目 录

第六章 线性空间

§1. 线性空间的定义

基本内容

$V=\{\alpha,\beta,\cdots\}$是非空集合，$F=\{a,b,\cdots\}$是数域．对于$V$中任意二元素$\alpha$，$\beta$能在$V$中找到唯一元素叫做与$\alpha$的$\beta$和，记作$\alpha+\beta$．求和的规则叫做加法运算．关于加法运算满足：

1° 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2° 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3° 在V中存在元素0，对V中任一元素α，都有$0+\alpha=\alpha$，称0为V的0向量．

4° 对任意$\alpha\in V$，都存在$\beta\in V$，使$\alpha+\beta=0$，称β为α的负向量，记作$-\alpha$．

对于V中任意α和F中任意a，V中存在唯一的元素，叫做a与α之积，记作$a\alpha$．求数与向量之积的规则叫数乘运算．关于数乘运算满足

5° $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$

6° $(ab)\alpha=a(b\alpha)$

7° $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$

8° $1\alpha=\alpha$

把这样的V叫做F上的线性空间，F叫V的系数域，V的元素叫向量，F的元素叫纯量（数）

习 题

1． 在线性空间的定义中，(3)，(4)两条可换成等价条件：对V中任意二元素α，β，一定存在元素x，使$\alpha+x=\beta$．记$x=\beta-\alpha$，

2． 证明线性空间具有以下基本性质：

1) 零向量是唯一的；

2) 向量α的负向量是唯一的

3) $0\alpha=0$，$a0=0$

4) 若$a\alpha=0$，则$a=0$或$\alpha=0$

5) $(-1)\alpha=-\alpha$

6) $m\alpha=\overbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}^{m个}$ m是非负整数

7) $-(a\alpha)=(-a)\alpha=a(-\alpha)$

8) $a(\alpha-\beta)=a\alpha-a\beta$

3． 按通常的多项式加法和数与多项式乘法，下列集合是否构成数域P上线性空间

1) $P[x]$：数域P上一元多项式集合；

2) $P[x]_n$：数域P上次数不大于n的多项式和0多项式集合；

3) $P[x]^n$：数域P上次数等于n的多项式的集合

4. 在三维笛卡儿直角坐标系中，按通常的向量加法和数乘向量的运算，下列集合是否是实数域R上的线性空间.

1) V_2：平面H上所有向量的集合；

2) 位于第一卦限，以原点为始点的向量集合M；

3) 位于第一卦限和第三卦限，以原点为始点的向量集合N；

4) x轴上向量集合X；

5) 平面H上，不平行某向量α的向量集合Q.

5. 按通常的阵的加法和数乘阵的运算，下列集合是否构成数域P上的线性空间

1) $P_{m\times n}$：数域P上m行n列阵的集合；

2) M_n：数域P上n阶方阵的集合；

3) $GL_n(P)$：数域P上n阶可逆阵的集合；

4) $SL_n(P)$：数域P上行列式为1的n阶阵的集合；

5) 数域P上n阶（反）对称阵的集合；

6) 数域P上n阶（上）下三角形阵的集合；

7) 数域P上迹为0的n阶阵集合；

8) 数域P上，主对角线元素为0的n阶阵集合；

9) 数域P上n阶0阵的集合；

10) 数域P上n阶单位阵的集合；

6. 按通常的函数加法和数乘函数运算，下列集合是否构成实数域R上的线性空间.

1) $[0\quad 1]$区间上的实函数集合

2) $[0\quad 1]$区间上连续函数集合$c[0,1]$

3) $[0\quad 1]$区间上积分为0的函数集合.

7. 按通常的数的加法和数的乘法，下列数集是否构成有理数域P上的线性空间；是否构成实数域R上的线性空间？

1) 整数集Z

2) 有理数集P

3) 实数集R

4) 复数集Q

5) 单元数集$\{0\}$

6) n元数集$N=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

8. 按通常的阵的加法和数乘阵的运算，下列阵的集合是否构成给定数域上的线性空间

1) 实数域上n阶方阵集合，是否构成复数域Q上的线性空间

2) 复数域上n阶方阵集合，是否构成实数域上的线性空间，

9. 设

$$M=\{(a,b)\,|\,a,b\in R\}$$

其中R是实数域，规定：

$$(a_1\ \ b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+b_2\ \ b_1+b_2+a_1\cdot a_2)$$

$$k\cdot(a\quad b)=(ka\quad kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$$

