西安交通大学
数学研究生教学丛书

常微分方程定性与稳定性方法

科学出版社

常微分方程定性与稳定性方法

西安交通大学数学研究生教学丛书

马知恩 周义仓 编著

科学出版社

内 容 简 介

本书是为应用数学专业的硕士生和高年级本科生所编写的一本教材.主要包括定性理论、稳定性理论和分支理论三个部分.内容着眼于应用的需要,取材精练,注意概念实质的揭示、定理思路的阐述、应用方法的介绍和实际例子的分析,并配合内容引入了计算机软件.章后附有习题.

本书可作为理工科专业研究生的教材和高年级本科生的选修课教材,也可供相关的科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程定性与稳定性方法/马知恩,周义仓编著.—北京:科学出版社,2001.8

(西安交通大学数学研究生教学丛书)

ISBN 7-03-009541-3

Ⅰ.常… Ⅱ.①马…②周… Ⅲ.常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039770 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2001 年 8 月第一次印刷 印张:20

印数:1—3 000 字数:328 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

微分方程在实际中有着广泛的应用，凡是与变化率有关的问题几乎都可以用微分方程模型来研究. 为了弄清一个实际系统随时间变化的规律，需要讨论微分方程解的性态，通常有三种主要的方法：(1) 求出方程的解析解(包括级数形式的解)；(2) 求方程的数值解；(3) 对解的性态进行定性分析. 三种方法各有其特点和局限性. 在对方程的研究中它们相互补充、相辅相成. 本书介绍定性分析的基本理论和方法，也就是不求解微分方程而研究时间趋于无穷时解的渐近性态. 其内容包括定性理论、稳定性理论和分支理论三个部分.

定性分析方面国内外已有不少很好的教材和专著，但面对非常微分方程专门化的应用数学专业的硕士生和高年级本科生，在当前有限的学时内尚难找到合适的教材. 本书正是为适应这一需要而编写的. 在编写中我们力求反映以下特色：

1. 从应用的需要出发精选内容

本书在讲清基本概念的基础上，取材着眼于应用中常见的一些方法及其必要的理论基础. 将某些繁难的证明略去而突出这些理论和方法的涵义和应用. 例如，中心与焦点的判定只讲形式级数法，着重讲清方法的证明思路和使用步骤，未作完整的严格证明；对高阶奇点的第一、二类判定问题仅在解析条件下给出结论；仅给出一些实用的中心流形定理，显示它们的应用而略去其证明等.

2. 加强定性理论、稳定性理论和分支理论三部分的相互渗透

本书在精选内容的基础上仍分章保持着定性理论(包括平面与空间)、稳定性理论和分支理论各自的基本体系，但在内容的叙述和方法的使用方面相互配合、相互渗透. 例如，用 Liapunov 函数法帮助判定某些中心或焦点，讲解平面闭轨线族的极限环分支；将旋转向量场纳入分支理论中讲授等.

3. 突出概念的实质和内容思想方法的揭示

本书力求总结作者多年来在研究生和数学系本科生教学中对本门课程讲授的经验体会，揭示概念的实质，分析定理证明和方法应用的思路，期望能有助于提高读者的数学素质和培养读者的创新研究能力.

4. 加强应用

本书专门列了一章微分方程应用举例. 在不同领域内挑选了几个实例从建立模型、定性分析到结果的实际意义都进行了较系统地讲解，在其它有关章节中也穿插了一些实例分析. 期望能引起读者的应用兴趣，有助于应用意识和

能力的培养.

5. 注意了与计算机使用的结合

本书在基本理论和方法的应用与计算机的数值计算和符号运算功能的有机结合方面进行了一些探索,例如利用计算机显示一些系统的轨线分布图;利用符号运算功能来计算焦点量等.为了使读者更方便地应用 Maple 软件解决微分方程定性、稳定性分析中的问题,我们在相应的地方都给出了 Maple 程序,对这些程序稍加修改,就可以解决更一般的问题.

本书的第一、二、四、五、六章由马知恩执笔,第三、七、八、九章由周义仓执笔,Maple 程序由周义仓调试.全书在内容的编排、叙述和文字符号的处理上被多次讨论并统一协调.限于编者水平,难免有错误与不妥之处,恳望得到广大读者的批评指正.

作　者

2001.2.12

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　基本定理

本章将介绍常微分方程解的一些基本定理,它们是本书的理论基础.其中有些定理在常微分方程的一般教程中已有论述.这里我们再作复习、补充和提高.

