新编高中总复习导引

数学

知识概要与能力训练

田化澜 主编

武汉出版社

新编高中总复习导引

数学知识概要与能力训练

主　　编　田化澜

编写人员　汪跃中　倪政勇　徐龙翔

何　锋　柯有华　徐子佑

郭章华

武　汉　出　版　社

编者的话

高中毕业总复习阶段的教与学，除了帮助学生系统复习，牢固掌握中学所学基础知识、基本技能外，还应特别注意渗透政治思想教育，把它看作高中阶段全面素质教育的继续和升华。为给广大师生提供一本指导性、实用性强的教学参考材料，特组织编辑《新编高中总复习导引》这套丛书。

《新编高中总复习导引》丛书的各科知识与能力训练，特邀了一批具有丰富教学经验和教学研究能力强的湖北省特级教师、高级教师编写，这套丛书积累了湖北武汉地区多年高三复习的宝贵经验，以切实帮助学生提高独立获取知识和应用知识的能力。它以现行中学教学大纲、各科考试说明为依据，参考了一九九一年全国高考（含湖南、云南、海南分组考试）试题，以知识概要、例题解析、能力训练、综合检测为基本结构框架，旨在讲释精要，把握知识体系；例析典型，具有时代感和针对性；训练扎实，做到切实有效；检测详备，便于自我操作评价。

本书旨在通过高中数学知识的系统复习，着意加强数学基本思想方法与思维能力的训练，提高分析问题与解决问题的能力．

针对目前各校毕业复习分段进行的实际，本书既保持第一版中的主要特点，又在例习题的选择与安排、章节结构方面作了较大修改与调整，为使高三第一、二阶段复习中均便于使用，在原版的每章中都适当增加若干章节，并把原来集中安排在每章后面的“知识与能力训练题”重新选编并安排在每节之后，以减小跨度，控制难度，更便于训练自测，又参考 1991、1992 年高考试题说明，特将第十二章改写为“解析几何综合题”，并适当增加了三个综合性专题；在第十六章将原版中“知识与能力综合测试题”编成三种不同类型的模拟性综合测试题，以利各校在复习后期灵活安排，查漏补缺，分段强化，重点落实。

本书主要内容包括高中数学十二个主要系列及应用广泛的三个特别专题．每章后均配有单元测试题，最后并配有十三套不同形式的模拟型综合测试题。全书选用了近三百道例题与一千余道训练题，每道例题均有精辟的分析、简明的解答与重点讲评，含量丰富，复盖面广，选题典型新颖，形式灵活多样，难易比例适用，梯度安排合理，注有明确的知识点与考测点，具有很强的针对性与实用性．专题前的概述与例题的讲评，重在启发，引导思考，揭示规律，切中要点，既对教师复习课的整体设计与解题教学的改革具有指导意义，又便于学生自学自测，抓住关键，系统归纳，巩固落实，融汇贯通，是一本融知识与能力，技能与思维训练于一体的数学复习用书。

本书由武汉市中学数学教研会理事长田化澜主编，参加编写的有副理事长汪跃中及在武汉市的省重点中学特级教师与高级教师倪政勇、徐龙翔、何锋、柯有华等，还特邀了湖北省黄冈高中徐子佑与荆州地区教研室郭章华等参加编写。

时间仓促，水平所限，难免错误，恳请指正。

《新编高中总复习导引》丛书编委会

目　录

一 函 数

函数是中学数学的主要内容之一,它在数学中具有十分重要的地位,在中学阶段,我们是在函数的一般概念的基础上,具体研究了一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数的概念,一般性质和图象。

通过本专题的复习,应能从元素的确定性、互异性和无序性正确理解集合的概念,正确使用集合中表示关系的符号;在集合和映射的基础上,准确掌握函数及其有关概念、反函数的概念;正确理解函数的单调性、奇偶性和周期性的概念;正确理解各种初等函数的概念、性质及其图象。

通过本专题的复习,要能够正确地运用各种方法表示一些较简单的集合,熟练地进行集合的交、并、补运算;能根据问题的条件,写出函数解析式,会求函数的定义域、值域,会解答一些简单的由 $f(x)$ 求 $f[g(x)]$ 及由 $f[g(x)]$ 求 $f(x)$ 的问题,会求一个函数的反函数;会判断函数的单调性,奇偶性和周期性,能根据函数的单调性进行实数大小的比较,会利用描点法和基本的变换及分析方法正确作出函数的图象;能利用函数的性质和图象解答较复杂的问题及有关的综合性问题。

通过本专题的复习,还应进一步熟悉各种常用数学方法,如待定系数法、配方法、分析法、变量代换法、反函数法、方程法、判别式法、图象法等.

1.1 集合与集合运算

[知识点与考测点] 集合、子集、交集、并集、补集概念,空集与全集的意义,集合中的属于与集合间的包含、相等关系,集合表示法与表示各种关系的有关术语和符号,集合运算及其初步应用。

例 1 设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,子集 A、B 满足条件:$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$,$A\cap B=\{2\}$,$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$,求 $A\cup B$,A,B.

[分析] 所给集合是有限集,用维恩图解答较为简单。

[解法一] 依题意作维恩图如图所示. 从图上易知 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$,$B=\{2,4,6,8\}$,$A=\{2,3,5,7\}$.