问M关于运算，+，·是否构成R上的线性空间？

10．设R^+是正实数集合，R是实数域，规定：

$$a\oplus b=ab,\ k\circ a=a^k$$

其中a，$b\in R^+$，$k\in R$，问R^+关于运算$\oplus$和$\circ$是否构成R上的线性空间？

11．设

$$U=\{\cos\alpha+\sin\alpha|\ \alpha\in R\}$$

其中R是实数域，规定

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\oplus(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$k\circ(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

问U关于运算$\oplus$，$\circ$是否构成R上的线性空间

§2．线性关系

基本内容

以$V(F)$表示数域F上的线性空间，对$V(F)$中的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$称式子

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性组合式．其中$k_i\in F$，$i=1,2,\cdots,s$对线性组合式，可进行加法和数乘运算，也可以合并同类项。

关于有限个向量的线性相关，线性无关，线性表出等概念，可参考本书第四章§1．将这几个概念推广到一般向量集上将有：

若向量β可被向量集T的有限部分线性表出，则称β可被T线性表出．

若向量集T的每个有限部分都是线性无关的，则称T是线性无关的：

两个向量组T和S，如果T中每个向量都可被S线性表出，就说T可被S线性表出；如果S和T可互相线性表出，就说S和T是等价的；

向量组T中，如果线性无关向量之最大个数是有限数，则称此数为T之秩(*Rung*)．否则称T之秩为无限的．

习　题

第四章§1的题可作为此节的题来做．

12．单向量α的向量集如果是线性相关的，那么$\alpha=0$；如果是线性无关的，那么$\alpha\neq0$．

13．二向量α，β的向量集是线性相关的，必要且只要$\alpha=k\beta$，其中k是系数域F中的某个数．

14．设T是至少含有两个向量的集合，则T是线性相关的，必要且只要T中有一向量β，可被T中有限个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出．

15．若向量组T之秩为r，则T中每个向量β，皆可表成r个线性无关向量的线性

组合且表出系数是唯一的，

16．设T, S, U是$V(F)$的向量组，若T可被S性表出，S可被U线性表出，则T可被U线性表出．

17．设T是$V(F)$中不全为0的有限向量组，证明在T中存在线性无关部分组R，使T可被R线性表出．如果T是无限向量组，结论将如何？

18．在〔$-1, 1$〕区间上连续函数的全体C〔$-1, 1$〕所构成的实域R的线性空间中，下列函数集是否线性相关的．

1) 1，$\cos^2\alpha$　$\cos 2\alpha$

2) $\sin^2 x$，$\cos 2x$，1

3) $\{\cos(n \arccos x) \mid n=0, 1, 2, \cdots\}$

19　实系数多项式空间$P[x]$中，下列多项式集，是否线性相关？

1) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$是互质的，但两两不互质．

2) $T=\{\sum_{i=0}^{n} x^i \mid n=0, 1, 2, \cdots\}$

3) $U=\{f(x) \mid f(x) \in p[x]$且$f^{(n)}(0)=0\}$

20．设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是线性无关组，如果

$$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$$

且$a_i \neq 0$，那么

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n$$

也是线性无关的

21．如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$满足

1) $\alpha_1 \neq 0$

2) α_i不能被前面的$i-1$个向量线性表出$1 \leqslant i \leqslant s$证明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$是线性无关组．

22．在多项式空间$P[x]$中，向量组

$$f_i(x)=\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^j \quad i=1, 2, \cdots, m$$

是线性无关的，试证向量组

$$g_i(x)=\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^j+\sum_{j=n+1}^{n+t} b_{ij} x^j \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

是线性无关的．

23．在多项式空间$P[x]$中，向量组

$$g_i(x)=\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j+\sum_{j=k+1}^{n} b_{ij} x_j \qquad i=1, 2, \cdots, m;\ k \leqslant n$$

线性相关的，求证向量组

$$f_i(x)=\sum_{j=0}^{k} a_{ij} x_j \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

线性相关

24．在线性空间$P[x]$中，试求向量组

$$T=\{f(x) \mid \deg f(x)=n\}$$

的一个最大无关组

25．在线性空间$P[x]$中，试求向量组

$$T=\left\{\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \mid n=0,1,2,\cdots\right\}$$

