# 现代应用数学手册

《现代应用数学手册》编委会

# 概率统计与随机过程卷

清華大學出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

《现代应用数学手册》编委会

# 现代应用数学手册

## 概率统计与随机过程卷

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

## 内 容 简 介

本书为介绍概率统计与随机过程之数学理论及应用方法的工具书. 全书分三大部分共 35 章. 第一部分为第 1 至 10 章, 介绍概率论中的基本概念和基本结论; 第二部分为第 11 至 20 章, 介绍各种经典和现代的数理统计方法; 第三部分为第 21 至 35 章, 介绍随机过程的一般理论和应用概率方法, 以及位势理论、鞅论、随机微分方程、预报与滤波、排队论、可靠性理论、随机模拟与马尔可夫决策规划等较新内容. 全书覆盖面广, 内容新颖, 实用性强, 查阅方便. 适合于广大科技人员、管理干部与大中专院校的师生.

**图书在版编目(CIP)数据**

现代应用数学手册. 概率统计与随机过程卷/《现代应用数学手册》编委会编. —北京: 清华大学出版社, 1999

ISBN 7-302-03553-9

Ⅰ. 现… Ⅱ. 现… Ⅲ. ①应用数学-手册②概率论③数理统计④随机过程 Ⅳ. O29-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14322 号

**出版者**: 清华大学出版社(北京清华大学学研楼, 邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

**印刷者**: 清华大学印刷厂

**发行者**: 新华书店总店北京发行所

**开　本**: 850×1168 1/32　**印张**: 28.5　**字数**: 735 千字

**版　次**: 2000 年 7 月第 1 版　2000 年 7 月第 1 次印刷

**书　号**: ISBN 7-302-03553-9/O・213

**印　数**: 0001～4000

**定　价**: 48.00 元

# 1 随机事件及其概率

随机事件及其概率是概率论中两个最基本的概念.本章从直观的角度来讨论这两个概念,在第 7 章讨论严格的数学形式.

## 1.1 随机事件

### 1.1.1 随机试验与随机事件

**随机试验**(random experiment)是一个可观察结果的人工或自然的过程,其产生的结果可能不止一个,且不能事先确定会产生什么结果.

随机试验是一个相当广泛的概念.例如,一次科学试验,一个受到观测记录的自然过程(如天气)或社会过程(如市场),一组数据的采集(如人口调查)等,都可以看作是一个随机试验.

**样本空间**(sample space)是一个随机试验的全部可能出现的结果的集合,通常记作 $\Omega$. $\Omega$ 中的点(即一个可能出现的试验结果)称为**样本点**(sample point),通常记作 $\omega$.

**随机事件**(random event)是一个随机试验的一些可能结果的集合,是样本空间的一个子集.它常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

以下简称随机事件为事件.在实际问题中,事件常用一句话来描述(见例 1.1.1~1.1.4).当试验的结果(即一个样本点)属于某事件所对应的子集时,则称该事件发生.为了数学表示上的方便,空集也算作一个事件,记作$\varnothing$.样本空间 $\Omega$ 本身也表示一个事件.

**例 1.1.1** 将一枚硬币连掷两次,观察硬币落地后是花面向

上还是字面向上. 这是一个随机试验. 用 $H$ 记花面向上, $W$ 记字面向上, 则共有 4 个可能出现的结果(样本点):

$$\omega_1 = HH, \omega_2 = HW, \omega_3 = WH, \omega_4 = WW.$$

样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

其中 $\omega_1 = HH$, 表示第一次与第二次均出现花面; $\omega_2 = HW$, 表示第一次出现花面, 第二次出现字面; 等等.

考虑下述事件:

$A$="花面字面各出现一次",

$B$="第一次出现花面",

$C$="至少出现一次花面",

$D$="至多出现一次花面".

