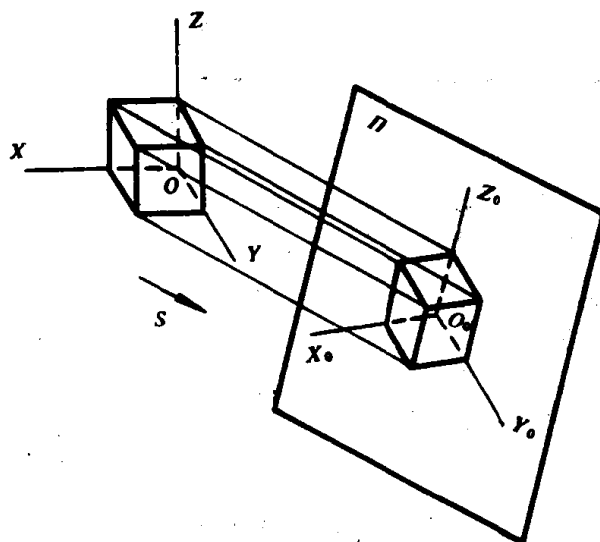


图 1-3

近年来,由于生产发展的需要,轴测图在生产上的应用日益广泛,如设备和管道的安装、带有复杂曲面的零件、产品说明书,以及书刊的插图等方面应用轴测图很多,甚至在线性规划方面也应用轴测图。这标志着轴测图的研究和应用已进入了一个崭新的阶段。图 1-3 为一物体的轴测图。

三、多面正投影图

应用平行投影法,并使其投影方向垂直于投影面,所得到的度量性很好的投影图称为**正投影图**,简称为**正投影**。如果以三个互相垂直的平面为投影面,各投影方向分别垂直于该三投影面,可得到三个正投影图,称为**三面正投影图**。由两个以上的投影面组成的正投影图称为**多面正投影图**。多面正投影图的度量性好,能够反映物体绝大部分形状的实长、实形,因此这种投影图在工程上得到了非常广泛的应用。但是,这种投影图的直观性差,只有熟练地掌握工程图学知识,具备一定的读图和画图能力才能看懂这种投影图。图 1-4 为一物体的三面正投影图。

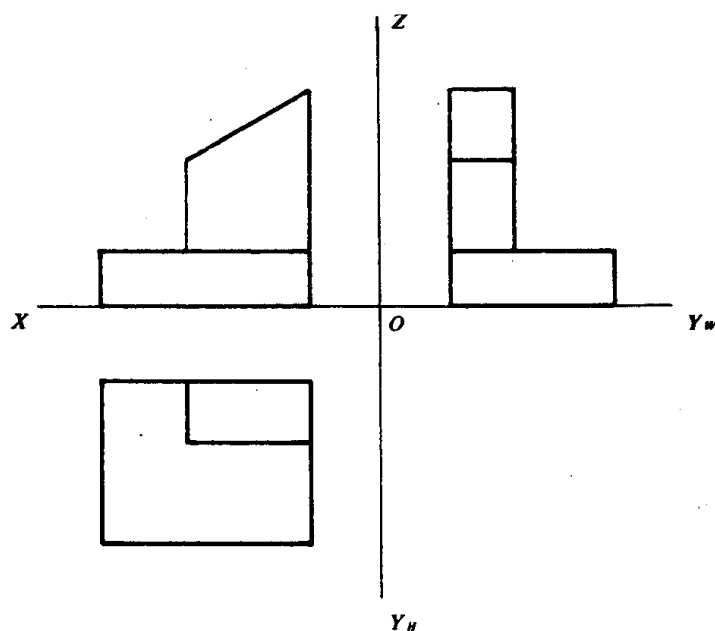
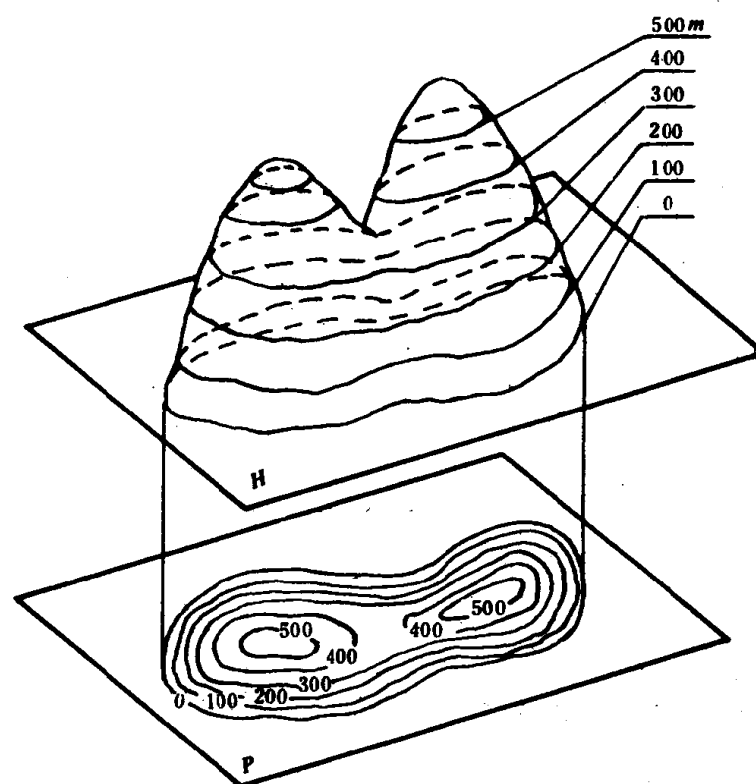