的一个最大无关组。

§3．基底、维数和坐标

基本内容

在线性空间$V(F)$中，如果向量组T能将$V(F)$中每个向量线性表出，则称T为$V(F)$的一个生成系，生成系的向量叫生成向量。

线性无关的生成系称为$V(F)$的基底。

具有有限个向量构成生成系的线性空间，所有基底含有向量个数若相同，称此数为线性空间的维数。零空间不存在基底，它的维数规定为0，数域F上的n维线性空间记为$V_n(F)$。

不具有有限基底的非0线性空间，叫无限维空间。

线性空间$V(F)$中，任一向量β，被基底线性表出时，表出系数称为β在该基底上的坐标。

习　　题

26．在实数域R上按5数组空间V_5的运算规则如果线性空间V的生成系是

$$\alpha_1=(1,0,-1,0,-1),\quad \alpha_2=(0,1,0,1,1)$$
$$\alpha_3=(1,-1,0,1,1),\quad \alpha_4=(1,0,-1,1,0)$$
$$\alpha_5=(2,-1,-1,2,1).$$

那么：
$$\beta_1=(1,0,0,2,2),\quad \beta_2=(2,-1,-1,1,0)$$
$$\beta_3=(1,1,-1,1,0)$$

是V中3个线性无关的向量。再在5个α_i中，求出三个，代以β_1，β_2，β_3使之仍为V的生成系。

27．$P[x]_2$是数域P上不超过2次的多项式和0多项式构成的线性空间。证明

$$x^2+x,\ x^2-x,\ x+1$$

为$P[x]_2$的基底，并求$2x^2+7x+3$在此基上的坐标。

28．在$V_n(F)$中，线性无关向量组所含向量个数不超过n。

29．在$V_n(F)$中，生成系所含向量个数不小于n。

30．在$V_n(F)$中，n个向量构成的生成系，一定是基底。

31．在$V(F)$中，如果α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$能将$V(F)$的每个向量线性表出，且表法唯一，那么它是$V(F)$的一组基底向量。

32．在线性空间$V(F)$中，如果向量组α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$能将$V(F)$中每个向量线性表出，又对$V(F)$中某一向量β表法唯一，那么α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$必是$V(F)$的基底。

33．在$P[x]_n$中，证明生成系$1, x, \cdots, x^n$是基底，并求$P[x]_n$的维数．

34．在$P[x]_n$中，令

$$f_i(x)=\sum_{j=0}^{i} a_{ij} x^j,$$

其中 $a_{ii} \neq 0$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$ 证明，$f_0, f_1, \cdots, f_n$ 是$P[x]_n$的基底．

35．在$P[x]_n$中，如果$\deg f(x)=n$，求证

$$f(x),\ f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)$$

是$P[x]_n$的基底。如果，$f(x)=(x-a)^n$ 对任一 $g(x) \in P[x]_n$ 如何求它的坐标？

36．已知$P[x]_n$中，n次多项式$g(x)$在互不相同的a_i点的值 $g(a_i)=b_i$ $i=0, 1, \cdots, n$，在基底$1, x, \cdots, x^n$上求 $g(x)$的坐标．

37．设$P_{m\times n}$是数域P上m行n列阵集合所构成的线性空间，求其维数．

38．求数域P上n阶对称阵所构成的线性空间的维数．

39．求数域P上n阶反对称阵所构成的线性空间的维数．

40．试求数域P上二阶方阵的集合M_2的两组不同基底，并求出向量

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

在所求基底上的坐标．

41．证明实域R上三阶方阵集合M_3是R上的9维线性空间，并证明当

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

时，E，A，A^2，B，AB，A^2B，B^2，AB^2，A^2B^2，为此空间的一组基底．

42．同一向量在不同基底上坐标是否不同？不同向量在同一基底上坐标是否不同？在$P[x]_n$中对向量$g(x)=(x+a)^n$ 试求出两个不同基底，使其坐标相同？

43．在$P[x]_2$中，如果$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x) \in P[x]_2$两两线性无关，问$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$是否是$P[x]_2$的基底？

44．在由正实数集R^+关于运算：加法"$\oplus$"

$$\alpha \oplus \beta=\alpha\beta$$

数乘"$\cdot$"

$$a \cdot \alpha=\alpha^a$$

（$a \in$实数域R）所构成的R上的线性空间R^+中，求其基底和维数．

45．关于数的加法和数的乘法，以1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$为生成系，在有理数域P上生成线性空间V，问V是几维的？