§1.1　解的存在惟一性定理

在大部分常微分方程教材中,解的存在惟一性定理是采用逐步逼近的近似解序列方法加以证明的.这种方法有其直观、实用的优点,但步骤复杂.下面我们对一般的向量微分方程,采用较高的观点,给出一个简捷的证明.

定理 1.1(存在惟一性定理)　考虑 Cauchy 问题①:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 R^n 中的向量. $\boldsymbol{f}$ 是实变量 t 和 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 维向量值函数. 若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在开区域 $G \subseteq R \times R^n$ 中满足下列条件:

1)　$\boldsymbol{f}$ 在 G 内连续,简记为 $f \in C(G)$;

2)　$\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件,即对于点 $P_0(t_0,\boldsymbol{x}^0) \in G$, $\exists$

$$G_0 = \{(t,\boldsymbol{x}) \mid |t - t_0| \leqslant a, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \leqslant b\} \subset G$$

和依赖于 P_0 点的常数 L_{P_0},使得 $\forall (t,\boldsymbol{x}^1),(t,\boldsymbol{x}^2) \in G_0$ 有不等式

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^2)\| \leqslant L_{P_0} \|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2\| \tag{1.1.2}$$

成立,其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数.

则 Cauchy 问题(1.1.1) 在区间 $|t - t_0| \leqslant h^*$ 上存在惟一的解.其中

$$0 < h^* < \min\left(h, \frac{1}{L_{P_0}}\right), \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

$$M = \max_{(t,\boldsymbol{x}) \in G_0} \|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|. \tag{1.1.3}$$

证　容易看出,在区间 $|t - t_0| \leqslant h^*$ 上 Cauchy 问题(1.1.1)等价于积分方程

---

①　求微分方程适合给定初始条件的解的问题称为 Cauchy 问题或称初值问题.

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau, \qquad |t - t_0| \leqslant h^* \tag{1.1.4}$$

的求解问题. 取 B 为定义在区间 $|t-t_0| \leqslant h^*$ 上的一切连续函数所构成的空间, D 为定义在区间 $|t-t_0| \leqslant h^*$ 上且图象包含在 G_0 中的一切连续函数所构成的集合. 现定义在连续函数空间 $C[t_0-h^*, t_0+h^*]$ 的映射

$$(Tx)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau, \qquad |t - t_0| \leqslant h^*. \tag{1.1.5}$$

由于

$$\begin{aligned}\| Tx - x^0 \| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \| f(\tau, x(\tau)) \| \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leqslant M |t - t_0| \leqslant b,\end{aligned}$$

所以, 映射(1.1.5) 把集合 D 映射到它自身. 要证明积分方程(1.1.4) 存在惟一的解, 也就是要证明映射(1.1.5) 存在惟一的不动点: $x^* = Tx^*$. 下面利用 Banach 空间的压缩映像原理来证明. 设 $\forall x^1, x^2 \in D$, 由(1.1.4) 得

$$\begin{aligned}\| Tx^1 - Tx^2 \|_C &= \max_{|t-t_0| \leqslant h^*} \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x^1(\tau)) - f(\tau, x^2(\tau))]\mathrm{d}\tau \right\| \\ &\leqslant \max_{|t-t_0| \leqslant h^*} \left| \int_{t_0}^{t} \| f(\tau, x^1(\tau)) - f(\tau, x^2(\tau)) \| \mathrm{d}\tau \right|.\end{aligned}$$

上式右端积分号内为欧氏范数. 由 Lipschitz 条件(1.1.2) 知

$$\begin{aligned}\| Tx^1 - Tx^2 \|_C &\leqslant \max_{|t-t_0| \leqslant h^*} \left| \int_{t_0}^{t} L_{P_0} \| x^1 - x^2 \|_c \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leqslant L_{P_0} \max_{|t-t_0| \leqslant h^*} \| x^1 - x^2 \|_c |t - t_0| \\ &\leqslant L_{P_0} h^* \| x^1 - x^2 \|_C.\end{aligned}$$

由(1.1.3) 可见, $L_{P_0} h^* < 1$. 因此, 由(1.1.5) 所定义的映射 T 是一压缩映射. 据压缩映射原理知其存在惟一的不动点. ▌

注 1　容易看出, 由(1.1.3)式所定义的 h 是为了保证映射 T 的像不会越出集合 D, 从而可以使用 Lipschitz 条件和压缩映像原理, 而 h^* 的引入是为了保证映射 T 是压缩的.