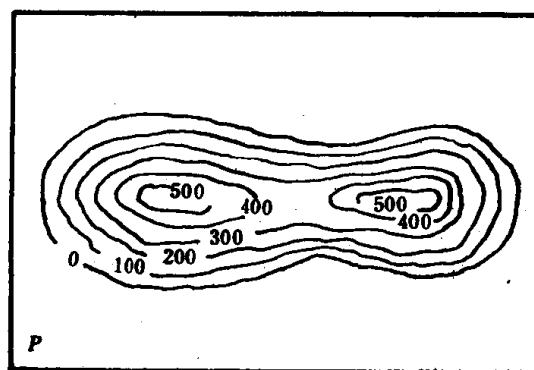
图 1-4

四、标高投影图

标高投影图是一种单面的正投影图,其投影面相当于水平面,投影方向垂直于此投影面,在投影图上有若干等高线,每一等高线都标注其高度。在表达复杂的曲面时,广泛应用标高投影图。地面是复杂的不规则曲面,因此标高投影图常用于地形图,也用于与地形有密切联系的土木、建筑工程上,还用于航海的海图等方面。图 1-5(a)为物体与地形图的轴测图,图 1-5(b)为地形图。



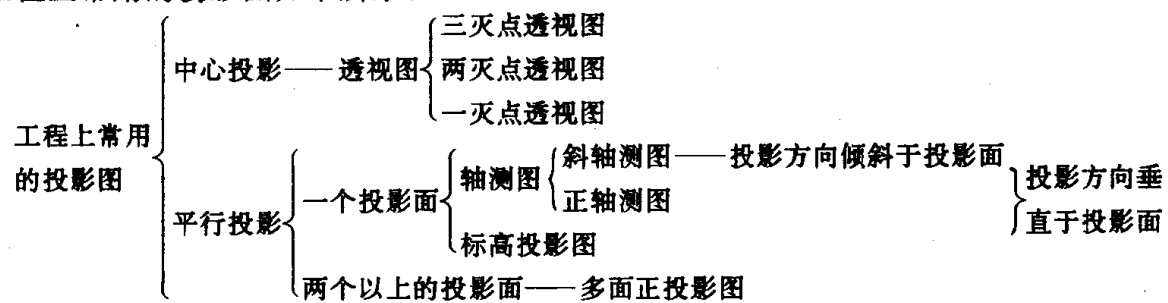
(a)



(b)