46．在开区间（0，1）上连续函所构成的线性空间$C(0\ \ 1)$中试证

$$1,\ x,\ x^2\cdots$$

是无穷多个向量所构成的线性无关组，但它不是$C(0,1)$的基底

47．在有理系数多项式集合$P[x]$所构成的线性空间中，证多项式

$$1,\ x,\ x^2\cdots$$

是$P[x]$的一组基底，并求$P[x]$的维数

48．试求由二个未定元 x，y 的三次齐次式和 0 多项式所构成的有理数域 P 上的线性空间的维数．对于 K 个未定元的 n 次齐次式和 0 多项式所构成的线性空间，维数又如何求？

49．关于数的加法和数的乘法有理数集 P 构成有理数域 P 上的线性空间，求此空间的维数．

实数集 R 构成 P 上线性空间，求此空间的维数。

复数集合 Q 构成实数域 R 上的线性空间，求此空间的维数。

50．复数域 Q 上二阶方阵集合，构成实域 R 上的线性空间，求其维数．

§4．基底变换和坐标变换

基本内容

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $V_n(F)$ 的两种基底．因而有

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j \qquad i=1,2,\cdots,n$$

称 n 阶方阵

$$A=(a_{ij})$$

为由基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基底 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡阵．

如果 $A=(a_{ij})$ 是基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡阵，那么 $A=(a_{ij})$ 是非奇异阵；如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 是非奇异阵）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 是 $V(F)$ 的基底，那么向量组

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\alpha_j \qquad i=1,2,\cdots,n$$

也是 $V_n(F)$ 的基底。

借助于矩阵的运算，上面 n 个等式可用一个矩阵等式

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=(a_{ij})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

来表示．

在 $V_n(F)$ 中向量 η 在基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 上的坐标是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$；在基底 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 上的坐标是 $b_1,b_2\cdots,b_n$ 如果

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j \qquad i=1,2,\cdots,n$$

那么坐标间将有关系式

$$a_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_j \qquad j=1,2,\cdots,n$$

写成矩阵等式为

$$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(a_{ij})'\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

从而也有

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = [(a_{ij})']^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

如果通过过渡阵将基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 演化为基底 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，又通过过渡阵 B 将基底 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 演化为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 那么基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基底 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 的过渡阵将是 BA. 如果向量 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 上的坐标是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；在 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 上的坐标是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 那么两组坐标间将有关系式

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (BA)'^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= B'^{-1} A'^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称 A'^{-1} 为 A 的逆步阵.

在同一基底上，向量和的坐标等于向量的坐标和；数乘向量的坐标等于向量坐标乘以数.

习　　题

51. 在三数组空间 V_3 中，求基底

$$\varepsilon_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$$
$$\varepsilon_2 = (0 \quad 1 \quad 0)$$
$$\varepsilon_3 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

到基底

$$\alpha_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$$
$$\alpha_2 = (1 \quad 1 \quad 0)$$
$$\alpha_3 = (1 \quad 1 \quad 1)$$

的过渡阵.

52. 在 V_3 中，求由基底 $\alpha_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$，$\alpha_2 = (1 \quad 1 \quad 0)$，$\alpha_3 = (1 \quad 1 \quad 1)$ 通过过渡阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所演化出的新基底.

53. 已知 V_3 中的向量 α 在基底

$$\varepsilon_1 = (1 \quad 0 \quad 0), \quad \varepsilon_2 = (0 \quad 1 \quad 0), \quad \varepsilon_3 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

是 $P[x]_n$ 的基底。如果，$f(x) = (x-\alpha)^n$ 对任一 $g(x) \in P[x]_n$ 如何求它的坐标？

的坐标为2，3，5试求α在基底

$$\eta_1=(1\ \ 0\ \ 0),\quad \eta_2=(1\ \ 1\ \ 0),\quad \eta_3=(1\ \ 1\ \ 1)$$

上的坐标。

54．在$P[x]_3$里，求基底

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=x,\ \alpha_2=x^2,\ \alpha_3=x^3$$

