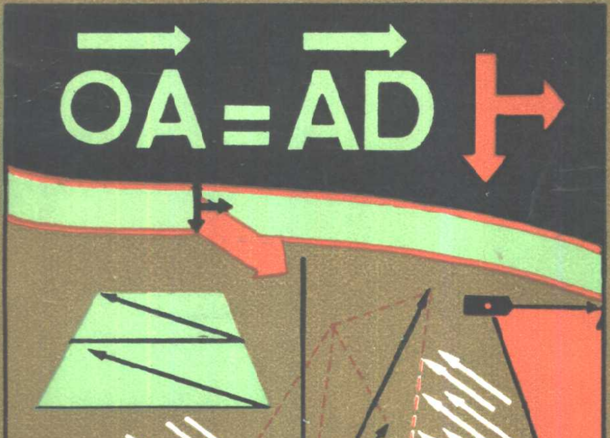
《自修数学》小丛书

向量基本概念

〔英〕M. S. 诺顿 著



科学出版社

《自修数学》小丛书

向量基本概念

〔英〕M. S. 诺顿 著

徐一帆 译

科学出版社

内 容 简 介

这本小册子是《自修数学》小丛书中的一本．它以通俗易懂的语言和生动有趣的事例，形象而又系统地介绍了有关向量（亦称矢量）的最基本的概念、性质和运算法则等，为便于自学，每节之后还附有练习及答案．

本书可供具有中等文化程度的青年、教师、干部等阅读．

M. Scott Norton

BASIC CONCEPTS OF VECTORS

John Murray, London, 1966

向量基本概念

〔英〕M. S. 诺顿 著

徐一帆 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981年3月第一版　开本：787×1092 1/32

1981年3月第一次印刷　印张：2 5/8

印数：0001—13,800　字数：49,000

统一书号：13031·1530

本社书号：2096·13—1

定价：0.25 元

写在阅读之前

阅读数学犹如看一篇侦探故事或探索一个洞穴一样令人激动不已. 数学中有许多奇境、难题、诀窍和有趣的概念. 如果你打算在数学方面亲自进行一番探索的话, 你将会为发现一些新的概念而感到其乐无穷.

数学中最有趣味的课题之一便是对向量的研究. 读这本有关向量的小册子,不能像读小说那样. 一开始,应该读得慢一些. 初读时,如果你对某个句子或某段意思没有弄懂,也不必焦虑. 你要有耐心, 要养成学习数学时手边随时预备着纸和笔的习惯. 如果你做点儿练习,画些图和解一些题,那么你就更容易弄懂你所读的东西.

我们希望该册子能使你分享到其他人在探讨向量的过程中曾经有过的欢乐.

目　　录

一、向量的故事

向量、空间与科学

我们生活在一个航天技术的激动人心的时代．在我们生

活的世界中，飞向外层空间的旅行、征服宇宙的尝试、以及自然科学的进展，这一切都为我们打开了通往未来世界的门路．空间探索提出了很多必须由科学家、数学家和其他技术人员共同研究才能解决的新难题．例如，发射一枚导弹，它的速度、所受到的力以及运动中的加速度，都是成败与否的重要因素．

人类在征服空间和大自然威力的斗争中，许许多多的问题，诸如运动、速度、力等等物理量都摆在人们的面前．我们周围的环境，一个时时刻刻都在影响着我们日常生活的物理量的世界，大多数人早已习以为常了．

你玩过拔河的游戏吗？你可曾在小河中划过逆流而行的小船？你是否驾驶过一台割草机？或者顺着大风步行过？可以说几乎每个人都做过这类事，当做这些事情的时候就会碰到向量．

比赛中，正在传球的橄榄球队员、在快速救球过程中掷球的板球外野队员（或跑垒的击球手）；正在航行的飞机（或导弹）；或龙卷风中的暴风等等，这些实例中都会涉及到向量．

风速怎么会影响飞机的航行呢？对行进中的敌舰发射鱼雷应如何确定鱼雷的方向呢？对此你或许会感到诧异吧？而这些正是本书将要探讨的向量问题中的典型实例．你将会发现，学习向量是相当新颖和非常有趣的．

标量——无方向的量

我们常用这样的词句，例如：“一个盒子的体积为 12 立

方英寸"，"房间的长为 20 英尺"，或"一个篮球运动员的身高为 6 英尺 8 英寸"等等来描述许多量．这些量必须带上一定的单位才能表示．当一些量可以用某种与空间的方向无关的单位来表示时，这些量称为标量，并且把表示这些量的大小的数字称为数量．因此，体积是一个标量，例如"12 立方英寸"就是标量，而 12 便是数量．标量仅仅有大小，并常用诸如英寸、磅、英里/小时等这样的单位来表示，也可以用某个名称来表示，例如 15 人、21 个桔子、或 100% 等．标量是不具有方向概念的一种量．

