20世纪数学思想

胡作玄 邓明立／著

Ershi Shiji Shuxue Sixiang

Ershi Shiji Shuxue Sixiang

山东教育出版社

20世纪数学思想

ERSHI SHIJI SHUXUE SIXIANG

胡作玄 邓明立 / 著

山东教育出版社

20世纪数学思想

胡作玄　邓明立　著

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路321号　邮编：250001）
电　　话：(0531)2023919　传真：(0531) 2050104
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东省新华书店
印　　刷：山东新华印刷厂德州厂
版　　次：1999年5月第1版
2001年1月第2次印刷
规　　格：850mm×1168mm　32开本
印　　张：20印张
插　　页：5
字　　数：441千字
书　　号：ISBN 7-5328-2685-6/G·2468
定　　价：25.50元

序

20世纪行将过去。在这“千纪末”当然也是“世纪末”的时候，我们不能不想到19世纪末那真正的“世纪末”（fin de siecle）。那时，对社会、经济、文化和科学，多少有些悲观情绪，与我们现在这种乐观情绪恰成鲜明的对照。当时，无论是物理学还是数学都存在某种“危机”，而这危机恰巧促成物理学和数学的新生。不管怎样，希尔伯特对前途充满信心，并为“我们的科学”奋斗一生。而客观上讲，他为未来世纪的数学——结构数学的产生与发展铺平了道路。

尽管十分之九的数学是在20世纪产生的，但100年前数学家的许多工作，现在仍然是有待填补的空白。回顾过去，他们干出许多大事：

1. 德国数学家组织了《数学百科全书》的出版，这个23卷的庞然大物，收集了当时几乎所有的数学知识，为数学建立起极好的理论框架。

2. 克莱因开始撰写《19世纪数学的发展》，实际上，他在开始组织《数学百科全书》时，曾设想有第七部分专讲数学史。

3. 希尔伯特在总结过去的基础上，提出面向未来的数学问题。实际上，整个19世纪，各国科学院尤其是法国科学院

都不时提出重大问题，指导数学的发展。

4. 许多数学家撰写19世纪数学的总结性评述，通过回顾过去，展望未来。

更值得一提的是帕斯卡勒（Pascal, Ernst），他出版了《数学宝典》，对当时整个数学加以评述。其中对不变式论和椭圆函数论等课题的详尽介绍，使后来的著作无出其右。通过对整个数学的介绍，各学科之间的关系也十分清楚，它立即被译成德文。

到了20世纪，这种健康的数学文化完全崩溃，没有系统、没有关联、没有问题、没有历史的来龙去脉、没有主流和支流、没有哲学、没有方法，剩下的只是“定义—定理—证明”的汪洋大海。甚至国际数学家大会（也是在100年前开始的）上的全会报告，有许多也是从第一句话起就让隔行数学家不知所云。

20世纪末，一方面数学已发展到“隔行如隔山”的地步，另一方面，不仅专业数学家，连许多物理学家也对李群、拓扑、流形、上同调、黎曼面、纤维丛、联络、p进域，甚至概形、动形等都到了如数家珍的程度。我们上哪里去找有这些内容的书呢？

本书就是这方面的尝试，说白了就是同数学专著的内容（定理和证明）互相补充。它主要介绍20世纪数学的主流——结构数学的来龙去脉，主要问题，中心定理以及方方面面的联系。结构数学与经典数学有一个明显的不同之处，就是抽象概念极多，由于它们几乎无处不在，这里选择其中最主要的几十个加以定义，对于大部分现代数学，吃透它们也就可以理解其含义了。当然，这只是第一步，后来的技术、技巧和方法，当

然是专家的手段，也是专业学习的内容了。

20世纪的结构数学门类繁多，内容广泛。如果全面介绍，哪怕是只列举出学科名称都十分困难，因此，不得不抓住重点。这就是第二篇的群论和第三篇的拓扑学。掌握这些，再加上第一篇的基本概念和基本框架，对理解20世纪数学思想的主流想必会有所收益。群与拓扑的重要性，特别表现在第四篇中。可以设想，要没有结构数学，特别是群与拓扑，这些学科仍将停留在它们的初级阶段。

最后，我们概括一下结构数学的前沿，对于最新结果尽可能收入，文献大致截止于1997年年中。

不管怎样，这是一种奇特的尝试，我们只是试图粗线条地给数学一个历史的、全面的、前瞻的图景，而对细节不可能给出面面俱到的论述，这方面我们有大批的专著和论文进行深入的探讨。但无论如何，本书的错误及不当之处，欢迎专家和读者指正。

本书的写作显然是长期研究和积累的结果。在此期间，第一著者得到国家自然科学基金会和中国数学会传播委员会的部分支持，谨此致谢。

对于本书的责任编辑、山东教育出版社社长兼总编辑孙永大先生所付出的辛勤劳动，谨表示诚挚的谢意。

著　者

1998年7月

责任编辑 / 孙永大
装帧设计 / 高　空

20世纪
数学思想

Ershi Shiji Shuxue Sixiang

ISBN 7-5328-2685-6
9 787532 826858

ISBN 7-5328-2685-6/G·2468
定价：25.50元

目　　录

第二篇 群 论

第三篇 拓扑学

第四篇　几何学与数论

引　言

从本书的书名《20 世纪数学思想》来看，同 M·克莱因（Kline, Morris, 1908—1992）的名著《古今数学思想》（1972）有某种亲缘的关系。可是，比起《古今数学思想》这样的历史论述和分析，20 世纪的数学史还根本无法做到。从数学内容的艰深和数学领域的广阔来看，我们几乎无法全面而深入地掌握 20 世纪的数学素材，就像 19 世纪末和 20 世纪初，许多数学家及数学史家所做的评述那样。在这方面，我们也无法同兄弟学科和亲缘的学科相比。对于 20 世纪物理学史和生物学史，不仅有较多的专著问世，例如 1995 年出版的三大卷《20 世纪物理学》，而且在资料积累及研究方面已有相当的基础。物理学史有相当丰富的口头史资料供人使用。与数学同宗的计算史，甚至早在 70 年代后期就有专门的期刊，还有多次的学术会议。可以说，当代的科学技术史研究热火朝天。

