

20世纪数学思想

胡作玄 邓明立 / 著

Ershi Shiji Shuxue Sixiang
Ershi Shiji Shuxue Sixiang

山东教育出版社

20 世纪 数学思想

ERSHI SHIJI SHUXUE SIXIANG

胡作玄 邓明立 / 著

山东教育出版社

20 世纪数学思想

胡作玄 邓明立 著

出版者: 山东教育出版社
(济南市纬一路 321 号 邮编: 250001)
电话: (0531) 2023919 传真: (0531) 2050104
网址: <http://www.sjs.com.cn>
发行者: 山东省新华书店
印刷: 山东新华印刷厂德州厂
版次: 1999 年 5 月第 1 版
2001 年 1 月第 2 次印刷
规格: 850mm×1168mm 32 开本
印张: 20 印张
插页: 5
字数: 441 千字
书号: ISBN 7-5328-2685-6/G·2468
定价: 25.50 元

(如印装质量有问题, 请与印刷厂联系调换)

序

20 世纪行将过去。在这“千纪末”当然也是“世纪末”的时候，我们不能不想到 19 世纪末那真正的“世纪末”（fin de siècle）。那时，对社会、经济、文化和科学，多少有些悲观情绪，与我们现在这种乐观情绪恰成鲜明的对照。当时，无论是物理学还是数学都存在某种“危机”，而这危机恰巧促成物理学和数学的新生。不管怎样，希尔伯特对前途充满信心，并为“我们的科学”奋斗一生。而客观上讲，他为未来世纪的数学——结构数学的产生与发展铺平了道路。

尽管十分之九的数学是在 20 世纪产生的，但 100 年前数学家的许多工作，现在仍然是有待填补的空白。回顾过去，他们干出许多大事：

1. 德国数学家组织了《数学百科全书》的出版，这个 23 卷的庞然大物，收集了当时几乎所有的数学知识，为数学建立起极好的理论框架。

2. 克莱因开始撰写《19 世纪数学的发展》，实际上，他在开始组织《数学百科全书》时，曾设想有第七部分专讲数学史。

3. 希尔伯特在总结过去的基础上，提出面向未来的数学问题。实际上，整个 19 世纪，各国科学院尤其是法国科学院

都不时提出重大问题，指导数学的发展。

4. 许多数学家撰写 19 世纪数学的总结性评述，通过回顾过去，展望未来。

更值得一提的是帕斯卡勒 (Pascal, Ernst)，他出版了《数学宝典》，对当时整个数学加以评述。其中对不变式论和椭圆函数论等课题的详尽介绍，使后来的著作无出其右。通过对整个数学的介绍，各学科之间的关系也十分清楚，它立即被译成德文。

到了 20 世纪，这种健康的数学文化完全崩溃，没有系统、没有关联、没有问题、没有历史的来龙去脉、没有主流和支流、没有哲学、没有方法，剩下的只是“定义—定理—证明”的汪洋大海。甚至国际数学家大会（也是在 100 年前开始的）上的全会报告，有许多也是从第一句话起就让隔行数学家不知所云。

20 世纪末，一方面数学已发展到“隔行如隔山”的地步，另一方面，不仅专业数学家，连许多物理学家也对李群、拓扑、流形、上同调、黎曼面、纤维丛、联络、 p 进域，甚至概形、动形等都到了如数家珍的程度。我们上哪里去找有这些内容的书呢？

本书就是这方面的尝试，说白了就是同数学专著的内容（定理和证明）互相补充。它主要介绍 20 世纪数学的主流——结构数学的来龙去脉，主要问题，中心定理以及方方面面的联系。结构数学与经典数学有一个明显的不同之处，就是抽象概念极多，由于它们几乎无处不在，这里选择其中最主要的几十个加以定义，对于大部分现代数学，吃透它们也就可以理解其含义了。当然，这只是第一步，后来的技术、技巧和方法，当