注 2　利用逐次逼近近似解序列的方法来证明存在惟一性定理, 所得到解的存在惟一区间是 $|t-t_0| \leqslant h$. 这里, 由于证明方法的限制, 所获得解的存在惟一区间仅为 $|t-t_0| \leqslant h^*$, 比上述区间可能更小一些. 下面我们即将看到, 由于解可以延拓, 这一差异是无关紧要的.

注 3　应当指出, 仅有 $f(t, x)$ 在 G 内连续的条件, 就足以保证解的存在性, 但却不能保证惟一; 关于 x 的 Lipschitz 条件保证解至多存在一个, 但却不保证其存在性. 有兴趣的读者可参阅文献[1].

当微分方程的右端依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}$ 时,Cauchy 问题的提法为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) \in G \subseteq R \times R^n \times R^m, \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0.\end{cases} \tag{1.1.6}$$

若 $\boldsymbol{f} \in C(G)$,且对给定的 $\boldsymbol{\mu}^0$,$\boldsymbol{f}$ 适合局部 Lipschitz 条件,则 Cauchy 问题(1.1.6) 在 $|t - t_0| \leqslant h^*$ 上存在惟一的解.其中 h^* 如(1.1.3) 所定义.

§1.2 解的延拓

在上节中我们知道,Cauchy 问题(1.1.1) 的解,至少在 $|t - t_0| \leqslant h^*$ 上存在.这一局部性的存在定理大大地限制了解的实用范围和理论研究.人们自然要问,对于给定的 Cauchy 问题,能否确定其解存在惟一的最大区间?下面将给予肯定回答.

假定定理 1.1 的条件成立,由定理 1.1 可知,Cauchy 问题(1.1.1) 的解将在区间 $|t - t_0| \leqslant h^*$ 上存在惟一.我们先将解向右延拓,令 $t_1 = t_0 + h^*$,$\boldsymbol{x}(t_0 + h^*) = \boldsymbol{x}^1$,易见 $P_1(t_0 + h^*, \boldsymbol{x}(t_0 + h^*)) \in G_0 \subset G$.由于 P_1 是 G 的内点,故必存在闭区域

$$G_1 = \{(t,\boldsymbol{x}) \mid |t - t_1| \leqslant a_1,\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^1\| \leqslant b_1\} \subset G,$$

使 $\boldsymbol{f}$ 在 G_1 上对 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件.从而再据定理 1.1,此方程过点 P_1 的解记作 $\boldsymbol{x}_1(t)$,它必在区间 $|t - t_1| \leqslant h_1^*$ 上存在惟一,其中 h_1^* 可类似于(1.1.3) 定义.据解的惟一性可知,在区间$[t_1 - h_1^*, t_1]$上,此方程过 P_1 的解 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 必与过 P_0 的解 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 重合(见图 1.1).

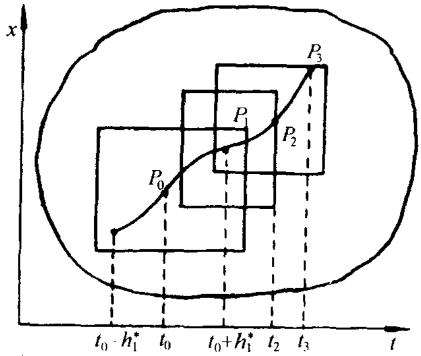

图 1.1

定义

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases}\boldsymbol{x}_0(t), & t \in [t_0 - h^*, t_0 + h^*], \\ \boldsymbol{x}_1(t), & t \in [t_1, t_2], t_2 = t_1 + h_1^*,\end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{x}(t)$ 就是 Cauchy 问题(1.1.1) 在区间$[t_0 - h^*, t_2]$上的惟一解.

由于$P_2(t_2, \boldsymbol{x}(t_2))$也是$G$的内点,故可依上法再向右延拓.同理,可将解从点$(t_0 - h^*, \boldsymbol{x}(t_0 - h^*))$ 向左延拓.如此继续,到双方都不能再延拓时为止.这时所得到的存在区间,称为**解的最大存在区间**,具有最大存在区间的解称为**饱和解**.容易看出,此最大存在区间必为开区间,记作(α, β).因为若一方

(例如 $t=\beta$) 为闭,则解必可从 $t=\beta$ 向右继续延拓. 我们当然希望知道解的两端点 $(\alpha, \boldsymbol{x}(\alpha))$, $(\beta, \boldsymbol{x}(\beta))$ 到底位于何处?下面的定理回答了这一问题.