则

$A = \{\omega_2, \omega_3\}, B = \{\omega_1, \omega_2\}, C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, D = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

**例 1.1.2** 记录某电话交换台在上午 9 点至 10 点之间内接到呼唤的次数, 是一次随机试验, 其试验结果可以用任一个非负整数值来表示. 因此样本空间 $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$. 设事件 $A$ 为"接到 5 次以上的呼唤", 事件 $B$ 为"没有接到呼唤". 则

$$A = \{5, 6, \cdots\}, \quad B = \{0\}.$$

**例 1.1.3** 从一大批灯泡中随意抽一个检验其寿命(接通电源直到灯丝烧断为止), 这也是一个随机试验. 以小时为单位, 灯泡的寿命可以用任一个非负实数来表示, 样本空间 $\Omega = \{\omega \mid 0 \leqslant \omega\}$. 设事件 $A$ 为"灯泡寿命不超过 10000 小时", 则 $A = \{\omega \mid 0 \leqslant \omega \leqslant 10000\}$.

**例 1.1.4** 为调查儿童健康状况, 从某地区某年龄组的儿童中随机地抽取 100 名称量其体重, 这也是一次随机试验. 以 kg 为单位, 则一个试验结果可以用 100 个非负实数来表示, 记为 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$. 样本空间为 $\Omega = \{\omega = (x_1, \cdots, x_{100}) \mid x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, 100\}$, 设事件 $A$ 为"测试儿童平均体重超过 15kg", 则

$$A=\left\{\omega=(x_1,\cdots,x_{100})\mid x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,100,\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i}{100}\geqslant 15\right\}.$$

从以上几例可以看出，随机试验的结果是非常不同的，可以是一个数（例 1.1.2，1.1.3），也可以是一个数组（例 1.1.4）或是一个符号串（例 1.1.1）. 在实际问题中，要正确地认清样本空间和事件是如何构成的.

### 1.1.2 事件间的关系与运算

当谈到一个以上的事件时，总是对同一试验的样本空间上的事件而言的.

**定义 1.1.5** 两个事件 $A$ 与 $B$ 可能有以下几种特殊的关系：

(1) **包含**(contain) 若事件 $B$ 发生则事件 $A$ 也发生，称"$A$ 包含 $B$"或"$B$ 含于 $A$"，记作 $A\supset B$ 或 $B\subset A$.

(2) **等价**(equivalent) 若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，即 $A$ 与 $B$ 同时发生或同时不发生，则称 $A$ 与 $B$ 等价，记作 $A=B$.

(3) **互斥**(exclusive) 若 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，则称 $A$ 与 $B$ 互斥，记作 $AB=\varnothing$.

(4) **对立**(contrary) 若 $A$ 与 $B$ 互斥，且必有一个发生，则称 $A$ 与 $B$ 对立，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$. 又称 $A$ 为 $B$ 的**余事件**(complement)或 $B$ 为 $A$ 的**余事件**.

任意两个事件不一定会是上述几种关系中的一种.

由给定的一些事件按下述运算可导出新的事件.

**定义 1.1.6** 设 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一些事件，它们有下述的运算：

(1) **交**(intersection) 记 $C=$"$A$ 与 $B$ 同时发生"，称为事件 $A$ 与 $B$ 的交，$C=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，记作 $C=A\cap B$，或 $C=AB$.

类似地用 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n$ 表示事件"几

个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i, i = 1, \cdots, n\}.$$

(2) **并**(union) 记 $C=$“$A$ 与 $B$ 中至少有一个发生”,称为事件 $A$ 与 $B$ 的并,$C=\{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$记作 $C=A \cup B$.

类似地用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示事件“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 几个事件中至少有一个发生”.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \mid \omega \text{ 属于某一个 } A_i, i = 1, \cdots, n\}.$$

(3) **差**(difference) 记 $C=$“$A$ 发生而 $B$ 不发生”,称为事件 $A$ 与 $B$ 的差,$C=\{\omega \mid \omega \in A$,但 $\omega \notin B\}$,记作 $C=A \backslash B$(或 $A-B$).