[解法二] 由 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$ 得到 $\overline{A\cup B}=\{1,9\}$. 所以 $A\cup B=\overline{(\overline{A\cup B})}=\{2,3,4,5,6,7,8\}$. 因 $A\cup B=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$,又 $\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$,$A\cap B=\{2\}$,所以 $A\cap\overline{B}=\{3,5,7\}$. 故 $A=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=(2,3,5,7)$,$B=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)=\{2,4,6,8\}$.

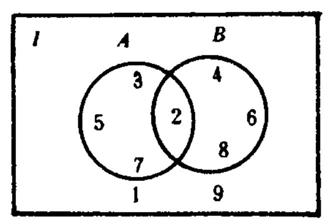

图 1.1

[讲评] 解法一是一种直观解法,不需要进行严密的推理. 这种利用维恩图及在数轴上进行集合的运算,往往比较直接简捷. 解法二比较抽象困难些,但却是这类问题的推理解答,它有助于深入了解集合运算中的集合之间的关系,对培养抽象思维能力是有益的。

[例 2] 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$. 求当 a 为什么实数时,$A\cap B\supset\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

[分析] 集合 A、B、C 是三个方程的解集,条件 $A\cap B\supset\varnothing$ 表示两方程有公共解,而条件

$A\cap C=\varnothing$，则表示两方程无公共解．

［解］　容易求得 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$．由 $A\cap B\supset\varnothing$ 知 A 与 B 的交集不是空集，故 2，3 两数中至少有一个适合方程 $x^2-ax+a^2-19=0$，又 $A\cap C=\varnothing$，故 $2\notin A$ 且 $-4\notin A$，从而知 $3\in A$，即有 $3^2-3a+a^2-19=0$，解之 $a=5$ 或 $a=-2$．当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，于是 $A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，所以 $a=5$ 不可能．当 $a=-2$ 时，$A=\{3,-5\}$，于是 $A\cap B=\{3\}\supset\varnothing$ 而 $A\cap C=\varnothing$，故所求 $a=-2$.

［讲评］　解答这类问题时，对所求 a 的值必须逐一进行检验，看是否符合题目条件，题目条件之一不能满足的 a 值均应舍去．为什么要检验？当 $a=5$ 或 $a=-2$ 时，方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根必有一个是 3，但另一个根不知是什么，因此不知是否符合题意，换句话说，由 $3^2-3a+a^2-19=0$ 求得 $a=5$ 或 $a=-2$ 只是解决了必要性的问题，并没有解决充分性的问题．

例 3　已知集合 $A=\{x\mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$．当 $A\cap B=\varnothing$ 成立时，求实数 m 的范围．

［分析］　集合 A 是不等式的解集，而集合 B 中含有参变量 m，因而有可能是空集的情况．

［解］　由 $10+3^x-x^2\geqslant 0$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 5$，所以集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$．若 $B=\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing$ 成立，这时 $m+1>2m-1$，由此得 $m<2$．若 $B\neq\varnothing$，则 $m\geqslant 2$．要 $A\cap B=\varnothing$，必须 $m+1>5$．由此得 $m>4$．故所求的 m 的取值范围是 $m<2$ 或 $m>4$.

［讲评］　这里的集合 A 是非空集合，因此 $A\cap B=\varnothing$，对 B 而言，就有 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况．解答此题时，极易忽略 $B=\varnothing$ 的情况，而是错误地由两个不等式 $m+1>5$，$2m-1<2$ 得出 m 的取值范围，这一点应引起我们的特别注意．另外，这一类问题宜结合数轴进行直观分析．

知识与能力训练题(1.1)

一、选择题

(1)　已知集合 $M=\{x\mid x^2+x-2<0\}$，则下列关系中正确的是(　　)

(A) $\sqrt{5}\in M$　(B) $\log_3 2\notin M$　(C) $(0,1]\subset M$　(D) $\left(-\frac{\pi}{2},\log_{\frac{1}{3}}2\right)\subset M$

(2)　已知集合 $A\subset\{0,1,2,3\}$，且 A 中至少有一个奇数，则这样的集合 A 共有(　　)

(A)11 个　(B)12 个　(C)15 个　(D)16 个

(3)　设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$，$A=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$，则 $\overline{A}\cap B$ 是(　　)

(A) $\overline{A}$　(B) B　(C) $\{(2,3)\}$　(D) $\varnothing$

(4)　设全集 $I=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid |x|<1,|y|\leqslant 2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 5\}$，则下列集合中为空集的是(　　)

(A) $M\cap\overline{N}$　(B) $M\cap N$　(C) $\overline{M}\cap N$　(D) $\overline{M}\cap\overline{N}$

二、填空题

(1)　设全集 $I=R$，函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg(\sqrt{2}-x)}$ 的定义域为 A，则 $\overline{A}=$______.

(2)　设全集 $I=\{2,4,a^2-a+1\}$，$A=\{a+1,2\}$，$\overline{A}=\{7\}$，则 $a=$______.

(3)　设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $\frac{T}{S}$ 的值为______.