定理 1.2　设 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在域 $G \subseteq R \times R^n$ 内连续有界,且对 x 满足局部 Lipschitz 条件,若 Cauchy 问题(1.1.1) 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的最大存在区间为 (α, β), α, β 为有限数,则

1) 极限 $\lim\limits_{t \to \alpha^+} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\alpha+0)$, $\lim\limits_{t \to \beta} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\beta-0)$ 存在;

2) 点 $(\alpha, \boldsymbol{x}(\alpha+0))$ 与 $(\beta, \boldsymbol{x}(\beta-0))$ 均在 G 的边界上.

证　1) 由 Cauchy 问题(1.1.1) 的等价积分方程

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad \alpha < t < \beta$$

可知①,

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x}(t_2) \| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau \right\| \\
&= \left\| \int_{t_2}^{t_1} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_2}^{t_1} \| \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) \| \mathrm{d}\tau \right| < M \mid t_1 - t_2 \mid,
\end{aligned}$$

其中 M 为 $\| f(t, \boldsymbol{x}) \|$ 的上界.

由于 β 为有限数,可见,当 $t_1, t_2 \to \beta^-$ 时,有 $\| \boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x}(t_2) \| \to 0$. 由 Cauchy 收敛准则得知极限 $\boldsymbol{x}(\beta-0)$ 存在. 同理可证 $\boldsymbol{x}(\alpha+0)$ 存在.

2) 若 $(\beta, \boldsymbol{x}(\beta-0))$ 不在 G 的边界上,必为 G 的内点. 从而可以由 $t=\beta-0$ 向右继续延拓. 与 (α, β) 为解的最大存在区间相矛盾. ▌

如果我们去掉 $\boldsymbol{f}$ 有界的假设,则可得如下定理.

定理 1.3　设 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in C(G \subseteq R \times R^n)$,且对 $\boldsymbol{x}$ 适合局部 Lipschitz 条件,则 Cauchy 问题(1.1.1) 的解可延拓到与 G 的**边界任意接近**(包括可能趋于无穷).

证　作有界区域 $G_n (n = 1, 2, \cdots)$,使 $(t_0, \boldsymbol{x}^0) \in G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots \subset G$, 且 $\overline{G}_n \subset G_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$, $G_n \to G$, 当 $n \to +\infty$ 时.

对于闭区域 $\overline{G}_1$,由于 $\boldsymbol{f}$ 在 $\overline{G}_1$ 上必有界,利用定理 1.2 可知,Cauchy 问题(1.1.1) 的解可向右延拓至 $\overline{G}_1$ 的某一边界点 P_1, $P_1 \in G_2$. 对闭区域 $\overline{G}_2$ 利用定理 1.2 可知,此解可继续由 P_1 向右延拓至 G_2 的某一边界点 P_2. 仿此类推,可得到点列 $\{P_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$. 由于当 $n \to +\infty$ 时 $G_n \to G$,故 $\{P_n\}$ 必可与 G 的边界任意接近. 同理可讨论向左延拓. ▌

注 1　$\{P_n\}$ 与边界 ∂G 任意接近,并不等于 $\{P_n\}$ 可趋向 ∂G 上某一点. 因

---

① 今后不另加声明,所论的范数均指欧氏范数.

为当 $n \to +\infty$ 时 $\{P_n\}$ 可能极限不存在,而无限振荡着向 ∂G 靠近. 在此意义下,定理 1.3 的结论比定理 1.2 弱.

注 2 当 G 为无界区域时,$\{P_n\}$ 可能趋于无穷,特别是有可能使解的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. 而定理 1.2 却限制 α 与 β 只能是有限值. 在此意义下,定理 1.3 的结论不能为定理 1.2 所包含.

本书的主要内容是研究微分方程的解的渐近性态,即当时间 t 趋向无穷时解的变化趋势及其特征. 因此,对于给定的微分方程,我们首先应该知道,它的解能否对 t 延拓到无穷?或者,在什么条件下才能对 t 延拓到无穷区间?

先考察区域 G 就是全空间 $R \times R^n$ 的情形. 如果 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在全空间 $R \times R^n$ 连续且满足局部 Lipschitz 条件,则由定理 1.3 知,Cauchy 问题(1.1.1) 的解必可以延拓至无穷远. 但这并不意味解关于时间 t 可以无限延拓,因为也可能是当 t 趋向有限值时 $\| \boldsymbol{x}(t) \| \to +\infty$. 不难看出,如果加上解有界这一条件,那么便保证了 t 可无限延拓. 然而把假设条件加在未知的解上一般来说是不合适的,或者只有理论上的价值. 为保证解的有界性,我们有以下定理.