图 1-5

工程上常用的投影图如下所示：



§ 1-3 投影理论概述

目前,工程上最常用的投影图为轴测投影图、透视投影图和多面正投影图等,其基本理论即为投影理论,现分述如下。

一、轴测投影

1. 轴测投影定理

有关轴测投影定理的内容,将在后继章节中详细讲述,这里仅说明有关定理在轴测投影中的地位及作用。

(1)波尔凯(K·Pohlke)—许华兹(H·A·Schwarz)定理是轴测投影的根本定理。这个定理确定了用任意的轴测指标,可以作为空间交于一点的任意三线段平行投影的相似形。

(2)高斯(C·F·Gauss)定理是轴测投影的重要定理,根据这个定理可以判别任何一个轴测投影是正轴测投影还是斜轴测投影。

(3)舒廖米尔赫(Shclömilch)定理和韦氏巴赫(Weisbach)定理是轴测投影的重要定理。根据这两定理可以确定轴测指标。高斯发表其定理时只给出了结论,没有证明,后来由何尔兹缪勒(Holzmüll)和舒廖米尔赫对该定理给予了证明。舒廖米尔赫定理和韦氏巴赫定理实际上就是高斯定理的证明或证明的基础。

2. 轴测投影公式

轴测投影的基本公式主要是表示轴间角与轴向变形系数之间关系的方程组。斜轴测投影的公式组体现了斜轴测投影的有关特性;正轴测投影的公式组体现了正轴测投影的有关特性。

3. 轴测投影的计算及图解

根据已知投影参数通过轴测投影的有关公式组,可以计算出未知投影参数,根据已知的和所得到的投影参数即可绘制轴测图。

根据已知的某些投影参数通过图解也以获得未知投影参数,根据已知的和图解所得的投影参数也可绘制轴测图。

二、透视投影

1. 透视投影定理

有关透视投影的定理内容,将在后继章节中详细叙述,这里仅介绍有关定理在透视投影中的地位及作用。

(1) 别斯金(Н·М·Бескин)定理

别斯金定理用于透视投影,确定了任意透视投影指标都可以作为空间笛卡儿直角坐标系中心投影的仿射形。

别斯金定理在中心投影中的地位和作用,相当于波尔凯—许华兹定理在平行投影中的地位和作用。

别斯金定理在1945年由别斯金自己证明,10年后扎帕里兹(И·С·Джапариди)对这个定理作了射影综合证明。

(2) 库鲁巴(E. Kruppa)定理

库鲁巴定理可以区分 $\delta(O_1-def-abc)$ 是 $\Delta(O-DEF-A_\infty B_\infty C_\infty)$ 的中心投影或 δ 仅是 Δ 中心投影的仿射形。

库鲁巴定理在中心投影中的地位 and 作用, 相当于高斯定理在平行投影中的地位 and 作用。

2. 透视投影公式

透视投影的基本公式是描述有关投影参数之间关系的方程组。奥达卡(Shiro Odaka)方程就是库鲁巴定理在三灭点透视投影条件下的解析形式。同样, 本书也给出了两灭点透视投影和一灭点透视投影的有关方程组。

3. 透视投影的计算及图解

根据已知投影参数, 通过透视投影的有关公式, 可以计算得到未知的投影参数, 因而能够获得三灭点透视投影、两灭点透视投影和一灭点透视投影所需要的投影参数。这样就可以确定透视投影的投影指标, 然后即可绘制透视图。

根据已知的某些投影参数, 通过图解也可以获得有关的投影参数, 因而可确定透视投影的投影指标, 也可绘制透视图。

三、投影作图的理论与方法

1. 仿射图与投影作图理论

霍恩伯格(F·Hohenberg)的仿射图概念既新颖, 又有一定的概括性。霍恩伯格为投影作图理论及方法的研究开辟了一条新的途径。

由两个仿射图求第三仿射图, 从理论上概括了前人所熟悉的作图理论及方法。

2. 作图方法

由两个仿射图求第三仿射图的“相似三角形法”和“平行线束法”都是投影作图的一般性方法, 它概括性较强。

四、多面正投影

在多面正投影中, 每一个投影面上的投影性质与正轴测投影是相同的, 所以正投影可以看成是正轴测投影的特例。

在多面正投影中, 由两个投影求第三个投影的方法, 可视为由两个仿射图求第三仿射图的特例。

§ 1-4 研究投影理论的意义

工程上经常需要表示空间物体的形状和大小, 另外, 还需要解决空间几何元素之间的相对关系, 这两类问题的实质都是空间几何问题。在平面上人们常常借助于投影来研究和解决空间几何问题, 因为以投影为工具可以正确而简便地解决空间几何问题。