三、　已知 $I=R$，$A=\{x\mid |x-a|<4\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}2x-1<2x+3\\5x-2<3x+6\end{cases}\right\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的范围．

四、 已知 $M=\{(x,y)|x^2-2x+y^2\leqslant 0\}$，$N=\{(x,y)|x+a-y\leqslant 0\}$，且 $M\cap N=M$，求实数 a 的取值范围．

五、 已知 $a,b\in R$，集合 $A=\{(x,y)|x=n$ 且 $y=na+b,n\in z\}$，$B=\{(x,y)|x=m$ 且 $y=3m^2+15,m\in z\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$，问是否存在 a 和 b 能使 $A\cap B=\varnothing$ 及数对 $(a,b)\in C$ 同时成立．

1.2 函数概念与反函数概念

[知识点与考测点] 映射、函数和反函数的概念，求函数的定义域、值域、反函数的方法，互为反函数的函数图象间的关系，函数记号及初步应用．

例 1 (1)已知 $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+1$，求 $f(\sqrt{2}-1)$；

(2)已知 $g(2x-1)=x^2$，求 $g(x^2)$ 的表达式．

[分析] 这是一类简单的由 $f(x)$ 求 $f[g(x)]$ 和由 $f[g(x)]$ 求 $f(x)$ 的问题．在解答这一类问题时要特别注意处在自变量地位的是什么．例如在 $f[g(x)]$ 中处在自变量地位的是 $g(x)$，而不是 x．若令 $F(x)=f[g(x)]$，则在 $F(x)$ 中处在自变量地位的又是 x 了．

[解] (1)由 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3$ 得 $f(x)=x^2+3$，故 $f(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)^2+3=6-2\sqrt{2}$．

(2) 令 $t=2x-1$，得 $x=\frac{t+1}{2}$．于是 $g(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2$，即 $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$，故 $g(x^2)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$．

[讲评] 本例给出了解答这类问题的两种思路：一种是"构造"的思想，即把 $x^2+\frac{1}{x^2}+1$ 构造为只含有 $x-\frac{1}{x}$ 和常数的式子；另一种是换元法，引入参数 t 进行式子的变形．前一种方法比较简便，而后一种解法却具有一般性，因此适用范围更广．

例 2 求函数 $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ 的值域．

[分析] 函数表达式的分母(分母和分子都是也可)是自变量的二次式，在分母不为零的条件下，可将其转化为 x 的二次方程，而 y 看作是系数中的参变量．利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 可求得 y 的取值范围，即函数的值域．这种方法称为判别式法．

[解] 由函数的定义域知 $x\neq -3,1$．因此两边同乘以 x^2+2x-3，整理后得到 $yx^2+2yx-(3y+1)=0$，把它看作 x 的二次方程．因 x 应为实数，所以其判别式 $\Delta=4y^2+4y(3y+1)\geqslant 0$，即 $16y^2+4y\geqslant 0$，解这个不等式得 $y\geqslant 0$ 或 $y\leqslant -\frac{1}{4}$．当 $y=0$ 时，x 的二次项系数和一次系数都为 0，而常数项不等于 0，故 $y=0$ 不适合该方程．原函数的值域为 $\{y|y>0$ 或 $y\leqslant -\frac{1}{4}\}$．

[讲评] 判别式法是求值域的一种方法，但是使用这种方法时，由于在求解过程中采用了某些变形，函数取值的范围可能发生变化，因此需要通过讨论来确定函数的值域．若函数 $y=f(x)$ 是由方程 $a(y)x^2+b(y)x+c=0$ (1) 确定的(或者把函数 $y=\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ 或 $y=mx+n\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ 转化为这种形式)，此时第一要考查 $a(y)=0$ 与 $a(y)\neq 0$ 两种情况．若 $a(y)\neq 0$，设 $\{y|\Delta=[b(y)]^2-4[a(y)\cdot c(y)]\geqslant 0\}=M$．第二要讨论在集合 M 中 y 值是否使方程(1)的 x 值超出原函数定义域(如分式函数中 $g(x)=0$，无理函数中 $ax^2+bx+c<0$ 等)．而所求值域应在 M 中剔除不合要求的 y 值．为了达到这一目的，有时可直接验算分析，有时则需转化

为研究二次函数在部分区间上的最大(小)值问题了.

例 3 求函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}(x\geqslant 0)$ 的反函数.

[**分析**] 求反函数时,我们总是把原函数的解析式看作以 x 为未知数的方程,先从方程中解出 x,从而求得反函数的解析式,这种不是方程看作方程的思想,在解答数学问题中,有着广泛的应用,复习时要予以足够的重视.

[**解**] 由 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 可得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$,由于 $x\geqslant 0$,$e^x\geqslant 1$,因此 $e^x=y+\sqrt{y^2-1}$,所以 $x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})(y\geqslant 1)$,故反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})(x\geqslant 1)$.

[**讲评**] 在求解过程中舍去 $y-\sqrt{y^2-1}$,原因是 $y\geqslant 1$,当 $y\geqslant 1$ 时,由于 $(y-1)^2-(\sqrt{y^2-1})^2=2(1-y)\leqslant 0$,所以 $y-\sqrt{y^2-1}\leqslant 1$ 与 $e^x\geqslant 1$ 不合.在求反函数的时候,如果出现这种情况,必须进行讨论,才能求得正确的结果.