然是专家的手段，也是专业学习的内容了。

20 世纪的结构数学门类繁多，内容广泛。如果全面介绍，哪怕是只列举出学科名称都十分困难，因此，不得不抓住重点。这就是第二篇的群论和第三篇的拓扑学。掌握这些，再加上第一篇的基本概念和基本框架，对理解 20 世纪数学思想的主流想必会有所收益。群与拓扑的重要性，特别表现在第四篇中。可以设想，要没有结构数学，特别是群与拓扑，这些学科仍将停留在它们的初级阶段。

最后，我们概括一下结构数学的前沿，对于最新结果尽可能收入，文献大致截止于 1997 年年中。

不管怎样，这是一种奇特的尝试，我们只是试图粗线条地给数学一个历史的、全面的、前瞻的图景，而对细节不可能给出面面俱到的论述，这方面我们有大批的专著和论文进行深入的探讨。但无论如何，本书的错误及不当之处，欢迎专家和读者指正。

本书的写作显然是长期研究和积累的结果。在此期间，第一著者得到国家自然科学基金会和中国数学会传播委员会的部分支持，谨此致谢。

对于本书的责任编辑、山东教育出版社社长兼总编辑孙永大先生所付出的辛勤劳动，谨表示诚挚的谢意。

著 者

1998 年 7 月

责任编辑 / 孙永大

装帧设计 / 高 空

20 世纪 数学思想

E r s h i S h i j i S h u x u e S i x i a n g

ISBN 7-5328-2685-6



9 787532 826858 >

ISBN 7-5328-2685-6/G·2468

定价：25.50 元

目 录

序.....	1
引言.....	1

第一篇 结构数学基础

1 19 世纪数学的遗产	8
1.1 18 世纪末之前的数学	9
1.2 19 世纪的数学	19
2 19 世纪末的数学基础研究	44
2.1 几何学基础与公理化	44
2.2 实数理论	51
2.3 集合论	56
2.4 数理逻辑	62
3 数学结构的基本概念	78
3.1 数学结构	78
3.2 集合与映射	80
3.3 序结构	83
3.4 代数结构	85
3.5 拓扑结构	90
3.6 复合结构	91
3.7 多重结构	93

3.8 混合结构	95
3.9 衍生结构	96
4 20 世纪数学一瞥	103
4.1 结构的产生与结构数学的兴起	104
4.2 抽象代数学	106
4.3 一般拓扑学与泛函分析	118
4.4 经典数学	123
5 一些基本的数学结构	132
5.1 域	132
5.2 拓扑空间	146
5.3 点集纲性与测度	167
5.4 希尔伯特空间	176
5.5 巴拿赫空间	183

第二篇 群 论

1 群论的历史渊源与理论框架	194
1.1 群论概念的产生	194
1.2 从对称性到群	196
1.3 从具体群到抽象群	203
1.4 群论的理论框架	207
2 阿贝尔群	211
3 有限置换群	220
3.1 置换群的表示	220
3.2 置换群的一些基本概念	222
3.3 可迁群与 k 重可迁群	224
3.4 2 重可迁群的分类	229

4	有限群	234
4.1	群的列举	237
4.2	群的基本结构	240
4.3	算术结构	245
4.4	有限幂零群和可解群	250
4.5	有限单群	255
4.6	群表示论	287
5	无限群	297
5.1	自由群与自由积	299
5.2	有限表出群	304
5.3	伯恩塞德问题	309
5.4	无限幂零群和可解群	312
6	李群	317
6.1	李群的发展历史	317
6.2	李变换群	321
6.3	基灵和嘉当的工作	330
6.4	李代数理论	334
6.5	整体李群	341
7	代数群	347