定理 1.4 设 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在全空间 $R \times R^n$ 连续、有界,且对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件,则 Cauchy 问题(1.1.1) 解的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.

证 由定理 1.3 可知,解可延拓到与 $R \times R^n$ 的边界任意接近,即可延伸至无穷. 故要保证可关于 t 无限延拓只须证明在定理的条件下,其解在任一有限区间上均有界. 事实上,由于

$$\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^0 \| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \| \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}) \| \mathrm{d}\tau \right| \leqslant M \mid t - t_0 \mid,$$

这一结论是显然的. ▌

要求 $\boldsymbol{f}$ 在全空间有界这一条件对上述结论是太强了. 为了减弱条件,我们先证明一个著名的引理,它在今后将多次用到.

Gronwall 引理 设一元函数 $g(t)$ 与 $\varphi(t)$ 均在区间 $[t_0, t_1]$ 上连续,$g(t) \geqslant 0$,常数 $\lambda \geqslant 0, r \geqslant 0$. 若

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r] \mathrm{d}\tau, \tag{1.2.1}$$

则

$$\varphi(t) \leqslant (\lambda + rT) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\tau) \mathrm{d}\tau \right), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, T = t_1 - t_0. \tag{1.2.2}$$

证 这一引理实际上是对积分不等式(1.2.1)的求解. 我们希望把积分不等式(1.2.1)化为相对应的微分不等式来研究. 但是,若对不等式的两端求导,不等号不一定能保持. 我们通过等式来过渡. 为此令

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$$\psi(t)=\lambda+\int_{t_0}^{t}[g(\tau)\varphi(\tau)+r]\mathrm{d}\tau. \tag{1.2.3}$$

两端对 t 求导得

$$\dot{\psi}(t)=g(t)\varphi(t)+r. \tag{1.2.4}$$

由(1.2.1)可见

$$\varphi(t)\leqslant\psi(t),$$

代入(1.2.4) 式得

$$\dot{\psi}(t)-g(t)\psi(t)\leqslant r.$$

两端乘以积分因子 $\exp\left(-\int_{t_0}^{t}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$,得

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)[\dot{\psi}(t)-g(t)\psi(t)]\leqslant r\exp\left(-\int_{t_0}^{t}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\leqslant r,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi\exp\left(\int_{t_0}^{t}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right)\leqslant r.$$

两端分别由 t_0 到 t 积分得

$$\psi(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)-\psi(t_0)\leqslant r(t-t_0)\leqslant rT.$$

由(1.2.3) 式可见 $\lambda=\psi(t_0)$,从而有

$$\varphi(t)\leqslant\psi(t)\leqslant(\lambda+rT)\exp\left(\int_{t_0}^{t}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \qquad \blacksquare$$

定理 1.5　设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在全空间 $R\times R^n$ 连续,对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件,且

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|\leqslant N\|\boldsymbol{x}\|,\quad N\text{ 为一正常数},$$

则 $\forall(t_0,\boldsymbol{x}^0)\in R\times R^n$,Cauchy 问题(1.1.1) 的解的存在区间均为$(-\infty,+\infty)$.

证　仿照定理 1.4,我们只须证明在任一有限区间上,Cauchy 问题(1.1.1) 的解都是有界的.假设存在有限数 $b>t_0$,使得解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在$[t_0,b)$ 上无界.当 $t\in[t_0,b)$ 时,有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|&\leqslant\|\boldsymbol{x}^0\|+\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))\|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\|\boldsymbol{x}^0\|+\int_{t_0}^{t}N\|\boldsymbol{x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

应用 Gronwall 引理,注意到此时 $r=0$,便得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}^0\|\exp\left(\int_{t_0}^{t}N\mathrm{d}\tau\right)=\|\boldsymbol{x}^0\|\mathrm{e}^{N(t-t_0)}\leqslant\|\boldsymbol{x}^0\|\mathrm{e}^{N(b-t_0)}.$$

与 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[t_0,b)$ 上无界矛盾.所以解向右对 t 可延拓至 $+\infty$,同理可证向左延拓至 $-\infty$. ▌

如果 $\boldsymbol{f}$ 的定义域不是全空间而是 $G=R\times D, D\subset R^n$,那么定理 1.4 和 1.5 均不能保证解关于 t 可无限延拓,因为解有可能在有限时刻到达 D 的边界.这时我们有以下定理.