长期以来, 人们以投影为工具在研究和解决空间几何问题的过程中, 总结了若干投影理论。掌握了这些投影理论, 可以解决科学技术和生产实际中的有关问题。特别是当前计算技术的飞跃发展, 更需要解决有关的空间几何问题, 所以投影理论的研究工作是十分重要的。

显然, 投影理论与生产实际是密切联系的。由于工程实际的需要, 促进了投影理论的发展, 反过来, 投影理论又指导了工程技术的发展。

§ 1-5 投影理论发展简史

人们根据对自然界的观察和生产实际的需要,得出了有关的投影规律。根据这些投影规律,将需要表达的形体或空间几何问题表示在平面上,因而得到了各种投影图,如正投影图、轴测投影图、透视投影图等。随着人们对投影概念的深化,以及对投影规律的不断探索和研究,逐渐得到了比较系统的理论,这个过程便是投影理论发展史。投影理论包括正投影、轴测投影和透视投影等方面的理论,其发展情况简述如下。

一、正投影

由于人类对自然界的直接观察,很容易把所观察到的形象抄绘于平面上,观察的方向总是正对着物体,自然也正对着画面,这样就形成了单面的正投影图。中国有“上古仓颉造字”的传说,虽然难以考证,但是说明在很早以前我国就已经出现了象形文字,这种文字其实就是简化的单面正投影图^[8]。埃及在3000年前也出现了象形文字。人们将象形文字称为“图画文字”或“文字画”。

1977年冬,在我国河北省平山县西灵山下发掘的战国中山王墓中,发现一块用铜板错金银线条制成的并附有尺寸和文字说明的古代建筑平面图,它是典型的用于工程实际的单面正投影图^[3]。埃及开罗博物馆中藏有兰姆塞斯九世(Ramses IX)墓缩小比例尺的平面图^[1]。这都说明在古代人们已对建筑施工使用建筑图了。

由于工程技术发展的需要,单面正投影图逐渐地形成了用两个正投影图配合表示物体长、宽、高的雏型。在我国宋代李诫撰写的《营造法式》一书中,有不少插图属于正投影图。

16世纪至17世纪,由于航海的需要,在海图中人们用等高线表示各处海域的位置及深度,这样就出现了标高投影图。标高投影图是用一个单面正投影图并附加数字,以表示长、宽、高三个方向的投影图。在地图上采用标高投影图的方法画出等高线,以表示山脉和地形。因此,用等高线既可以表示海洋各处的深度,又可以表示山脉各部位的高度。

1795年,法国著名的几何学者加斯帕·蒙日(Gaspard Monge)发表了《画法几何学》^[1]一书,该书共分五部分,即画法几何学的任务及方法;曲面的切平面和法线;曲面的交线;曲面交线的应用;曲线和曲面的曲率以及附录。

当时,由于这本书的中心思想新颖,内容丰富,叙述简洁,研究对象又很重要,因此倍受法国人的重视。高斯把该书誉为一种“使纯几何学思想活跃起来并保持势头”的“精神滋补品”。由蒙日的主要方法建立起来的画法几何学,给正投影打下了坚实的、系统的理论基础,并使单面正投影图过渡到了多面正投影图。因而使多面正投影图在工程技术上得到了广泛的应用。直至今日,多面正投影图仍为工程图学中的最基本的和最主要的内容。

在我国清代数学家年希尧所著的《视学》一书中,也论述了两面正投影图的内容^[9]。

画法几何学首先在法国发展起来,当时有哈切特(P·Hachette)对二阶曲面及一般螺旋面表达和综合法的研究;奥里维(Th·Olivier)对图解作图法的研究;高尔那礼(J·de la Gournerie)对标高投影及其在地形曲面上应用的研究,由透视图作物体的正投影图以及螺旋