第三篇 拓扑学

1	导言	358
2	直观拓扑学	361
2.1	哥尼斯堡七桥问题	361
2.2	平面布线问题	362
2.3	多面体的欧拉公式	362

2.4	若尔当定理	364
2.5	单侧曲面	365
2.6	曲面的拓扑分类	368
2.7	四色问题	371
3	拓扑学的早期历史	373
4	同调理论	379
4.1	复合形与同调群	379
4.2	奇异同调论	387
4.3	同调论公理	390
4.4	上同调理论	392
4.5	不动点定理	398
4.6	拓扑 K 理论	400
5	同伦理论	403
5.1	引言	403
5.2	同伦论前史	405
5.3	映射度	409
5.4	同伦群	414
5.5	组合同伦群	423
5.6	球面同伦群	433
5.7	阻碍理论	440
6	纤维空间和纤维丛	443
6.1	前史	443
6.2	定义	446
6.3	纤维丛的引入	451
6.4	纤维丛的分类问题	453
6.5	示性类	455

7	微分流形	464
7.1	微分流形的引入	464
7.2	配边理论	470
8	低维流形	475
8.1	三维流形	475
8.2	纽结理论	480
8.3	四维流形的拓扑	487
9	范畴与函子	492
9.1	范畴	492
9.2	函子	497
10	同调代数	499
10.1	模	500
10.2	导出函子	502

第四篇 几何学与数论

1	微分流形的几何学	507
1.1	微分流形	507
1.2	微分流形的基础结构	509
1.3	微分流形的上层结构	510
1.4	微分流形的几何结构	513
2	大范围分析	520
2.1	德·拉姆理论	522
2.2	莫尔斯理论	526
2.3	微分映射的奇点理论	529
2.4	指标定理	533
2.5	叶状结构	537

3	复解析几何学	545
3.1	多复变函数论	545
3.2	复流形	550
4	代数几何学	555
4.1	前史	555
4.2	抽象代数几何学	558
4.3	代数曲线	565
4.4	代数曲面	570
5	代数数论	575
5.1	代数整数论	577
5.2	结构理论	583
5.3	解析理论	590
5.4	几何理论	597
	结束语	606
	参考文献	613

引 言

从本书的书名《20 世纪数学思想》来看，同 M·克莱因 (Kline, Morris, 1908—1992) 的名著《古今数学思想》(1972) 有某种亲缘的关系。可是，比起《古今数学思想》这样的历史论述和分析，20 世纪的数学史还根本无法做到。从数学内容的艰深和数学领域的广阔来看，我们几乎无法全面而深入地掌握 20 世纪的数学素材，就像 19 世纪末和 20 世纪初，许多数学家及数学史家所做的评述那样。在这方面，我们也无法同兄弟学科和亲缘的学科相比。对于 20 世纪物理学史和生物学史，不仅有较多的专著问世，例如 1995 年出版的三大卷《20 世纪物理学》，而且在资料积累及研究方面已有相当的基础。物理学史有相当丰富的口头史资料供人使用。与数学同宗的计算史，甚至早在 70 年代后期就有专门的期刊，还有多次的学术会议。可以说，当代的科学技术史研究热火朝天。

反观数学史，20 世纪数学史的研究可以说几乎是空白。郑重的数学史研究大致到达 19 世纪末，而 20 世纪数学史直到最近才刚刚开始，研究的范围还局限在 1900 年到 1950 年。在这方面，一些大数学家的论述的确为我们的认识提供了线索。诚然，许多数学史家的确不喜欢数学家多少带有主观偏见的论述，但是，对于研究 19 世纪特别是 20 世纪的数学史家来说，

他们的困难也在于如何正确地理解和把握数学内容和数学思想，而这正是专业数学家之所长。虽然专业数学家在掌握专业和技术内容方面可能是深入的，但是，他们在由此掌握数学全局以及从历史、从发展看问题未免又有所短。数学家最难把握的往往是他所研究的狭窄课题在整个数学甚至在某一分支中的地位以及它的作用。幸好，我们还有一些有文化、历史、哲学素养的大数学家，他们的确能在千头万绪、杂乱无章的数学论文的海洋中，给我们指出数学的主流和发展方向。