标量的例子还有：

16 盎司；

16 平方英尺；

31 岁；

42 本书；

24 小时；

43000 人．

你还能举出其它一些标量的例子吗？

空间中的大小和方向——向量

有一些量仅仅用某种单位还不能充分描述或表达它，你能否举出这样的量的一些例子呢？让我们考察一下飞机的飞行情况．飞机在飞行中会受到风、升力、阻力、重力、牵引力以及其它一些力的作用．为充分描述飞机的航线，飞机的速度

和方向二者都是重要的．为了充分描述一个力（例如推力或拉力），从一个位置到另一个位置的位移或运动，或者一条小河的水流等，其大小和方向二者也都是必不可少的．我们把既有大小又有方向的量，称之为向量（或矢量），并规定这样的两个量可以用向量加法来合成（见 15 页）．

向量的例子还有：

一条河流以每小时 3 英里的速度向东北方向流动；

向下作用的一个 100 磅的拉力；

方向为正北的 320 英里/小时的速度；

从点 A 到点 B 移动 6 英里的一个运动；

向前施加一个 25 磅的力；

从球座上以 170 英里/小时的速度打出一个高尔夫球．

你的方向观念强吗？你能举出其它一些向量的例子吗？

你将会发现，学习向量是很有用的．除去有很多有趣的实际应用外，向量在数学的各个分支，例如在几何学和三角学中就有很重要的地位；向量可以用来解释和说明电学的基本原理；向量也常出现在有关导航和轰炸的问题之中；它们在气象学和天文学中也经常用到；向量还有助于解决有关引力和运动的问题；在宇宙航行原理方面，向量是很重要的一种工具；并且向量还有助于我们去解释物理世界中的其它现象．

在本书中，我们将研究有关向量的一些基本概念．下面的一些问题也会在以后的学习中得到解答：

1．向量的知识是怎样帮助我们解决物理世界中的一些问题的？

2. 在解向量问题时,都采用了哪些方法?
3. 数学中现有的一些基本原理或定律也适用于向量吗?
4. 向量是怎样用来解决数学不同分支中的一些问题的?

用有向线段表示向量

我们常常用比例图来解向量问题. 你是否绘过一些物体(如一所房子、一架飞机、或一张傢具)的比例图? 你一定记得,在你绘图时,曾选取某个长度单位去表示物体的实际长度单位. 在应用向量时, 我们常用到这个概念. 比例图是量的一种图解表示,该量是用选定的比例作标度的. 例如,若取比例为 1/100 (或 1:100), 则你的图上的一个单位的长度,将代表实际物体的同一单位长的 100 倍.

我们可以简便地用一条有向线段表示一个向量. 该线段的长与向量的大小成正比,而该线段的方向就是向量的方向. 若用 1:100 的比例,画一个 2 英寸长的有向线段,它将表示一个大小为 200 英寸的向量. 1/4 英寸: 25 单位的比例意味着,图上的 1/4 英寸长,表示真实量的长为 25 单位. 试问: 一个大小为25单位,方向为 150° 的向量,如何用图来表示呢? (记住: 角度是从水平线量起的.)图 1 是该向量的图示.

用线段 OM 表示的这个向量其方向与水平轴成 150° 夹角. 点 O 称为向量的起点(或始点), 点 M 称为向量的终点(或端点). 我们在向量的终点上画一个"箭头". 用带有箭头的线段来表示向量的这个主意, 应归功于著名的数学家和科

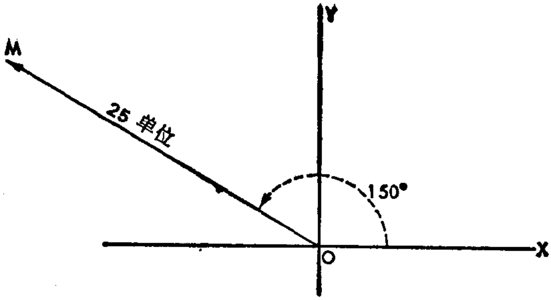
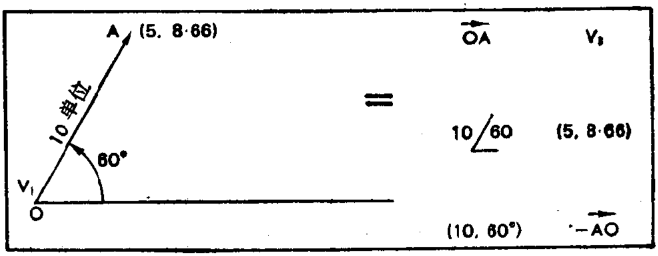


图 1

学家牛顿.