**注** 并和交的运算可推广到无穷多个事件.

由上述三种基本的运算又可导出下列几种特殊的运算.

**定义 1.1.7** 设 $\Omega$ 为样本空间,$A$、$B$ 为两个事件.

(1) **求余**(complementation)

$$\overline{A} = \Omega \backslash A$$

(2) **直和**(direct sum) 若 $AB=\varnothing$,则记

$$A + B = A \cup B$$

(3) **对称差**(symmetric difference)

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (AB)$$

事件运算有下列的规律

$$\left.\begin{array}{lll}
(1)\ \text{交换律} & A \cup B = B \cup A,\ AB = BA. & \\
(2)\ \text{结合律} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & \\
 & (AB)C = A(BC). & \\
(3)\ \text{分配律} & (A \cup B)C = (AC) \cup (BC). & \\
 & (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C). &
\end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

(4) 德摩根(De Morgan)律

$$\overline{(\bigcup_i A_i)} = \bigcap_i \overline{A_i}, \quad \overline{(\bigcap_i A_i)} = \bigcup_i \overline{A_i}. \tag{1.2}$$

(5) 直和分解律

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + (\overline{A}_1 A_2) + (\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) + \cdots + (\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) \tag{1.3}$$

事件运算的优先顺序为:求余,对称差,交,差和并.

**例 1.1.8** 设事件 $A,B,C$ 和 $D$ 如例 1.1.1 中定义,则 $\overline{A}=\{\omega_1,\omega_4\}$,$BC=\{\omega_1,\omega_2\}=B$,$C-D=\{\omega_1\}$.

**例 1.1.9** 设 $A,B,C$ 为三个事件,用它们之间的运算关系表示下列几个事件:

$D$="$A,B,C$ 同时发生",

$E$="$A,B,C$ 都不发生",

$F$="$A,B,C$ 至少发生一个",

$G$="$A,B,C$ 至多发生一个".

则

$D=ABC$.

$E=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

$F=A\cup B\cup C=A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\,\overline{C}+A\,\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

$G=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

## 1.2 事件的概率

### 1.2.1 概率的定义及其频率解释

**定义 1.2.1** 设 $\Omega$ 为一个随机试验的样本空间,对 $\Omega$ 上的任一事件 $A$,规定一个实数与之对应记为 $P(A)$,满足下述三条基本性质,称为事件 $A$ 发生的概率(probability):

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.

(3) 若二事件 $AB$ 互斥,即 $AB=\varnothing$,则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B).$$

上述三条基本规定是符合常识的.

**例 1.2.2** 设一个随机试验只有两个可能的结果,记为 $\omega_0$ 和 $\omega_1$,则所有可能的事件只有 4 个:

$\Omega=\{\omega_0, \omega_1\}, \{\omega_0\}, \{\omega_1\}$和空集$\varnothing$.

对每个事件定义一个概率如下:

$$P(\Omega)=1, P(\{\omega_0\})=1-p, P(\{\omega_1\})=p, P(\varnothing)=0.$$

其中 $p$ 为介于 0 和 1 之间的一个正数. 容易验证,这样规定的概率满足定义 1.2.1 中要求的三条基本性质.

由此例看出,当 $p$ 在 0 与 1 之间选不同的值时,事件的概率是不同的. 这说明,对具体事件赋概率时有一定的随意性. 为此需回答下面两个问题:

第一,概率的客观背景是什么? 换言之,当人们说某一事件发生的概率为百分之几十时,其客观含义是什么?

第二,如何根据一定的试验结果来为事件赋恰当的概率或判断我们对某一事件所赋的概率是否恰当?

**表 1.1 历史上掷硬币试验的记录**

| 试验者 | 总试验次数 $n$ | 花面向上次数 $m$ | 频率 $m/n$ |
|---|---|---|---|
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5070 |
| 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |

人类由经验发现:当大量重复地进行随机试验时,随机事件的发生呈现出一定的规律性. 以抛掷硬币的试验为例,前人曾作过多

次试验,发现当抛掷次数很大时,花面和字面出现的次数相当接近,即大约各占总试验次数的 50%. 试验结果与人们按直觉判断的结论“出现花面和字面的可能性各为½”的理性分析相吻合.