知识与能力训练题(1.2)

一、选择题

(1) 与函数 $y=x$ 有相同图象的一个函数是( )

(A)$y=\sqrt{x^2}$ (B)$y=\frac{x^2}{x}$ (C)$y=a^{\log_a x}$ 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$ (D)$y=\log_a a^x$,其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$

(2) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f^{-1}(-x)$ 的图象关于( )对称.

(A)y 轴 (B)原点 (C)直线 $y=-x$ (D)直线 $y=x$

(3) 若点 $(1,2)$ 在函数 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图象上,又在它的反函数的图象上,则数对 (a,b) 应是( )

(A)$(-3,7)$ (B)$(-3,-7)$ (C)$(3,-7)$ (D)不存在

(4) 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则函数 $f(x+a)+f(x-a)$(其中 $-\frac{1}{2}<a<0$ 为常数)的定义域是( )

(A)$[0,1]$ (B)$[a,1-a]$ (C)$[-a,1+a]$ (D)$[1+a,1-a]$

二、填空题

(1) 函数 $y=\sqrt{3x^2-x^4}(x>0)$ 的值域是________.

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1(x\geqslant 0)\\x+1(x<0)\end{cases}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=$______.

(3) 若 $f(x)=2x^2-1$,则 $f(x-1)=$______;若 $f(3x)=2x^2-1$,则 $f(x)=$______;若 $f(x)=2x^2-1$,则 $f[f(x)]=$__________.

三、函数 $f(x)$ 的定义域为一切正实数,并且满足 $f(x)=f(\frac{1}{x})\lg x+1$,求 $f(x)$ 的表达式.

四、设函数 $y=f(x)$(其中 $x>0$)具有性质:① $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;② $x_1>x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$;③ $f(2)=1$.

(1) 求 $f(1)$、$f(4)$ 的值;

(2) 若 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$,求 x 的范围.

五、若规定记号 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots\cdots f(x)]}_{n个}$,其中 $n\in N$,设 $f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,请你猜想出 $f_n(x)$ 的表达式并加以证明.

1.3 函数的单调性与奇偶性

[**知识点与考测点**] 函数单调性与奇偶性的概念,判断函数单调性和奇偶性的方法,奇函数和偶函数的图象的对称性,函数单调性和奇偶性的综合性问题及应用.

例 1 证明:当 $x\in R$ 时,$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$是奇函数.

[分析] 在研究函数的奇偶性时,有时根据定义直接判定 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$时比较困难,这时则可利用 $f(x)\pm f(-x)=0$ 的成立来判断 $f(x)$的奇偶性.

[证明] 因为 $f(x)+f(-x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}+\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{\sqrt{1+x}-x+1}=\dfrac{(1+x^2)-(x-1)^2+(1+x^2)-(x+1)^2}{(\sqrt{1+x^2}+x+1)(\sqrt{1+x^2}-x+1)}=0$

所以 $f(-x)=-f(x)$,故 $f(x)$是奇函数.

[讲评] 在判定函数奇偶性的时候,应首先检查定义域是否关于原点对称,若定义域不是关于原点对称的,该函数既不是奇函数,也不是偶函数.还要注意,不能变形后判定,因为变形前后的函数可能不是同一函数,读者不妨以 $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$为例进行研究.

例 2 已知 $y=f(x)$在它的定义域内是增函数,(1)证明 $y=f^{-1}(x)$在其定义域内也是增函数;(2)若 $f(x)=f^{-1}(x)$,证明:$f(x)\equiv x$.

[证明] (1)首先我们证明:若 $y=f(x)$在它的定义域内是增函数,那么对于定义域内的任意二值 x_1,x_2,若 $f(x_1)<f(x_2)$,则有 $x_1<x_2$. 事实上,若 $x_1\geqslant x_2$,由于 $y=f(x)$是增函数,就有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,这与假设 $f(x_1)<f(x_2)$矛盾,现在我们在 $y=f^{-1}(x)$的定义域内任取 $x_1<x_2$,令 $f^{-1}(x_1)=y_1$,$f^{-1}(x_2)=y_2$,则 $x_1=f(y_1)$,$x_2=f(y_2)$,由于 $x_1<x_2$,所以 $f(y_1)<f(y_2)$,又因 $f(x)$在其定义域内是增函数,所以 $y_1<y_2$,即 $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$,故 $y=f^{-1}(x)$在其定义域内是增函数.

(2)在 $y=f(x)$的定义域内任取 $x=a$,设 $f(a)=b$,则 $a=f^{-1}(b)$. 由于 $f(x)=f^{-1}(x)$,所以 $a=f^{-1}(b)=f(b)$. 若 $a<b$,由于 $f(x)$是增函数,所以 $f(a)<f(b)$,即 $b<a$,这与 $a<b$ 的假设矛盾.反之,若 $a>b$,同理得到 $f(a)>f(b)$,即 $b>a$,这又与 $a>b$ 的假设矛盾.因此 $a=b$,即 $f(a)=a$. 由 a 的任意性,得 $f(x)\equiv x$.