图 1 中的向量有 $2\frac{1}{2}$ 英寸长，它代表实际大小为 25 单位的一个向量，你能说出这里所用的是什么比例吗？



向 量 的 符 号

数学家和科学家发明了许多表示向量的符号．让我们来考虑一个运动（或位移）：假定约翰从邮局出发，以每小时 3 英里的速度，穿过马路，直接向玩具店走去．表示约翰的运动的一个常用符号是 **AB**．读做“向量 *AB*”，它意味着，*A* 是向量

的起点，而 B 是向量的终点. 试问：向量**BA** 与 **AB** 是一回事吗？如果我们考察一下约翰的运动的话，就会看到它们完全是两码事. 向量 **BA** 表示从 B 点（玩具商店）到 A 点（邮局）的运动，而 **AB** 则表示从邮局到玩具商店的运动. 由于两个向量 **AB** 与 **BA** 的方向是不同的，所以它们不可能是相同（或相等）的向量. 如果两个向量确实有相同的方向，而且大小也相等，我们才能说，它们是相等的向量.

为了表示向量，我们可以任选一个水平轴. 于是，图 2 中所表示的所有有向线段都是相等的向量.

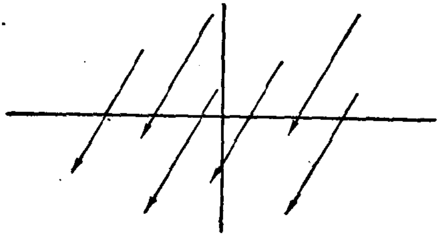


图 2

用来表示向量的其它符号还有：

$10\angle 25°$——表示 10 单位的量其方向为 25° 角；V_1 或 V_2——表示向量 1 或向量 2；(70, 20°)——表示 70 单位的量其方向为 20° 角；X 和 Y ——表示向量 X 或向量 Y；r——表示向量 r；(5, 2)——表示从原点出发的向量，其终点的直角坐标为 5 和 2.

在本书中，我们将用符号 **AB** 或 **MD** 分别表示从点 A 到点 B，以及从点 M 到点 D 的向量[1]. 有趣的是，"向量"一词是

1) 在书写中人们也用 $\overrightarrow{AB}$（或简写为 AB）的形式.

从拉丁文"搬运夫"(carrier) 演变过来的. 顾名思义，向量在这里担当了一个从一点搬到另一点的搬运夫的角色. 我们把从点 A 到点 B 的运动看成是一个向量.

符号 10 单位$\angle 25°$，常用来表示大小为 10 单位，其方向为 25° 角的一个向量.

有时，我们也用类似指南针（罗盘）的方向来表示向量的方向(图 3).

图 4 中，向量 AB (**AB**) 的方向，通常可表示为东-北，或东北；向量 AM (**AM**) 的方向为东-南，或东南.

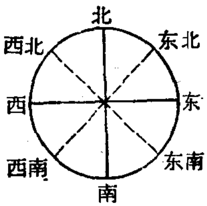


图 3

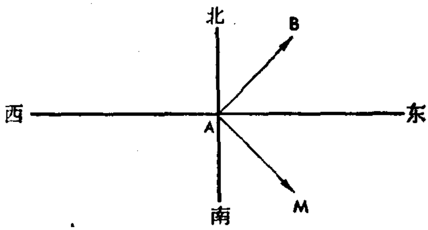


图 4

练习 1 向量的图示

1. 标明下列各量是标量还是向量?
   (1) 朝东南方向移动 100 英里的运动；
   (2) 一个装有 24 个苹果的盒子；
   (3) 方向为正南的一个 50 磅的拉力；
   (4) 住在坎特伯雷[1] 的人数；
   (5) 一天的小时数；

1) 坎特伯雷 (Canterbury)，英国一地名.——译注

(6) 一个队员把板球传给另一个队员;

(7) 向下作用的一个 25 磅的力;

(8) 河的水流;

(9) 在东南 20° 方向上的一个 300 英里/小时的速度;

(10) 两年后你的岁数;

(11) 百分之五的盈利.

2. 百科全书中有一张物体图，经测量其高度为 $1\frac{3}{4}$ 英寸，在这张图的下面注有：该图是实际大小的 1/80，问这个物体的实际高度是多少?

3. 取$1\frac{1}{4}$ 英寸表示 250 英里的比例，画一条线表示 1675 英里，问这条线该画多长?