除了掷硬币之外,人们还作了许多其它的试验,都显示了下述的客观规律性:

设某一随机试验可以在不改变试验条件的前提下互不干扰地重复进行任意多次,$A$ 为一次试验所产生的任一个事件. 记 $n$ 为试验次数,$m_n$ 为在 $n$ 次试验中 $A$ 发生的次数,$f_n=m_n/n$ 为 $A$ 在 $n$ 次试验中发生的**频率**(frequency),则当试验次数 $n$ 很大且不断增大时,$f_n$ 稳定地趋向于某一定值. 这种性质称为**频率的稳定性**.

由于频率的性质与定义 1.2.1 中所规定的三条基本性质基本相同,可以推出频率所趋向的定值也满足这三条基本性质. 因此这些定值可以解释为事件发生的概率. 这种用频率的“极限”来解释概率的观点被称为**概率的频率解释**或**统计解释**,频率的稳定性又可称为**经验大数定律**.

在统计物理学中,利用频率的稳定性建立概率模型来解释分子运动的规律. 在数理统计学中利用频率的稳定性来解答上面提出的第二个问题. 首先,当我们不知道某个事件的概率时,可以用频率去近似地估计它;其次,当我们假设某一事件发生的概率在一定范围内时,可以用频率去检验它.

当随机试验不能重复时,概率失去其频率解释的含义. 此时,概率还有其他解释. 围绕着对概率概念的不同解释已形成了三大学派:频率学派,Bayes 学派与信念(fiducal)学派.

### 1.2.2 概率的性质

除了定义 1.2.1 中所列的三条基本性质以外,概率还有一些重要的性质.

**引理 1.2.3** 概率的性质

(1) 单调性　设 $A \supset B$,则 $P(A) \geqslant P(B)$.

(2) 有限与可列可加性　设 $A_1, \cdots, A_n$ 为一列两两互斥的事件,即 $A_iA_j = \varnothing$,当 $i \neq j$,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

(3) 连续性　设 $A_n \supset A_{n+1}, B_n \subset B_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$,则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

**注**　可列可加性与连续性并不能由定义 1.2.1 推出,因为该定义在数学上还不是十分严格的,读者可参阅 7.1 节.

**引理 1.2.4** 概率计算的常用公式

(1) $P(A-B) = P(A) - P(AB)$.

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} [P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)].$$

(4) $P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(AB)$.

**定义 1.2.5**　设 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一组有限或可列无穷多个事件,两两不相交且 $\sum_n A_n = \Omega$,则称事件族 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个**完备事件族**. 又若对任一事件 $B$ 有 $BA_n = A_n$ 或 $\varnothing$, $n = 1, 2, \cdots$,则称 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为**基本事件族**.

**定理 1.2.6**　若 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一完备事件族,则

$\sum_n P(A_n)=1$，且对任一事件 $B$ 有

$$P(B)=\sum_n P(A_nB).$$

又若 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一基本事件族，则

$$P(B)=\sum_{A_n\subset B} P(A_n).$$

**例 1.2.7** 设一袋中有 $N$ 个红球和 $M$ 个白球. 从中无放回地抽取 $n$ 个球. 记 $N$ 个红球为 $R_1, R_2, \cdots, R_N$，$M$ 个白球为 $W_1, W_2, \cdots, W_M$. 则每个样本点为 $n$ 个 $R_i$ 和 $W_j$ 的一个排列. 假设抽球记录只考虑抽到几个什么样的红球和几个什么样的白球，而不考虑其抽到的先后顺序，则每个基本事件为 $n$ 个 $R_i$ 和 $W_j$ 的组合. 由于每个基本事件中有相同多的样本点（$n!$ 个），因此，在古典概率模型中（见节 1.3），每个基本事件有相同的概率 $1\Big/\binom{N+M}{n}$. 于是对事件 $B_k$＝"抽到 $k$ 个红球"（$k\leqslant n$），其中包含了 $\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}$ 个基本事件，故 $P(B_k)=\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}\Big/\binom{N+M}{n}$.