到基底

$$\beta_0=1,\beta_1=1+x,\ \beta_2=1+x+x^2,\ \beta_3=1+x+x^2+x^3$$

的过渡阵．又知$g(x)$在基底$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$上的坐标为1，0，$-2$，5，$f(x)$在基底$\beta_0$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$上的坐标为7，0，8，$-2$，试求$f(x)+g(x)$在基底$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_0,\beta_1,\beta_2$，$\beta_3$上的坐标．

55．在$P[x]_n$中求由基底

$$1,\ x-a,\ (x-a)^2,\cdots,(x-a)^n$$

到基底

$$1,\ x,\ x^2,\cdots,x^n$$

的过渡阵．对于

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

求在第一个基底上的坐标。

56．在$P[x]_n$中令$f(x)=(x-a)^n$，$g(x)=(x-b)^n$，求基底

$$f(x),\ f'(x),\ f^{(2)}(x),\cdots,g^{(n)}(x)$$

到基底

$$g(x),\ g'(x),\ g^{(2)}(x),\cdots,g^{(n)}(x)$$

的过渡阵。

57．在实域R上二阶方阵集合M_2构成4维线性空间。

1）试求基底

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

到基底

$$F_1=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad F_2=\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix},\quad F_3=\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix},\quad F_4=\begin{bmatrix}6&6\\1&3\end{bmatrix}$$

的过渡阵．

2）求向量

$$M=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

在基底E_1，E_2，E_3，E_4和F_1，F_2，F_3，F_4上的坐标

3）在M_2中求一非0向量P，使P在基底E_1，E_2，E_3，E_4和F_1，F_2，F_3，F_4上的坐标相等。

58．在$P[x]_n$中

1）证明

$$f_i(x)=\frac{\prod_{k=0}^{n}(x-a_k)}{x-a_i}\qquad i=0,1,\cdots n$$

是一组基底。其中当 $i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$

2） 如取 $a_i=\varepsilon i$，ε 是 $n+1$ 次单位原根，求由基底

$$1,\ x,\cdots,x^n$$

到基底

$$f_0(x),\ f_1(x),\cdots,f_n(x)$$

的过渡阵。

59．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,{}_n$ 是 $V_n(F)$ 的基底，对于 F 中的数 $l\neq1$，如果

$$\beta_i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-i+1}+l\alpha_{n-i+2}+\alpha_{n-i+3}+\cdots+\alpha_n$$

$i=1,2,\cdots,n$ 证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $V_n(F)$ 的基底

60．在 $P[x]_2$ 中，在基底

$$1,\ x,\ x^2\qquad(1)$$

上向量 α 的坐标是 1，0，-1，在基底

$$1+x,\ x+x^2,\ x^2\qquad(2)$$

上向量 β 的坐标是 2，1，0，在基底

$$1,\ x-x^2,\ x+x^2\qquad(3)$$

上向量 γ 的坐标是，0，-1，1 求 $\alpha+\beta+\gamma$ 在 1，x，x^2 上的坐标，并通过（1）到（2）的过渡阵和（1）到（3）的过渡阵求出（2）到（3）的过渡阵。

§5．子 空 间

基 本 内 容

数域 F 上的线性空间 $V(F)$ 的子集 L，若关于 $V(F)$ 的加法和数乘运算，仍构成 F 上的线性空间，则称 L 为 $V(F)$ 的子空间。

$V(F)$ 的子集 L 是子空间的充分必要条件为：当 $\alpha,\beta\in L$ 时，有 $\alpha+\beta\in L$；当 $a\in F$ $\alpha\in L$ 时，有 $a\alpha\in L$。

零空间 0 和全空间 $V(F)$ 当然是 $V(F)$ 的子空间，称明显子空间；$V(F)$ 的其他子空间，称真子空间.