[讲评] 这里有两点值得我们注意:(1)若 $f(x)$是其定义域内的增(减)函数,则有 $x_1<x_2\Leftrightarrow y_1<y_2(y_1>y_2)$;(2)$y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在其各自定义域内的单调性是一致的.这两点也是从不同的两个侧面反映单调函数的本质属性的,实质上是一致的,它可以帮助我们更深刻的理解单调函数的概念与性质.

例 3 求证函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$在区间$[-1,1]$上是增函数.

[分析] 任取 x_1,x_2,使得$-1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$,那么

$y_2-y_1=\dfrac{x_2}{1+x_2^2}-\dfrac{x_1}{1+x_1^2}=\dfrac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$. 很明显,只要能证明 $1-x_1x_2>0$,问题便获得解决,由于 x_1、x_2 在区间上的任意性,一般应分类进行讨论,因 $x_1<x_2$,我们可分以下三类情况来证明 $1-x_1x_2>0$. (1)$-1\leqslant x_1<0,-1<x_2\leqslant 0$;(2)$-1\leqslant x_1<0,0<x_2<1$;(3)$0\leqslant x_1<1$,$0<x_2\leqslant 1$.

[讲评] 判断或证明函数的单调性,一般方法"取值、作差、变形、判定符号". 关键是变形,使之易于判定符号.本例中判定符号是个难点,除了分析中介绍的基本方法外,还可用下面的两个办法(避开了分类讨论):

(1)$-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1\Rightarrow 1+x_1\geqslant 0,1-x_2\geqslant 0\Rightarrow(1+x_1)(1-x_2)\geqslant 0\Rightarrow 1-x_1x_2\geqslant x_2-x_1>0$;

(2)$-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1\Rightarrow|x_1x_2|\leqslant 1$ 且 $x_1x_2\neq 1\Rightarrow -1\leqslant x_1x_2<1\Rightarrow 0<1-x_1x_2\leqslant 2$.

例4 已知函数 $f(x)$满足下列条件：定义域是一个闭区间，$f(x)$在定义域内是单调函数，$f(-1)=0$ 且 $f(-1+x)=-f(-1-x)$，$f(x)$的最大值为 $f(a)=M>0$，求 $f(x)$的定义域和值域．

［**分析**］ 由 $f(-1)=0$ 及 $f(-1+x)=-f(-1-x)$ 可知 $f(x)$的图象关于点$(-1,0)$成中心对称，因此函数的定义域是一个关于点$(-1,0)$对称的闭区间．若 $f(x)$单调递增，则 $a>-1$，故定义域为$[-2-a,a]$，而值域为$[-M,M]$；若 $f(x)$单调递减，则 $a<-1$，故定义域为$[a,-2-a]$，值域为$[-M,M]$.

［**讲评**］ 深刻理解函数有关概念，熟练掌握函数记号意义，配合函数图象分析，是解本题的关键．

知识与能力训练题(1.3)

一、选择题

(1) 若函数 $f(x)(x\in R)$有 $f(x)\neq 0$ 且 $f(x)=(f|x|)$，则 $f(x)$是(　　)

(A)奇函数　　(B)偶函数

(C)既不是奇函数，也不是偶函数　　(D)可能是奇函数，也可能是偶函数

(2) 已知函数 $y=f(x)$($f(x)$不恒为 0)和 $y=-f(x)$的图象关于原点对称，则 $y=f(x)$是(　　)

(A)奇函数而不是偶函数　(B)偶函数而不是奇函数

(C)奇函数也是偶函数　(D)非奇非偶函数

(3) 定义在区间$[a,b]$$(a<b)$上的函数 $y=f(x)$如果存在反函数，那么 $y=f(x)$在区间$[a,b]$是(　　)

(A)增函数　(B)减函数　(C)单调函数　(D)可以不是单调函数

(4) 如果奇函数 $f(x)$在区间$[3,7]$上是增函数且最小值为 5，那么 $f(x)$在区间$[-7,-3]$上是(　　)

(A)增函数且最小值为-5　　(B)增函数且最大值为-5

(C)减函数且最小值为-5　　(D)减函数且最大值为-5

二、填空题

(1) $y=f(x)$是定义在$(0,+\infty)$内的减函数，则 $y=f(x^{\frac{2}{3}})$的定义域是______，递增区间是______.

(2) 设 $\varphi(x)$、$g(x)$及 $f(x)$均为 R 上的单调增函数，如果 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则 $f[f(x)]$、$\varphi[\varphi(x)]$、$g[g(x)]$之间的大小关系为______.

(3) 如果 $f(x)$是偶函数，且在$(-\infty,0)$上是增函数，那么 $f(\sqrt{2})$、$f(-\frac{\pi}{2})$、$f(1.5)$的大小关系是______.