### 1.2.3 概率分布

**定义 1.2.8** 设 $\Omega$ 为样本空间，对 $\Omega$ 上的所有事件依照定义 1.2.1 的规定确定了概率，则 $\{P(A) \mid A$ 为 $\Omega$ 上的事件$\}$ 构成样本空间 $\Omega$ 上的一个**概率分布**(probability distribution).

若 $\Omega$ 上存在一族有限或可列多个基本事件，且对每个基本事件规定了发生的概率，则由定理 1.2.6 可知任一事件的概率就由这些基本事件的概率所决定.

**例 1.2.9** 设样本空间有有限个样本点，$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$n$ 为样本点总数. 则事件 $\{\omega_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$（即由单个样本点构成的事件）为一基本事件族，若规定 $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}$，$i=1,\cdots,n$. 则由此确定的概率分布称为**等概率分布**或古典概率分布.

**例 1.2.10** 设样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$，对基本事件族 $\{k\}$，$k=0,1,2,\cdots$，定义概率为

$$P(\{k\})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots,$$

则确定了 $\Omega$ 上的一个概率分布，称为泊松(Poisson)分布(详见节 6.2).

然而在很多场合并不存在一个有限或可列的基本事件族，此时，概率分布的表达形式比较复杂. 例如：$\Omega$ 为实数空间 $R^1$ 或 $R^1$ 上的一个区间. 这时，事件的概率就要用积分的形式来表示.

**例 1.2.11** 设 $\Omega=\mathbf{R}^1$，$\Omega$ 上的任一事件可由有限或可列无穷多个区间的并和交的运算得到，对任一区间 $(a,b]$，定义

$$P((a,b])=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

这样确定的概率分布称为**标准正态分布**(standard normal distribution)(详见 6.4).

## 1.3 古典概率

**定义 1.3.1** 设样本空间 $\Omega$ 由有限个样本点构成，若每个样本点作为一个基本事件有相同的发生概率，如此确定的概率分布称为**古典概率分布**(classical probability distribution).

**推论 1.3.2** 设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，在 $\Omega$ 上定义了一个古典概率分布，则有 $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}$，$i=1,\cdots,n$，且对任一事件 $A$ 有

$$P(A)=\frac{1}{n}(A\text{ 中样本点数}).$$

古典概率分布是一种理论上简单而又有广泛实用价值的概率模型. 使用古典概率模型的前提是样本点具有某种对称性或经受住频率检验. 例如掷一枚硬币，观察其向上的面，如果可以认为硬

币的形状是标准的，质地是均匀的，就没有理由认为某一面向上的概率比另一面更大些. 频率检验也证明了这一点(见表 1.1).

**例 1.3.3** 在一个由 $N$ 个**个体**(individual)组成的**总体**(population)中逐次抽取 $n$ 个个体，称为**抽样**(sampling). 假如在抽样过程中每抽到一个个体后做记录，再将此个体放回，抽下一个. 这样的抽样称为**有放回抽样**(sampling with replacement). 在有放回抽样中，每个结果是 $n$ 个个体(允许重复)的一个排列. 样本点总数为 $N^n$. 因此在古典概率模型中每个样本点发生的概率为 $1/N^n$.