面的研究等。

德国学者舒莱伯(G·Schreiber)在1829年出版了画法几何教科书之后,倍受人们的重视,因而使投影方法和一些作图方法也得到了进一步的研究。后来由于射影几何理论和方法的发展,促进了画法几何的发展,反过来投影方法的研究又促进了射影几何原理的发展。

谢瓦斯齐亚诺夫(Я·А·Севастьянов)是俄国画法几何的创始人。古尔久莫夫(В·И·Курдюмов)等学者对画法几何的研究与教学也曾作出过贡献^[10]。

19世纪至20世纪前半叶,在多面正投影图方面,图示法和图解法得到充实和发展。

近几十年来,有不少学者在画法几何与多面正投影方面作了研究。如缪勒(E·Müller)、切特维鲁新(Н·Ф·Четверухин)、霍恩伯格(F·Hohenberg)等都对投影理论作出了贡献。

近年来,由于工程技术的需要,尤其有些曲面要求较高的精确度,因此可用投影表达方法将“形”与“数”密切地结合起来。随着电子计算机的出现,又出现了计算机图学,当然,正投影图也是其内容之一。“形”与“数”的内容也和计算机图学有着密切的联系。

二、轴测投影

轴测投影属于平行投影法,虽然是单面投影,但是投影的结果总比单面正投影图要复杂得多,所以轴测投影图的出现比单面正投影图晚了一些。我国宋代李诫的《营造法式》一书在1103年就已印刷,其中轴测图较多,它是我国建筑工程方面的一部经典著作^[4]。在我国明代宋应星的《天工开物》一书中,有用大量的图样表示舟、车、器械的形状和构造的插图,其中很多是轴测图。在欧洲,14世纪至15世纪也出现了轴测图,但主要是靠经验绘制的,现在大英博物馆中就藏有这种轴测图。

17世纪至18世纪,人们开始对轴测投影进行比较深入的研究。如英国发瑞世(William Farish)首先对等轴测投影的性质进行了研究。法国的高尔那礼(J·de la Gournerie)对轴测投影也进行过研究。德国的费德勒(W·Fiedler)将轴测投影作为透视投影的特例进行了研究。19世纪,波尔凯(K·Pohlke)在他撰写的教科书的第一篇中,发表了以其名字命名的著名定理——波尔凯定理。当时,这个定理的证明是比较复杂的,而其几何内容却是既简单又重要。到了19世纪60年代,许华兹(H·A·Schwarz)不仅用极为简单的方法证明了波尔凯定理,而且又证明了他自己的更为普遍的命题。他将波尔凯定理作为其命题的一个特例,后人称此命题为波尔凯——许华兹定理。

1925年格拉哥列夫(Н·А·Глаголев)发表了其著名定理——格拉哥列夫定理,这个定理又概括了许华兹的命题。

1840年,高斯给出了他的定理——高斯定理,该定理可用来鉴别正轴测投影,但当时并没有得到证明。到了1886年何尔兹缪勒(Holzmüller)和舒廖米尔赫(Shelömilch)才给予了证明。

在轴测投影的发展过程中,还出现了一些重要的定理,如舒廖米尔赫定理、韦斯巴赫定理等。

20世纪以来,除了格拉哥列夫发表其定理以外,还有格拉祖诺夫(Е·А·Глазуннов)、切特维鲁新、霍恩伯格(F·Hohenberg)等学者对轴测投影的研究作出过较多的贡献。

三、透视投影

透视投影图较单面正投影图复杂得多,所以透视投影图较单面正投影图出现得晚。最早

的透视图用于剧院的布景和室内的壁画等方面,目的是为了获得深远的效果,或者使人有自身处于大自然之中的感觉^[6]。但是,这些透视图都是根据人们的直觉和经验画出的,不是完全正确的。如在15世纪欧洲就有远近的原则。我国古代山水画家也早就提出了“近大远小”的透视图的基本规律^[5]。15世纪,阿尔伯蒂(Lene Battista Alberti)是文艺复兴时期最重要的建筑理论家,他在其著作《绘画论》一书中,提供了一些正确的法则,该书是世界上最早的有关透视投影理论的专著^{[2]、[7]}。