4. 画一条线，使线上的 1 英寸表示 1/4 英寸长，问若表示 3/4 英寸长，你画的线应该多长?

5. 在一张地图上测得的一段距离为 $8\frac{5}{8}$ 英寸，该地图的比例是 1 英寸: 150 英里，问 $8\frac{5}{8}$ 英寸表示的实际距离是多少?

6. 用 5 英寸长表示 45 英尺，问 1 英寸表示多少英尺?

7. 为了表示 35 单位的大小，在下列比例中，选哪一个最方便并且最合理?

(1) 1/4 英寸: 1 单位;

(2) 1 英寸: 10 单位;

(3) 1/8 英寸: 10 单位.

8. 用给定的数据，按比例画出下列向量:

(1) 向量 **AB** 的大小为 500 单位，与水平线成 30°，所用的比例为 1/2 英寸: 100 单位;

(2) 250 磅的力，作用在 90° 的方向上，比例为 1/4 英寸: 50 磅;

（3）方向为正西的一个 325 英里/小时的速度，比例为 1 英寸：300 英里/小时；

（4）一个方向向右、大小为 50 单位的磁场强度。

9. 分别挑选适当的比例，按比例画出下列各向量：

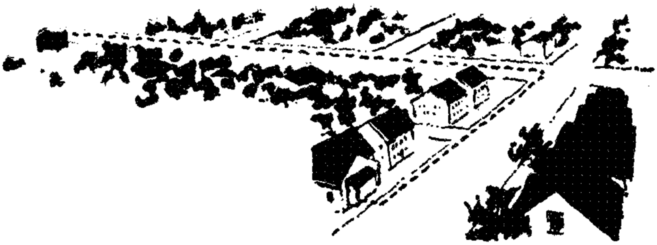
（1）在 120° 方向上的一个大小为 20 磅的拉力；

（2）方向为东南的一个 10 英里/小时的速度；

（3）一个方向朝下、大小为 400 单位的磁场强度；

（4）方向为正北、大小为 30 单位的向量 **AB**；

（5）在 130° 方向上的大小为 18 单位的向量 **OM**。



二、直角坐标系

在二维空间中确定点和线

“你能告诉我去邮局怎么走吗?”布赖恩问．约翰回答说：“行！你往东走两个路口，再向北走三个路口就到了．它就在甲街和乙街[1]的拐角上．”

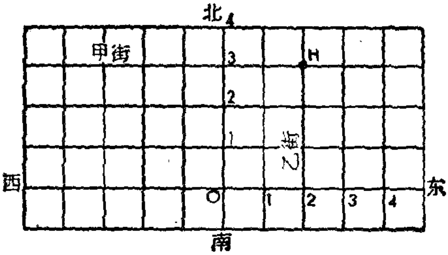


图 5

约翰用数学中的一个基本概念帮助布赖恩找到了邮局.

1) 原指威尔顿（Wilton）街及普里沃赖（Priory）街，为叙述简便，我们改为甲街、乙街.——译注

我们可以用画图的办法来说明约翰的意思，如图5.

假如我们用点 O 表示布赖恩现在的位置，点 H 表示他的目的地，即邮局的位置．从原来的位置(点 O)出发，到甲街与乙街相交的交点 H，即是邮局的位置．还可以用其它什么符号来确定点 H 的位置呢？我们可简单地用符号 (2, 3) 来表示点 H 相对于点 O 的位置．换句话说，点 H 位于点 O 以东两个路口和以北三个路口的地方.

在数学中，用一组数字来确定空间一点的位置是一个有用而又重要的概念．此概念也有助于我们表示和确定向量的位置.

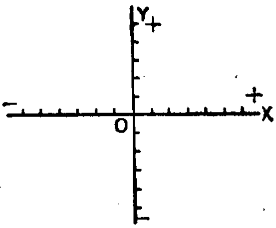


图 6

在图 6 中，构成直角的两条直线 X 和 Y 相交于点 O，此交点称为原点．我们称线 OX 为 X 轴，由于它是水平方向的，所以也叫做水平轴；线 OY 称为 Y 轴，由于它是一条垂直线，也可称其为铅垂轴．我们约定，从原点 O 向左或向下的移动为负(−)，向右或向上的移动为正(+)．取适当的长度单位，然后每隔一个单位长，向上、向下、向右和向左接连地在轴上做出标记，如图 6 所示.

我们可以用一个数 X 和一个数 Y 来确定平面中任意点的位置，把 X 和 Y 看成是点的坐标 (X, Y)．在图 7 中，平面上点 H 的直角坐标为 (2, 3).

同样的，点 M 可以由直角坐标(−2，+3) 来确定，I 点则