子空间 R 和 L 共有部分

$$R\cap L=\{\alpha\mid\alpha\in R\ 且\ \alpha\in L\}$$

仍是子空间，称为 R 与 L 的交；R 和 L 的所有和向量集合

$$R+L=\{\alpha+\beta\mid\alpha\in R,\ \beta\in L\}$$

仍是子空间，称为 R 与 L 的和。

若 $R+L$ 中每一向量的和表式是唯一的则称为直和记为 $R\dotplus L$。即若

$$\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$$

$\alpha,\alpha_1\in R$；$\beta,\beta_1\in L$，则 $\alpha=\alpha_1$；$\beta=\beta_1$

关于 $R+L$ 的维数有定理：

$(R+L)$的维数$=R$的维数$+L$的维数$-(R\cap L)$的维数

习　　题

61．判断n数组空间V_n的子集是否是它的子空间．

1）在V_n中满足齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

的向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$集合L；

2）在V_n中满足非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j=b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

的向量$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$集合L；

62．判断多项式空间$P[x]$的子集是否是它的子空间．

1）$L=\{ax^k+bx^l+cx^m|a,b,c\in P\}$

2）$L=\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}|a_i\in P, \quad n=0,1,2,\cdots\}$

3）$L=\{f(x)|f(x)\in P[x],\ deg f(x)>n\}$

4）$L=\{f(x)|f(x)\in P[x],\ f(a)=0\}$

63．判断n阶方阵线性空间M_n的子集是否是它的子空间

1）阵A的左零因子集合L_1，　　2）阵A的可换阵集合L_2

3）迹为0的阵的集合L_3，　　4）迹不为0的阵的集合L_4．

64．判断$[0\ 1]$区间上连续函数线性空间$c[0\ 1]$的子集是否是它的子空间．

1）$R_1=\{f(x)|f(x)\in c[0\ 1],\ f(0)=0\}$

2）$R_2=\{f(x)|f(x)\in c[0\ 1],\ f(x)=f(1-x)\}$

3）$R_3=\{f(x)|f(x)\in c[0\ 1],\ f(0)=f(1)\}$

4）$R_4=\{f(x)|f(x)\in c[0\ 1],\ f(x)>0,\ x\in[0\ 1]\}$

65．R是实数集，关于数的加法和乘法，R构成有理数域R上的线性空间，有理数集P是否是R的子空间？

66．R是实数集，关于数的加法和乘法R构成有理域P上的线性空间，有理数集P是否是R的子空间？

67．R是实数集，关于数的加法和乘法，R成实数域R上的线性空间，R^+是R的实数子集，关于运算$a\oplus b=a\cdot b$，$k\cdot a=a^k$仍构成R上的线性空间，此时R^+是否是R的子空间？

68．$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$是$n$维线性空间$V_n(F)$的基底

1）若$a_i\in F\ \ i=1,2,\cdots,n$不全为0，证明以方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i=0$$

的解$c_1,c_2,\cdots,c_n$为坐标的向量

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\beta_j$$

集合 L_1 是$V_n(F)$的 $n-1$ 维子空间。

2） 证明以方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i=1,2,\cdots,m$$

的解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为坐标的向量

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \beta_j$$

集合 L_2 是 $V_n(F)$的子空间，并求其维数？

3） 论证 $V_n(F)$的任何子空间，都可用 2 ）的方法表出。

69．设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 为 $V_n(F)$的基底，对于F上线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

的解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，用向量

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_j$$

构制子空间R_1；对于F的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

的解 $d_1,d_2,\cdots,d_n$，用向量

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \gamma_j$$

构制子空间R_2，求$R_1\cap R_2$，并找出 $R_1\cap R_2$的维数与阵 $A=(a_{ij})$和阵 $B=(b_{ij})$的秩的关系。

70．在线性空间中，证明所有含向量 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$的子空间的交，是子空间，称为向量集$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$的线性包．进一步证明 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$是其线性包的生成系。

71．在 V_4 中，求出向量

$$\alpha=(1\quad 3\quad 2\quad 1),\quad \beta=(4\quad 9\quad 5\quad 4),\quad \gamma=(3\quad 7\quad 4\quad 3)$$

的线性包的维数。

72．在线性空间$V(F)$中，证明所有包含子空间L和R的子空间的交等于$L+R$．

73．设R L是 $V_n(F)$的真子空间，证明（$R\cap L$）的维数$\geqslant R$的维数$+L$ 的维数$-n$．

74．对于子空间 $R_1,R_2,\cdots R_n$如果

$$R_1+R_2+\cdots+R_n=R_1\dot{+}R_2\dot{+}\cdots\dot{+}R_n$$

证明 $\qquad R_1\cap R_i=0,\ i=2,\cdots,n$

反之是否成立．

75．对于子空间 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 如果

$$R_i\cap R_j=0,\ i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,m$$

证明 $\qquad R_1+R_2+\cdots+R_m=R_1\dot{+}R_2\dot{+}\cdots\dot{+}R_m$

76．对于 $V_n(F)$的于空间R，一定存在子空间L使

$$V_n(F)=R\dot{+}L$$

77．子空间R_1由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$生成，子空间$R_2$由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$生成．$R_3$由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$生成，证明$R_3$的维数不大于$R_1$的维数与$R_2$的维数之和．