三、已知奇函数 $f(x)$在定义域$(-1,1)$内单调递减，且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求 a 的取值范围．

四、根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数．

五、已知函数 $f(x)$的定义域是实数集 R，且对于任意实数 x_1、x_2 都有 $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)f(x_2)$，求证：$f(x)$是偶函数．

1.4　一次函数与二次函数

［**知识点与考测点**］ 一次函数和二次函数的概念、性质、图象、二次函数图象的应用，二次函数在闭区间上的最大值和最小值．

例1 如果当 $x=a$ 时二次函数 $f(x)$有最大值 5，而二次函数 $g(x)$的最小值为-2，且 $a>0$，$g(a)=25$，又 $f(x)+g(x)=x^2+16x+13$，求(1)a 的值；(2)$g(x)$的解析式

［**解**］ (1)由 $f(a)+g(a)=a^2+16a+13=5+25$ 得 $a^2+16a-17=0$，因 $a>0$，故 $a=1$.

(2) 由 $a=1$ 与已知，可设 $f(x)=-m(x-1)^2+5=-mx^2+2mx-m+5(m>0)$，因

$f(x)+g(x)=x^2+16x+13$,故$g(x)=(1+m)x^2+(16-2m)x+m+8$,又$g(x)$的最小值为$-2$,所以

$$\frac{4(1+m)(m+8)-(16-2m)^2}{4(1+m)}=-2,\text{解之得 } m=2.$$

故 $g(x)$的解析式为 $3x^2+12x+10$.

[**讲评**] 本例解法主要是待定系数法,但有时可根据题目的条件,采用比较灵活的方式来减少未知量,例如已知二次函数 $f(x)$的顶点为(p,q),则可设 $f(x)=a(x-p)^2+q$.

例2 若函数 $f(x)=(4-3a)x^2-2x+a$,其中 a 是常数,求 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值

[**分析**] 若 $4-3a=0$,即 $a=\frac{4}{3}$时,$f(x)=-2x+a$,因 $f(x)$是减函数,故 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(0)=a$,若 $4-3a<0$,即 $a>\frac{4}{3}$时,$f(x)$的图象是一条开向下的抛物线,又由于对称轴为 $x=\frac{1}{4-3a}<0$,知 $f(x)$在$[0,1]$上单调递减,故 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(0)=a$. 若 $4-3a>0$,即 $a<\frac{4}{3}$时,$f(x)$的图象是一条开口向上的抛物线,当$\frac{1}{2}<\frac{1}{4-3a}$,即 $a>\frac{2}{3}$时,由对称性知 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(0)=a$,当$\frac{1}{4-3a}\leqslant\frac{1}{2}$,即 $a\leqslant\frac{2}{3}$时,由对称性知 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(1)=2-2a$.

综上所述,当 $a\leqslant\frac{2}{3}$时,$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(1)=2-2a$. 当 $a>\frac{2}{3}$时,$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(0)=a$.

[**讲评**] 利用函数图象讨论二次函数在闭区间上的最大值和最小值问题十分方便,以开口向上的抛物线为例:设闭区间为$[m,n]$,抛物线的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$. 那么当$-\frac{b}{2a}<\frac{m+n}{2}$时,$f(n)$是最大值,当$-\frac{b}{2a}<\frac{m+n}{2}$时,$f(m)$是最大值. 最小值是否是 $f(-\frac{b}{2a})$,由是否有$-\frac{b}{2a}\in[m,n]$确定,当$-\frac{b}{2a}\in[m,n]$时,$f(x)$的最小值是 $f(-\frac{b}{2a})$. 当$-\frac{b}{2a}\notin[m,n]$时,$f(x)$的最小值在另一端点取得.

这种闭区间上的最大值最小值问题还有另一类型:对称轴是固定的,而闭区间是运动的. 它同样可以利用图象来进行讨论.

例3 已知二次函数 $f(x)$满足关系式:$f(-2+x)=f(-2-x)$.

(1) 试比较 $f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$、$f(-\frac{\pi}{3})$、$f(-1)$之大小;

(2) $f(x)$中有唯一的自变量与其对应函数值相等且 $f(x)$图象被 x 轴截得线段之长为4,求 $f(x)$的具体表达式.

[**分析**] (1)由 $f(-2+x)=f(-2-x)$知直线 $x=-2$ 是二次函数 $f(x)$的图象的对称轴. 因为$-2<-\frac{\pi}{3}<-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}$,故当$f(x)$的二次项系数$a>0$时,有$f(-\frac{\pi}{3})<f(-1)<f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;当 $a<0$ 时有 $f(-\frac{\pi}{3})>f(-1)>f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(2)设 $f(x)=a(x+2)^2+m$,由已知图象与 x 轴交于两点$(-4,0)$,$(0,0)$,以$(0,0)$代入得 $4a+m=0$…①又令 $y=x$,则方程 $x=a(x+2)^2+m$ 有相同的解,得 $\Delta=(4a-1)^2-4a(4a+m)$

$=0\cdots$②由①、②解得 $a=\frac{1}{4}$，$m=-1$，故 $y=f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$，即 $y=f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$.

［讲评］ (1) 函数 $f(x)$ 若适合 $f(m+x)=f(m-x)(x\in R)$，则图象关于直线 $x=m$ 对称，若 $f(m+x)=-f(m-x)$，则图象关于点 $(m,0)$ 成中心对称（事实上，若将坐标原点平移至 $0'(m,0)$ 则得类似于偶函数与奇函数的关系式 $f(x')=f(-x')$，$f(x')=-f(-x')$. 这一特点应注意结合图象了解掌握.