因此，对于试图研究 20 世纪数学史的学者来说，与其在数学的汪洋大海中盲目挣扎，还不如暂时接受一些大数学家的方向引导，找出 20 世纪数学发展的主线，对数学有一个整体的认识，然后旁及其它，逐步深入。我们看，这可能是一个比较妥当的办法。没有一个适当的研究框架，我们很难找到自己的位置。只有在我们能够驾驭整个局势时，我们再对他们进行批判也不为晚。

在庞加莱 (Poincaré, Henri, 1854—1912)、希尔伯特 (Hilbert, David, 1862—1943) 之后，20 世纪最伟大的数学家非外尔 (Weyl, Hermann, 1885—1955) 莫属。他不仅为我们留下许多数学成果和数学方法，而且对于他亲历的整个 20 世纪前半期的数学，进行了客观而中肯的评述。让我们把它们作为本书的引导。不妨我们引用他的语录来显示他的思想，这更能凸显他本人的观点。

外尔的 4 大卷论文都值得好好一读。这里我们引用的主要取自他的“半个世纪的数学” (1951) 以及他对影响本世纪数学最大的数学家希尔伯特和艾米·诺特 (Noether, Emmy, 1882—1935) 工作的评述：“大卫·希尔伯特及其数学工作”

(1944), “爱米·诺特”(1935), 这三篇论文均有汉译本。遗憾的是, 他还有许多重要著作没有汉译本。不过, 我们也选一些, 供参考。

在引用他的语录之前, 我们先把他对上半世纪数学的主题开列如下:

半个世纪的数学

1. 导论、公理论

第一部分 代数学、数论、群

2. 环、域、理想

3. 代数学和数论的一些成就

(p 进数域、类域论、素数分布和 ζ 函数、堆叠理论、超越数论)

4. 群、向量空间和代数

5. 结束语

(群在数学中的核心作用, 若尔当 (Jordan, Camille, 1838—1922) — 荷尔德 (Hölder, Otto, 1859—1937) 定理, 群表示论、线性群、群与几何学、连续群、李 (Lie, Sophus, 1842—1899) 代数)

第二部分 分析、拓扑学、几何学、基础论

6. 线性算子及其谱分解, 希尔伯特空间

7. 勒贝格 (Lebesgue, Henri, 1875—1941) 积分、测度论、遍历假设

8. 拓扑学和调和积分

9. 共形映射、亚纯函数、大范围变分法 (特别强调拓扑观点)

10. 几何学 (微分几何学、黎曼 (Riemann, Bernhard,

1826—1866) 度量、联络、曲率、大范围微分几何学、纤维空间)

11. 基础论

这个提纲正好印证他对 20 世纪 (至少是上半世纪) 数学主流的看法, “当前拓扑学的天使和代数学的魔鬼在争夺数学的灵魂”。

影响 20 世纪的伟大数学家还应该举出冯·诺伊曼 (Von Neumann, John, 1903—1957), 当然他更以计算机的开创者、计算数学家、应用数学家而知名。但是, 这位全才的数学家对于结构数学依然有重大贡献, 他的思想仍然领先于他的时代。例如他在数理逻辑, 希尔伯特空间的算子理论、算子代数、群上测度以及遍历理论方面的工作都是开创性的。

正是上面 4 位数学巨人, 再加上嘉当 (Cartan, Elie, 1869—1951)、爱米·诺特、哥德尔 (Gödel, Kurt, 1906—1978)、维纳 (Wiener, Norbert, 1894—1964) 等大数学家, 以及法国的函数论学派, 俄国—苏联学派 (特别是鲁金 (Luzin, Nikolai Nikolaievich, 1883—1950) 为首的莫斯科学派), 波兰学派 (特别是以巴拿赫 (Banach, Stefan, 1892—1945) 为代表的里沃夫学派), 最后由布尔巴基学派集其大成, 20 世纪的数学最终走上自己的光辉历程。