定理 1.6 设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 $G=R\times D, D\subseteq R^n$ 内连续,有界且满足局部 Lipschitz 条件.若 Cauchy 问题(1.1.1)的解的几何长度无限,则此解的存在区间必为 $(-\infty,+\infty)$.

证 设 $S(t)$ 是解所表示的曲线的弧长函数,$S(t_0)=0$.由弧微分公式可知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2(t)}\mathrm{d}t = \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|\mathrm{d}t \\
&= \|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))\|\mathrm{d}t \leqslant M\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中 M 是 $\|\boldsymbol{f}(t,x)\|$ 的上界.两端分别从 t_0 到 $t(t>t_0)$ 积分得

$$S(t)\leqslant M(t-t_0).$$

由于 $S(t)$ 无限,所以必有 $t\to+\infty$.同理可证 $t\to-\infty$. ▌

如前所述,这里把几何长度无限的条件加在未知函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 上只有其理论上的价值.但在定理 2.2 中我们即将看到,由此我们可以得出一个十分有用的重要结论.

例 1 考察 Cauchy 问题

$$
\begin{cases}
\dot{x}=1+x^2, & -\infty<x<+\infty,\\
x(0)=0
\end{cases}
$$

的解的最大存在区间.

解 此解可直接解得

$$x=\tan t,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$$

我们看到,虽然 $f(x)=1+x^2$ 在全空间 R 连续,但所给 Cauchy 问题的解并不能对 t 无限延拓,而其最大存在区间为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.显见,$f(x)=1+x^2$ 在 R 并非有界. ▌

例 2 考察 Cauchy 问题

$$
\begin{cases}
\dot{x}=\sqrt{1+x^2}, & |x|<+\infty,\\
x(0)=0
\end{cases}
$$

的解的最大存在区间.

解 直接求解得

$$x=\mathrm{sh}t,\quad |t|<+\infty.$$

这里 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 在全空间 R 仍是无界的，但所给 Cauchy 问题的解的存在区间却是$(-\infty,+\infty)$. 可见上述定理的条件只是充分的. ▍

例 3　考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}=x, & |x|\leqslant 1,\\ x(t_0)=x_0>0\end{cases}$$

的解的最大存在区间.

解　求解得

$$x=x_0\mathrm{e}^{t-t_0}.$$

由于 $f(x)$ 仅在 $|x|\leqslant 1$ 上定义，所以有

$$|x_0|\mathrm{e}^{t-t_0}\leqslant 1.$$

从而

$$-\infty<t<t_0-\ln|x_0|.$$

我们看到，虽然 $f(x)=x$ 在其定义域 $|x|\leqslant 1$ 上连续有界，但由于此定义域不是全空间 R，故未能保证解向右无限延拓. ▍

例 4　证明方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t^2+x^2 \tag{1.2.5}$$

的任一解的存在区间都是有限的.

证　方程(1.2.5)虽然形式简单，但它的解却无法用初等函数表出. 容易看出，对于 $\forall\, p_0(t_0,x_0)\in R\times R$，(1.2.5)过 p_0 的解均存在惟一，而且均可伸延至无穷. 但这并不意味解关于 t 可以无限延拓. 事实上可以证明它的存在区间有限.

设 $x=x(t)$ 是(1.2.5)适合初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解. 令其右方的最大存在区间为$[t_0,b)$. 若 $b<0$，则存在区间显然有限. 若 $b>0$，取 t_1 适合 $0<t_1<b$，则在$[t_1,b)$上有

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\geqslant t_1^2+x^2(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{t_1^2+x^2}\geqslant \mathrm{d}t,\qquad t_1\leqslant t<b,$$

两端从 t_1 到 t 积分得

$$\frac{1}{t_1}\left[\arctan\frac{x(t)}{t_1}-\arctan\frac{x(t_1)}{t_1}\right]\geqslant t-t_1.$$

由此可知

$$0\leqslant t-t_1\leqslant\frac{\pi}{t_1},\quad t_1\leqslant t<b.$$

因此,解的右方最大存在区间有限.

同理可证左方最大存在区间也是有限的. ▌

§1.3 解对初值和参数的连续依赖性和可微性

微分方程和初始条件是对客观实际问题的抽象描述.在抽象过程中,无论是初值、参数或微分方程本身都难免出现微小的误差,我们当然希望对于所建立的微分方程,当上述误差很小时,其解的改变也很小.否则,所求的解就将失去应用价值.这就是本节所研究问题的重要意义.