(2) 此处解法仍用待定系数法，一般地确定二次函数关系式需且只需三个独立条件，本例给出的三个条件即①对称轴；②直线 $y=x$ 被它所截之弦长；③直线 $y=x$ 与它只有一个公共点，故可得三个关系式，确定三个待定系数，这是一种常用的思想方法，在解析几何中的应用尤其广泛.

知识与能力训练题(1.4)

一、选择题

(1) 若 $f(x)=(m-1)x^2+2mx+3(x\in R)$ 为偶函数，那么在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$ 是(　　)

(A)增函数　　(B)减函数

(C)部分是增函数，部分是减函数　　(D)不能确定增减性

(2) 如果 $f(x-3)=x^2+2x+1$，那么 $f(x+3)$ 等于(　　)

(A)$x^2+8x+16$　(B)x^2-4x+3　(C)$x^2+14x+49$　(D)$x^2-14x+49$

(3) 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数 $y=ax+2a+1$ 有正有负，则实数 a 的取值范围是(　　)

(A)$a\geqslant-\frac{1}{3}$　(B)$a\leqslant 1$　(C)$a<-\frac{1}{3}$　(D)$-1<a<-\frac{1}{3}$

(4) 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么(　　)

(A)$f(2)<f(1)<f(4)$　　(B)$f(1)<f(2)<f(4)$

(C)$f(2)<f(4)<f(1)$　　(D)$f(4)<f(2)<f(1)$

二、填空题

(1) 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$ 且 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\frac{5}{2})$，则 $f^{-1}(x)=$________其定义域是________.

(2) 函数 $f(x)=x^2-ax+1$，若 $|f(1)|<1$，那么 a 的取值范围是______.若 $f(x)$ 有负值，那么 a 的取值是________.

(3) 已知 $y=\frac{1}{3}x+m$ 和 $y=nx-6$ 互为反函数，则 $m=$______，$n=$______.

三、求证：$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2-2x-3 & (x<0)\end{cases}$ 是奇函数.

四、已知二次函数 $f(x)$ 满足条件 $f(0)=1$ 和 $f(x+1)-f(x)=2x$. 求：(1)$f(x)$ 的解析表达式；(2)$f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值.

五、已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(3x+2)=9x^2+6x-3$，求 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上的反函数.

1.5 幂函数、指数函数和对数函数

［知识点与考测点］幂函数、指数函数和对数函数的概念，性质和图象，底数 a 对图象的影响、函数图象与性质的初步应用.

例 1 已知 $0.9<a<1$，$x=a^a$，$y=a^x$，试比较 a,x,y 的大小.

［解］ 因 $0.9<a<1$，故 a^u 是减函数，又 $a<1$，从而 $a^a>a^1$ 即 $x>a$. 再由 $0.9<a<1$ 知在

区间$(0,+\infty)$上有$0<a^a<1$,所以$1>x>a$,于是有$a^1<a^x<a^a$,即$a<y<x$.

[讲评] 比较大小的常用方法有:(1)利用函数的单调性;(2)利用某些特殊的数,如1或0作桥梁,例如,因$(\frac{7}{8})^{-\frac{6}{7}}>1,8^{-\frac{7}{8}}<1$,故有$\left(\frac{7}{8}\right)^{-\frac{6}{7}}>8^{-\frac{7}{8}}$;(3)作差法或作商法;(4)利用函数图象.

例2 设$y=\log_{\frac{1}{2}}[a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1](a>0,b>0)$,求使$y$为负值的$x$的取值范围.

[解] 要$y<0$,只要$a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}>0$即可,于是有$(a^x+b^x)^2>(\sqrt{2}b^x)^2$.因$a^x>0,b^x>0$,所以$a^x+b^x>\sqrt{2}b^x$,$\left(\frac{a}{b}\right)^x>\sqrt{2}-1$,故当$a>b>0$时,$x>\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$;当$b>a>0$时,$x<\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$;当$a=b$时,$x\in R$.

[讲评] 这是一道涉及到指数函数与对数函数性质的综合性问题,解答关键在于正确运用这两个函数的性质.

例3 如果正实数a、b满足$a^b=b^a$,且$a<1$,证明$a=b$.

[分析] 从题设条件看,直接证明$a=b$有一定的困难,因而可先求得b的取值范围,再采用反证法证明.

[证明] 由$0<a<1$及$b>0$得$0<a^b<1$,从而$0<b^a<1$,由于$a>0$,故$0<b<1$.若$0<a<b<1$,则由指数函数及幂函数的单调性得$a^b<a^a<b^a$,与$a^b=b^a$矛盾,同样,若$0<b<a<1$,同理得到$a^b>a^a>b^a$,与$a^b=b^a$矛盾,从而$a=b$.

[讲评] 在本例的证明中,巧妙地利用了a^a进行过渡,比较a^b与a^a的大时利用指数函数的单调性,比较a^a与b^a的大小时利用幂函数的单调性,这种技巧在解答数学问题中也是经常用到的,同样利用b^b过渡也会得到同样的效果.

例4 若a,b为不等于1的正数,且$a<b$,试比较$\log_a\frac{1}{b},\log_a b,\log_b\frac{1}{b}$的大小.