反观数学史，20 世纪数学史的研究可以说几乎是空白。郑重的数学史研究大致到达 19 世纪末，而 20 世纪数学史直到最近才刚刚开始，研究的范围还局限在 1900 年到 1950 年。在这方面，一些大数学家的论述的确为我们的认识提供了线索。诚然，许多数学史家的确不喜欢数学家多少带有主观偏见的论述，但是，对于研究 19 世纪特别是 20 世纪的数学史家来说，

他们的困难也在于如何正确地理解和把握数学内容和数学思想，而这正是专业数学家之所长。虽然专业数学家在掌握专业和技术内容方面可能是深入的，但是，他们在由此掌握数学全局以及从历史、从发展看问题未免又有所短。数学家最难把握的往往是他所研究的狭窄课题在整个数学甚至在某一分支中的地位以及它的作用。幸好，我们还有一些有文化、历史、哲学素养的大数学家，他们的确能在千头万绪、杂乱无章的数学论文的海洋中，给我们指出数学的主流和发展方向。

因此，对于试图研究 20 世纪数学史的学者来说，与其在数学的汪洋大海中盲目挣扎，还不如暂时接受一些大数学家的方向引导，找出 20 世纪数学发展的主线，对数学有一个整体的认识，然后旁及其它，逐步深入。我们看，这可能是一个比较妥当的办法。没有一个适当的研究框架，我们很难找到自己的位置。只有在我们能够驾驭整个局势时，我们再对他们进行批判也不为晚。

在庞加莱（Poincaré，Henri，1854—1912）、希尔伯特（Hilbert，David，1862—1943）之后，20 世纪最伟大的数学家非外尔（Weyl，Hermann，1885—1955）莫属。他不仅为我们留下许多数学成果和数学方法，而且对于他亲历的整个 20 世纪前半期的数学，进行了客观而中肯的评述。让我们把它们作为本书的引导。不妨我们引用他的语录来显示他的思想，这更能凸显他本人的观点。

外尔的 4 大卷论文都值得好好一读。这里我们引用的主要取自他的“半个世纪的数学”（1951）以及他对影响本世纪数学最大的数学家希尔伯特和爱米·诺特（Noether，Emmy，1882—1935）工作的评述：“大卫·希尔伯特及其数学工作”

(1944), “爱米·诺特”(1935), 这三篇论文均有汉译本。遗憾的是，他还有许多重要著作没有汉译本。不过，我们也选一些，供参考。

在引用他的语录之前，我们先把他对上半世纪数学的主题开列如下：

半个世纪的数学

1. 导论、公理论

第一部分　代数学、数论、群

2. 环、域、理想
3. 代数学和数论的一些成就
（p 进数域、类域论、素数分布和 ζ 函数、堆叠理论、超越数论）
4. 群、向量空间和代数
5. 结束语
（群在数学中的核心作用，若尔当（Jordan, Camille, 1838—1922）—荷尔德（Hölder, Otto, 1859—1937）定理，群表示论、线性群、群与几何学、连续群、李（Lie, Sophus, 1842—1899）代数）

第二部分　分析、拓扑学、几何学、基础论

6. 线性算子及其谱分解，希尔伯特空间
7. 勒贝格（Lebesgue, Henri, 1875—1941）积分、测度论、遍历假设
8. 拓扑学和调和积分
9. 共形映射、亚纯函数、大范围变分法（特别强调拓扑观点）
10. 几何学（微分几何学、黎曼（Riemann, Bernhard,

1826—1866）度量、联络、曲率、大范围微分几何学、纤维空间）

11．基础论

这个提纲正好印证他对20世纪（至少是上半世纪）数学主流的看法，“当前拓扑学的天使和代数学的魔鬼在争夺数学的灵魂”。

影响20世纪的伟大数学家还应该举出冯·诺伊曼（Von Neumann, John, 1903—1957），当然他更以计算机的开创者、计算数学家、应用数学家而知名。但是，这位全才的数学家对于结构数学依然有重大贡献，他的思想仍然领先于他的时代。例如他在数理逻辑，希尔伯特空间的算子理论、算子代数、群上测度以及遍历理论方面的工作都是开创性的。

正是上面4位数学巨人，再加上嘉当（Cartan, Elie, 1869—1951）、爱米·诺特、哥德尔（Gödel, Kurt, 1906—1978）、维纳（Wiener, Norbert, 1894—1964）等大数学家，以及法国的函数论学派，俄国—苏联学派（特别是鲁金（Luzin, Nikolai Nikolaievich, 1883—1950）为首的莫斯科学派），波兰学派（特别是以巴拿赫（Banach, Stefan, 1892—1945）为代表的里沃夫学派），最后由布尔巴基学派集其大成，20世纪的数学最终走上自己的光辉历程。