78．在V_4中R_1的生成系是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$R_2$的生成系是$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，求$R_1\cap R_2$与$R_1+R_2$的基底与维数，其中：

1) $\alpha_1=(1,2,1,0)$，　$\alpha_2=(-1,1,1,1)$；
$\beta_1=(2,-1,0,1)$，　$\beta_2=(1,-1,3,7,)$．

2) $\alpha_1=(1,2,-1,-2)$，　$\alpha_2=(3,1,1,1)$，　$\alpha_3=(-1,0,1,-1)$；
$\beta_1=(2,5,-6,-5)$，　$\beta_2=(-1,2,7,-3)$．

79．R^n是实数域R上的n数组空间，下列子集是否是子空间?如果是，确定维数，找出一组基底；如果不是，求出它的线性包，并求出线性包的一组基底．

1) $L_1=\{(a_1,\cdots,a_r,a_{r+1},\cdots,a_n)\mid\sum\limits_{i=1}^{r}a_i=0\}$

2) $L_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i$不全大于0或$a_i$不全小于0，$1\leqslant i\leqslant n\}$

3) $L_3=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n\}$

80．在三维笛卡儿直角坐标系中，以坐标原点为始点的向量集合构成实域R上的三维线性空间．

1) 过原点平面Π上的全体向量是否是子空间？如果是维数是几？

2) 终点都在某一个平面P上的全体向量是否是子空间?

3) R_1是过原点平面Π_1上的向量全体所构成的线性空间，R_2是过原点平面Π_2上的向量全体所构成的线性空间问$R_1\cap R_2$和R_1+R_2的几何形象是什么?R_1+R_2能否是直和．

81．设R,L,U是$V(F)$的子空间，证明

1) $R\cap[(R\cap L)+U]=(R\cap L)+(R\cap U)$

2) $(R+L)\cap(R+U)=R+[(R+L)\cap U]$

82．设R_1,R_2,R_3是V的子空间，证明

1) $R_1+R_1+\cdots+R_1=R_1$　　2) $R_1\cap R_1\cap\cdots\cap R_1=R_1$

3) $R_1+V=V$　　4) $R_1\cap V=R_1$

5) $(R_1\cap R_1)+R_3\subseteq(R_1+R_3)\cap(R_2+R_3)$

6) $(R_1\cap R_3)+(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1+R_2)\supset R_3$

83．设$R_1,R_2,\cdots,R_t$是V的t个子空间，试证下面三个条件等价．

1) $R_1+R_2+\cdots+R_t=R_1\dot{+}R_2\dot{+}\cdots\dot{+}R_t$

2) $R_j\cap(R_1+\cdots+R_{j-1}+R_{j+1}+\cdots+R_t)=0$，$j=1,2,\cdots,t$

3) $R_1\cap R_2=0$，$(R_1+R_2)\cap R_3=0,\cdots,(R_2+\cdots+R_{t-1})\cap R_t=0$

84．设V_1,V_2是线性空间V的两个真子空间．证明：在V中存在向量α．使$\alpha\bar{\in}V_1$，$\alpha\bar{\in}V_2$同时成立．

85．设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是线性空间V的S个非平凡的子空间，证明：V中至少有一向量不属于$V_1,V_2,\cdots,V_s$中任何一个．

第六章习题答案与解法

1． 必要性：取 $x=\beta+(-\alpha)$ 则有

$$\begin{aligned}\alpha+x&=\alpha+[\beta+(-\alpha)]\\&=[\alpha+(-\alpha)+\beta\\&=0+\beta\\&=\beta\end{aligned}$$

充分性：对某一 $\alpha\in V$，存在 0_α 使

$$\alpha+0_\alpha=\alpha$$

β 为 V 的任一向量，则存在 γ 使

$$\alpha+\gamma=\beta$$

从而有

$$\begin{aligned}\beta+0_\alpha&=(\alpha+\gamma)+0_\alpha\\&=(\alpha+0_\alpha)+\gamma\\&=\alpha+\gamma\\&=\beta\end{aligned}$$