**例 1.3.4** 设在一袋内有 $N$ 个白球和 $M$ 个黑球，从中有放回地随机抽取 $n$ 个球，则抽到 $k$ 个白球的概率为

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

其中
$$p=\frac{N}{N+M}, \quad q=\frac{M}{N+M}.$$

分析如下：由于样本点的总数为 $(N+M)^n$，因此每个样本点发生的概率为 $1/(N+M)$. 记 $A_k$ 为事件"抽到 $k$ 个白球"，则 $A_k$ 中的样本点可按以下两步分类. 首先考虑这 $k$ 个白球是在哪几次抽取中获得的可分成 $\binom{n}{k}$ 个类. 其次，从 $N$ 个白球中取 $k$ 个，在有放回抽样场合有 $N^k$ 种可能性，最后从 $M$ 个黑球中取 $n-k$ 个有 $M^{n-k}$ 种可能性. 于是 $A_k$ 中样本点数为 $\binom{n}{k} N^k M^{n-k}$，再由推论 1.3.2 即得 $P_k$ 的表达式.

利用牛顿二项公式容易验证 $\sum\limits_{k=0}^{n} P_k = 1$. 因此 $\{P_k \mid k=0,1,2,\cdots,n\}$，在样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,n\}$ 上确定了一个概率分布，称为**二项分布**(binomial distribution)(详见 6.1).

**例 1.3.5** 在一个由 $N$ 个个体构成的总体中随机抽取 $n$ 个个体. 假定抽样过程是每次抽取一个个体，记录后不再放回总体中，再抽下一个，直到抽到 $n$ 个个体为止($n \leqslant N$). 这种抽样称为**无放**

**回抽样**(sampling without replacement). 在无放回抽样场合,样本点总数为 $N(N-1)\cdots(N-n+1)$. 若不考虑抽样的顺序,则有 $\binom{N}{n}$ 个基本事件,每个包含 $n!$ 个样本点.

**例 1.3.6** 设一袋中有 $N$ 个白球,$M$ 个黑球,从中无放回地抽取 $n$ 个,则抽到 $k$ 个白球的概率为

$$h_k=\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}\Big/\binom{M+N}{n},k=0,1,2,\cdots,n.$$

容易验证, $\sum_{k=0}^{n}h_k=1$. 因此 $\{h_k\mid k=0,1,\cdots,n\}$ 在样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,n\}$ 上确定了一个概率分布,称为**超几何分布**(hypergeometric distribution)(详见 6.3.7).

$h_k$ 的计算方法如下:在无放回抽样中,不考虑顺序,则共有 $\binom{N+M}{n}$ 个基本事件,每个基本事件有相同个数的样本点($n!$ 个). 因此,每个基本事件的概率为 $\binom{N+M}{n}^{-1}$. 记 $B_k$ 为抽到 $k$ 个白球的事件,则 $B_k$ 中的基本事件可按下列两步分类. 首先考虑包含哪 $k$ 个白球,可分 $\binom{N}{k}$ 类,其次再考虑包含哪 $n-k$ 个黑球,可分 $\binom{M}{n-k}$ 类. 故 $B_k$ 中共包含 $\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}$ 个基本事件. 因此由定理 1.2.6 知 $h_k=\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}\Big/\binom{N+M}{n}$.

在物理学中研究质点在相空间中散布的情况,要建立恰当的概率模型. 设有 $r$ 个质点,而相空间被划分成 $n$ 个小区域,则 $r$ 个质点在 $n$ 个小区域中的散布情形,可以用 $r$ 个球投入 $n$ 个盒的模型来形象地描述. 有三种不同的基于古典概率的物理模型.

**例 1.3.7** 麦克斯威尔-波尔茨曼(Maxwell-Boltzmann)模型 设 $r$ 个球是可分辨的,且每个盒子可容纳的球数没有限制. 则 $r$ 个球在 $n$ 个盒中的可能的散布状态共有 $n^r$ 种,每种可能的散布状态发生的概率为 $n^{-r}$.

**例 1.3.8** 波司-爱因斯坦(Bose-Einstein)模型 设 $r$ 个球不可分辨;每个盒子可容纳的球数也没有限制. 则 $r$ 个球在 $n$ 个盒中的散布状态仅由球分配到每个盒中的个数来确定,共有 $\binom{n+r-1}{n-1}$ 种可能的状态,每种可能的状态发生的概率为 $\binom{n+r-1}{n-1}^{-1}$.