定理 1.7(解对初值的连续依赖性) 设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在域 $G\subseteq R\times R^n$ 内连续,满足局部 Lipschitz 条件,$(t_0,\boldsymbol{x}^0)\in G$.并设有界闭区间 $[a,b]$ 为 Cauchy 问题(1.1.1)的解的一个存在区间,则其解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}^0)$ 在区间 $[a,b]$ 上是初值 $(t_0,\boldsymbol{x}^0)$ 的连续函数.

证 为了证明的需要,首先我们来构造一个解曲线段:$C\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}^0)\mid a\leqslant t\leqslant b\}$ 的邻域 $U\subset G$,使得 $\forall(t,\boldsymbol{x}^1),(t,\boldsymbol{x}^2)\in U$,$\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的 Lipschitz 条件满足且有共同的 Lipschitz 常数 L.事实上,对于曲线段 C 上任一点 P_i 必存在一 $n+1$ 维空间的球形邻域 $U_i(\overline{U}_i\subset G)$,使在 U_i 内 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的局部 Lipschitz 条件成立,其 Lipschitz 常数记作 L_{P_i}.由于 C 是一有界闭集,由有限覆盖定理可知,存在有限个球形邻域 $U_i(i=1,2,\cdots,m)$ 将曲线段 C 覆盖.取 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_i$,且 $L=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}L_{p_i}$,容易看出 $\overline{D}\subset G$ 且 $\forall(t,\boldsymbol{x}^1)(t,\boldsymbol{x}^2)\in D$,Lipschitz 条件

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^2)\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^2\| \tag{1.3.1}$$

成立.设 D 的边界集合与集合 C 的距离为 d,显然以 C 上每点为中心,d 为半径的所有 $n+1$ 维开球形域全体的并构成的区域 $D_0\subseteq D$(图 1.2).

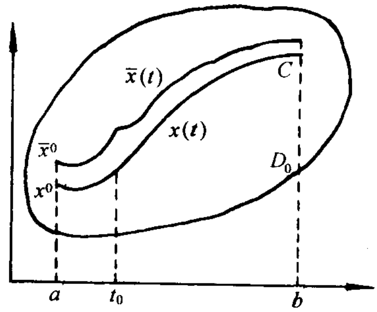

图 1.2

现在我们来证明解对初值的连续性.设过初始点 $(t_0,\boldsymbol{x}^0)$ 与 $(\bar{t}_0,\bar{\boldsymbol{x}}^0)$ 的解分别为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}^0)$ 与 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}(t;\bar{t}_0,\bar{\boldsymbol{x}}^0)$,即要证 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<d$),$\exists\delta(\varepsilon)>0$ 使得只要 $|t_0-\bar{t}_0|<\delta$,$\|\boldsymbol{x}^0-\bar{\boldsymbol{x}}^0\|<\delta$ 解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\bar{t}_0,\bar{\boldsymbol{x}}^0)$ 必在区间 $[a,b]$ 上存在,而且有

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}^0)-\boldsymbol{x}(t;\bar{t}_0,\bar{\boldsymbol{x}}^0)\|<\varepsilon \tag{1.3.2}$$

成立. 易见两个解 x 与 $\bar{x}$ 都位于区域 D_0 时有

$$\begin{aligned}
&\| x - \bar{x} \| \\
&= \| (x^0 - \bar{x}^0) + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau; t_0, x^0) - f(\tau, \bar{x}(\tau; \bar{t}_0, x^0))] d\tau \\
&\quad - \int_{\bar{t}_0}^{t_0} f(\tau, \bar{x}(\tau; \bar{t}_0, x^0) d\tau \| \\
&\leqslant \| x^0 - \bar{x}^0 \| + \int_{t_0}^{t} L \| x - \bar{x} \| d\tau + M | t_0 - \bar{t}_0 | \\
&\leqslant \delta(1 + M) + \int_{t_0}^{t} L \| x - \bar{x} \| d\tau, \quad t \geqslant t_0.
\end{aligned}$$

其中 $M \geqslant \| f(t, x(t; \bar{t}_0, \bar{x}^0)) \|, t \in [t_0, \bar{t}_0]$(或$[\bar{t}_0, t_0]$), $T = | t_0 - \bar{t}_0 |$.