[分析] 这里$\log_b\frac{1}{b}=-1$是一个常数,而$\log_a\frac{1}{b},\log_a b$可正可负,与$-1$比较大小也不能确定,因而要分类进行讨论.

[解] (1)当$1<a<b$时,因为$\log_a\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{a}=-1,\log_b\frac{1}{b}=-1,\log_a b>0$,故$\log_a\frac{1}{b}<\log_b\frac{1}{b}<\log_a b$;

(2)当$0<a<b<1$,因为$0>\log_a\frac{1}{b}>\log_a\frac{1}{a}=-1,\log_b\frac{1}{b}=-1,\log_a b>0$,故$\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}<\log_a b$;

(3)当$0<a<1<b$,且$b>\frac{1}{a}$时,因为$\log_a b<\log_a\frac{1}{a}=-1,\log_b\frac{1}{b}=-1,\log_a\frac{1}{b}>\log_a a=1$,故$\log_a b<\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}$;

(4)当$0<a<1<b$,且$b=\frac{1}{a}$时,则有$\log_a b=\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}$;

(5)当$0<a<1<b$,且$b<\frac{1}{a}$时,因为$0>\log_a b>\log_a\frac{1}{a}=-1,\log_a\frac{1}{b}>0$,故$\log_b\frac{1}{b}<\log_a b<\log_a\frac{1}{b}$.

[讲评] 由于a、b是对数的底数,因此以1为标准分三类讨论,在第三类中又由于b与$\frac{1}{a}$

的大小关系有三种，故在第三类中又有三种情况，这样实际上要分五类进行讨论．只有这样讨论，才会使分类不重复，不遗漏，这一点在分类讨论中是非常重要的．真数相同，底数不同的两个对数值，例如 $\log_a m$ 和 $\log_b m$ 的大小也可以利用函数图象进行比较．这需要我们特别熟悉对数函数的图象．

知识与能力训练题(1.5)

一、选择题

(1) 若 $0<a<1, x>y>1$，则 a^x, a^y, x^a, y^a 中最大的数是(　　)

(A)a^y　(B)a^x　(C)y^a　(D)x^a

(2) 设 $0<a<1$，且 $\log_{\frac{2}{a}}x_1=\log_a x_2=\log_{a+1}x_3>0$，则(　　)

(A)$x_1<x_2<x_3$　(B)$x_1<x_3<x_2$　(C)$x_2<x_3<x_1$　(D)$x_2<x_1<x_3$

(3)* 设 $f(x)=|\lg x|$，且 $a<b<c$，若 $f(a)>f(c)>f(b)$，那么以下结论中正确的是(　　)

(A)$ac<1$　(B)$bc<1$　(C)$(a-1)(b-1)>0$

(D)$(a-1)(c-1)>0$

(4) 图 1.2 中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象，已知 n 取 $\pm2, \pm\frac{1}{2}$ 四个值，则相应于曲线 c_1, c_2, c_3, c_4 的 n 依次为(　　)

(A)$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$

(B)$2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$

(C)$-\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$

(D)$2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$

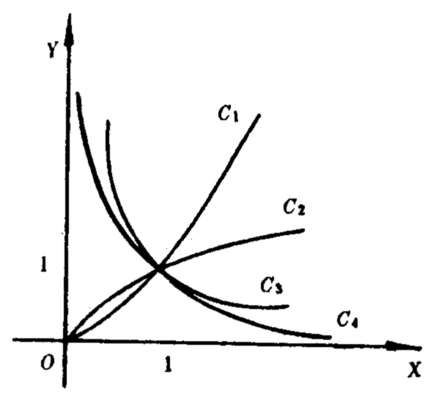

图 1.2

二、填空题

(1) 函数 $f(x)=\log_2(ax^2+3x+a)$ 的定义域是实数集 R，则 a 的取值范围是_______.

(2) $f(x)=a^x(x>0, a>0$ 且 $a\neq1)$ 又 $f(2\log_a x)<\log_a f(x)$，则 x 的取值范围是______.

(3) 若 $f(x)=2^x, g(x)=4^x$，且 $g[g(x)]>g[f(x)]>f[g(x)]$，那么 x 的取值范围是______.

三、设 $a>0, a\neq1, t>0$，比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小．

四、已知 $2^x=3^y=5^z$，且 x, y, z 都是正数，试比较 $2x, 3y, 5z$ 的大小．

五、设 $f(x)=x^2-x+k, \log_2 f(a)=2, f(\log_2 a)=k(a\neq1)$．

(1) 求 k、a 的值；

(2) 若 $f(\log_2 x)\geqslant f(1)$ 且 $\log_2 f(x)\leqslant f(1)$，求 x 的取值范围．

1.6 简单复合函数及性质

[知识点与考测点] 简单复合函数的概念，简单复合函数的单调性与奇偶性的判定方法，简单复合函数的最大(小)值的求法．

例 1 讨论函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(|x+2|+|2x-1|)$ 的单调性．

[分析] 为了研究函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(|x+2|+|2x-1|)$ 的单调性，必须讨论函数 $u=g(x)=|x+2|+|2x-1|$ 的单调性．

[解] 令 $u=g(x)=|x+2|+|2x-1|$ 则