即 0_α 是 V 的零向量．对于 β 和 0_α 存在 β^- 满足

$$\beta+\beta^-=0_\alpha$$

向量 β^- 就是 β 的负向量．即 $\beta^-=-\beta$．

2． 1） 若 0_1 和 0_2 都是 V 的零向量，则

$$0_1=0_1+0_2=0_2+0_1=0_2$$

2） 若 β_1 和 β_2 都是 α 的负向量，则

$$\begin{aligned}\beta_1&=\beta_1+0=\beta_1+(\beta_2+\alpha)=\beta_2+(\beta_1+\alpha)\\&=\beta_1+0=\beta_2\end{aligned}$$

3） 对任意 $\alpha\in V$，有

$$\alpha+0\alpha=1\alpha+0\alpha=(1+0)\alpha=1\cdot\alpha=\alpha$$

所以 $\quad 0\alpha=0$．

对任意 $a\in F$，有

$$a\alpha+a0=a(\alpha+0)=a\alpha．$$

所以 $\quad a0=0$

4） 若 $a\neq0$ 则

$$\alpha=(a^{-1}a)\alpha=a^{-1}(a\alpha)=a^{-1}0=0$$

5） $\alpha+(-1)\alpha=[1+(-1)]\alpha=0\alpha=0$，

即 $\quad -\alpha=(-1)\alpha$

6) $$\alpha+\alpha+\cdots+\alpha=1\alpha+1\alpha+\cdots+1\alpha$$
$$=(1+1+\cdots+1)\alpha$$
$$=m\alpha$$

7) 因为

$$a\alpha+(-a)\alpha=[a+(-a)]\alpha=0\alpha=0$$

所以 $-(a\alpha)=(-a)\alpha$；又因为

$$a\alpha+a(-\alpha)=a[\alpha+(-\alpha)]=a0=0$$

所以 $-(a\alpha)=a(-\alpha)$

8) $$a(\alpha-\beta)=a[\alpha+(-\beta)]$$
$$=a\alpha+a(-\beta)$$
$$=a\alpha+(-a\beta)$$
$$=a\alpha-a\beta$$

3. 1) 是； 2) 是； 3) 不是，因加法不封闭.

4. 1) 是； 2) 不是， 3) 不是， 4) 是， 5) 不是.

5. 1) 是； 2) 是； 3) 不是； 4) 不是； 5) 是；
6) 是； 7) 是； 8) 是； 9) 是； 10) 不是.

6. 1) 是； 2) 是； 3) 是；

7. 1) 不是线性空间，P因为关于数乘不封闭.

2) 是有理数域上的线性空间，不是实数域上的线性空间，因为关于数乘在实域上不封闭.

3) R是有理数域和实数域上的线性空间.

4) Q是有理域和实域上的线性空间.

5) $\{0\}$是任何域上的线性空间.

6) N不是线性空间，如果是，则有$\alpha\neq 0$ $\alpha\in N$，从而

$$1\alpha,\ 2\alpha,\cdots,n\alpha,\ (n+1)\alpha,\cdots$$

都属于N，由于N是由n个数构成的，所以在自然数$k\neq l$使

$$k\alpha=l\alpha$$

因此得 $(k-l)\alpha=0$，其中$k-l\neq 0$，$\alpha\neq 0$与线性空间的基本性质2题4）矛盾

8. 1) 不是，因为对数乘不封闭. 2) 是.

9. 关于加法：

令 $\alpha=(a_1\ b_1)$ $\beta=(a_2\ b_2)$ 由

$$\alpha+\beta=(a_1+a_2\quad b_1+b_2+a_1\cdot a_2)$$
$$=(a_2+a_1\quad b_2+b_2+a_2\cdot a_1)$$
$$=\beta+\alpha$$

知满足交换律；再令 $\gamma=(a_3\ b_3)$ 由

$$(\alpha+\beta)+\gamma=(a_1+a_2\ \ b_1+b_2+a_1a_2)+(a_3\ \ b_3)$$
$$=((a_1+a_2)+a_3\ \ (b_1+b_2+a_1a_2)+b_3+(a_1+a_2)a_3)$$
$$=((a_1+(a_2+a_3)\ \ b_1+(b_2+b_3+a_2a_3+a_1(a_2+a_3))$$