16世纪至17世纪,孟特(Guido Ubaldo d. Monte)在其《透视投影》一书中,首次提出直线灭点的一般概念以及有关透视投影图的多种新作图方法,这时已开始带有平面同素对应和空间同素对应的概念。后来,杰拉德·笛沙格(G. Desargues)撰写了《用透视表示对象的一般方法》一书。该书阐述了笛沙格新创造的作图方法,即将处于真实空间位置上的三维物体向二维平面进行投影。笛沙格的另一著作是专门研究圆锥与平面相交问题的。笛沙格将圆锥截交线看成为圆的透视形。这样,对圆锥截交线的研究得到了简洁的形式,同时将椭圆、双曲线和抛物线概括于一种方法之中,在利用透视作为一般的研究方法时,笛沙格认为所有平行线都相交于所谓的无限远点。因而笛沙格奠定了空间射影概念的基础^[21]。笛沙格定理的发表对几何学有着重大的意义。笛沙格为透视投影与射影几何作出了重大的贡献。布鲁克·泰勒(Brook Tayler)在其著作中,对透视投影的基本原理作了简明扼要的数学论证,兰姆贝特(J. H. Lambert)在其著作《自由透视投影》中,提出直接从物体的已知尺寸画透视图。他推广了已有的作图方法使之用于解决复杂的几何问题,并提出了摄影测量学的基本作图法。

由于笛沙格、泰勒、兰姆贝特等学者的研究,使透视投影得到了迅速的发展,使人们从直觉地、经验地绘制透视图发展到了以理论和原则为根据绘制透视图。尤其在射影几何的发展和影响下,使透视投影日趋完善。

1910年,库鲁巴发表了其著名定理——库鲁巴定理。1945年,别斯金发表了其著名定理——别斯金定理。10年后,札帕里兹对别斯金定理作了射影综合证明。这两个定理为透视投影奠定了坚实的理论基础。

近年来,由于实际的需要,科学家们正在将透视投影理论用于摄影、电影、宽银幕电影以及立体电影等方面,以便使其更加完善,更符合人们的需要。

第二章 投影参数及其方程

§ 2-1 概 述

在第一章中,已经介绍了投影与投影法,有了投影与投影法的概念,为了便于解决空间的几何问题,需要将空间的几何问题表示于平面上,由数学知识可知,空间的几何元素及其相互关系,空间物体的形状等常常需要依靠坐标系才能确切地表示出来,而空间几何元素或物体形状的投影是要依靠坐标系的投影(投影指标)来确定,因此确定投影指标是个首要问题。而确定投影指标又需要一定数量的投影参数。表示投影参数相互关系的方程式称为投影参数方程。轴测投影有其投影参数方程,透视投影也有其投影参数方程。

投影参数之间的关系可以用投影参数方程表示,通过投影参数方程可以计算出所需要的各参数。当然,也可以用图解的方法获得有关的投影参数,进而可以确定所需要的投影指标。有关投影参数、投影指标以及各种投影之间的联系,本章将分别给予论述。

§ 2-2 投影与投影指标

一、投影条件

根据第一章的内容可知,在空间有一个平面 Π 和不属于它的一个固有点 S ,还有空间的任意一点 A 。射线 SA 与平面 Π 的交点 a 就是空间点 A 在平面 Π 上的投影。当 S 点为固有点时,空间点的投影就是中心投影, S 点为投影中心;当 S 点为非固有点时,空间点的投影就是平行投影, SA 表示投影方向。平面 Π 为投影面。投影面 Π 只限于固有平面,因为在非固有平面上不能出现实投影,所以,投影面不能为非固有平面。投影面与投影中心统称为投影条件。

投影条件给定后,空间点就有唯一的投影。在中心投影条件下,投影中心为固有点,如果投影中心属于投影面,则不存在投影线,也就不出现投影,所以投影中心不能属于投影面;在平行投影条件下,投影中心为非固有点,如果投影方向平行于投影面,那么投影中心也不出现投影。所以投影中心 S 或 S_{∞} 不能作为被投影的空间点。