**例 1.3.9** 费米-狄拉克(Fermi-Dirac)模型 设 $r$ 个球不可分辨,且每个盒中至多只能容纳一个球. 则有 $\binom{n}{r}$ 种散布状态,每种状态发生的概率为 $\binom{n}{r}^{-1}$.

上述三种模型适合于描述不同的物理粒子的运动状态.

**例 1.3.10** 数字 $1,2,\cdots,N$ 的一个随机排列中,若数字 $k$ 恰排在第 $k$ 个位置上则称为一个**相合**(congrence). 在一个排列中相合的个数可能为:$0,1,2,\cdots,N-2,N$. 由于排列的总数为 $N!$,因此每个排列发生的概率为 $(N!)^{-1}$. 用 $A_i$ 记事件"在第 $i$ 个位置上发生相合",则

$$P(A_i)=(N-1)!/N!=\frac{1}{N},i=1,2,\cdots,N.$$

$$P(A_iA_j)=(N-2)!/N!=\frac{1}{N(N-1)},i<j.$$

$$P(A_iA_jA_k)=(N-3)!/N!=\frac{1}{N(N-1)(N-2)},\quad i<j<k.$$

$$\cdots\cdots$$

用 $C$ 记事件"至少有一个相合发生",则由公式(1.2.4)有

$$\begin{aligned}P(C)&=P\Big(\bigcup_{i=1}^{N}A_i\Big)\\&=\binom{N}{1}\frac{1}{N}-\binom{N}{2}\frac{1}{N(N-1)}+\binom{N}{3}\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\\&\quad-\cdots+(-1)^{N-3}\frac{\binom{N}{N-2}}{N(N-1)\cdots 3}+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}\end{aligned}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{N-3}\frac{1}{(N-2)!}$$

$$+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}$$

$$\approx e^{-1}.$$

**例 1.3.11** 设 $n$ 个字母 $A$ 和 $m$ 个字母 $B$ 排成一列，则这一列字母可分成若干个小段，每段内的字母相同，而相邻段的字母不同，这样的一个小段称为一个**游程**(run)或**连贯**. 如，在排列 $AAABAABBA$ 中有 5 个游程，即 3 个 $A$ 游程 $AAA$，$AA$ 及 $A$，2 个 $B$ 游程 $B$ 及 $BB$. $n$ 个 $A$ 和 $m$ 个 $B$ 的排列共有 $\binom{n+m}{n}$ 种可区分的结果. 而一个排列中有 $k$ 个 $A$ 游程相当于把 $n$ 个不可分辨的球投入 $k$ 个盒中且没有一个盒是空的，共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种可能的状态. 同理，一个排列中有 $l$ 个 $B$ 游程的可能的状态为 $\binom{m-1}{l-1}$ 种，但 $|l-k|\leqslant 1$. 据此可算出：

$$P(k\text{ 个 }A\text{ 游程},k-1\text{ 个 }B\text{ 游程})=\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-2}\bigg/\binom{n+m}{n}.$$

$$P(k\text{ 个 }A\text{ 游程},k\text{ 个 }B\text{ 游程})=2\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}\bigg/\binom{n+m}{n}.$$

$$P(k\text{ 个 }A\text{ 游程},k+1\text{ 个 }B\text{ 游程})=\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}\bigg/\binom{n+m}{n}.$$

由以上三式可推得

$$P(k\text{ 个 }A\text{ 游程})=\binom{n-1}{k-1}\binom{m+1}{k}\bigg/\binom{n+m}{n}.$$

## 1.4 几何概率

作为等概率模型，古典概率只适用于有限样本空间. 但利用古典概率等于事件中样本点的个数与样本点总数之比的性质，可推广到一类定义在无限样本空间上的等概率模型.

设样本空间 $\Omega$ 为一维直线(或二维平面，或三维空间)上的有