当然,当投影中心属于投影面时,如果认为有无数条投影线,则有无数个投影,也就是投影面上的任何点都是投影。但是,为了理论上一致,在本书中约定投影中心没有投影。

空间任意一点在投影面上的投影仍为一点,通过空间点的投影线与投影面的交点就是该点的投影。而同一投影线上的各点在该投影面上的投影也是该投影。所以,由点的一个投影不能确定该点在空间的位置。当然,这个说法还有不足之处,即在投影线上还应排除投影中心的投影。

二、空间笛卡儿直角坐标系与投影条件

1. 投影条件的选择

投影条件的选择取决于图示的两个不同的因素——直观性和度量性^[14]。

“直观性”就是在单一投影面上的投影要能比较全面地表示出物体的形状。所以在单一投影面上应使被表达的物体的表面越多越好，同时各表面的投影不要有积聚性。图 2-1 表示一个正六面体，其中图(a)较图(b)的直观性强，它表达的表面积多，也不存在有积聚性的投影，而图(b)表达的表面积少，并存在有积聚性的投影。

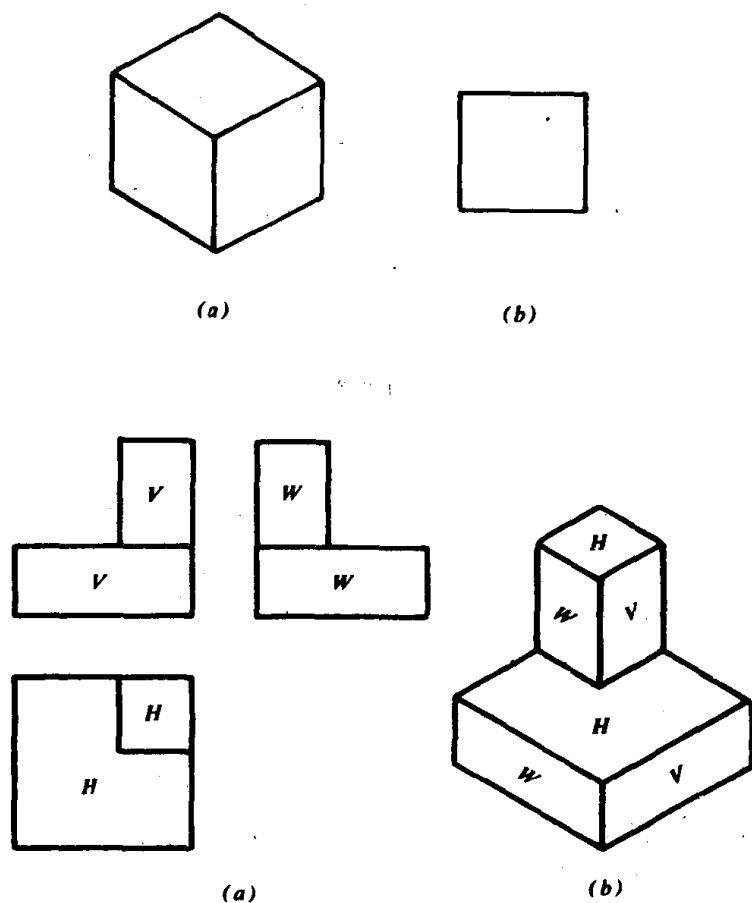


图 2-2

“度量性”就是在多面正投影图中，要尽量表达物体各表面的实形，同时各表面在其它投影面上的投影常有积聚性，从而使物体的形状、大小能表达得很确切。图 2-2(a)为一物体的三面正投影图，图 2-2(b)为该物体的轴测投影图。图(a)较图(b)的度量性好，物体各表面的实形、大小表达得较清楚、准确。

由此可见，在同一投影图上，直观性与度量性不可能同时都得到简明而充分的表达，只能根据需要满足其中之一，而另一个则是尽可能的或比较麻烦的表达。单面投影的重点是解决直观性问题，多面投影的重点是解决度量性问题。

因此，投影条件的选择，取决于图样的需要。如果图样需要直观性强，对于机械图样常选用轴测投影；对于土木建筑图样常选用透视投影。如果图样需要度量性好，则选用多面正投影。