据 Gronwall 引理可得

$$\| x - \bar{x} \| \leqslant \delta(1 + M) \exp\left(\int_{t_0}^{t} L d\tau \right) \leqslant \delta(1 + M) e^{L(b-a)}, \tag{1.3.3}$$

由(1.3.2) 式不难看出, 只要选取

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2(1 + M)} e^{-L(b-a)}, \tag{1.3.4}$$

则当 $| t_0 - \bar{t}_0 | < \delta$, $\| x^0 - \bar{x}^0 \| < \delta$ 时, 过初始点$(\bar{t}_0, \bar{x}^0)$的解 $\bar{x} = x(t; \bar{t}_0, \bar{x}^0)$ 必满足不等式 $\| x - \bar{x} \| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{d}{2}$. 由此立即可知, 解 $\bar{x}$ 也必在$[a, b]$上存在. 因为如果 $\bar{x}$ 仅在区间$[\bar{a}, \bar{b}]$上存在, $\bar{a} > a$, $\bar{b} < b$, 则在区间$[\bar{a}, \bar{b}]$上重复(1.3.3) 式导出的过程可得 $\| x - \bar{x} \| < \frac{d}{2}$, $\bar{a} \leqslant t \leqslant \bar{b}$, 从而可知解曲线 $x(t; \bar{t}_0, \bar{x}^0)$ 上的点$(\bar{a}, x(\bar{a}; \bar{t}_0, \bar{x}^0))$与$(\bar{b}, x(\bar{b}; \bar{t}_0, \bar{x}^0))$均必位于 D_0 内部, 所以还可以进一步延拓.

于是, 当(1.3.4) 成立时, 即有(1.3.2) 在区间$[a, b]$上成立. ▌

注 应当强调指出, 解对初值的连续性仅对有限区间才能成立. 读者不难看到有限区间$[a, b]$在证明中的重要作用. 如果在无限区间内研究相应的问题, 需要另加条件. 这是本书第三章稳定性所讨论的主题.

定理 1.8(解对方程右端函数的连续依赖性) 设 $f(t, x)$ 满足定理 1.7 的条件, 则在区间$[a, b]$上, Cauchy 问题(1.1.1) 的解将随方程的右端函数 $f(t, x)$ 而连续变化.

证 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases}$$

其中 f 与 g 在 $G \subseteq R \times R^n$ 连续, 且均满足局部 Lipschitz 条件. g 是方程右端扰动所产生的项, $\| g \| < \delta \ll 1$, $(t, x) \in G$. 设此两 Cauchy 问题的解分别为

$x(t)$与$\bar{x}(t)$,它们均在区间$[a,b]\subset G$内存在①. $\forall\varepsilon>0$,我们来求$\delta(\varepsilon)>0$使得只要$\|g\|<\delta$便有$\|x-\bar{x}\|<\varepsilon$成立.事实上,利用两Cauchy问题所对应的积分方程,可得②$(t>t_0)$

$$\begin{aligned}\|\bar{x}-x\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}[f(\tau,\bar{x})-f(\tau,x)]\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}[g(\tau,\bar{x})]\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leqslant L\int_{t_0}^{t}\|\bar{x}-x\|\mathrm{d}\tau+\delta(t-t_0) \\ &\leqslant L\int_{t_0}^{t}\|\bar{x}-x\|\mathrm{d}\tau+\delta(b-a).\end{aligned}$$

应用Gronwall引理得

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant\delta(b-a)\mathrm{e}^{L(t-t_0)}\leqslant\delta(b-a)\mathrm{e}^{L(b-a)}.$$

可见,只要选取

$$\delta<\frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{e}^{-L(b-a)},$$

则当$\|g\|<\delta$时便有$\|\bar{x}-x\|<\varepsilon$. ▌

定理 1.9(解对参数的连续依赖性) 考察Cauchy问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x,\mu),\\ x(t_0)=x^0.\end{cases}\tag{1.3.5}$$

若f关于t,x,μ在域$G\subseteq R\times R^n\times R^m$内连续,对$x$满足局部Lipschitz条件,并设对于给定的$\mu^0$,(1.3.5)的解在闭区间$[a,b]$存在.则对使$\|\mu-\mu^0\|\ll 1$的$\mu$,(1.3.5)的解仍在$[a,b]$上存在,而且对$\mu$连续.

证 此定理的结论可以直接由定理1.8得出.为此,将(1.3.5)中的方程改写为

$$\dot{x}=f(t,x,\mu^0)+[f(t,x,\mu)-f(t,x,\mu^0)].$$

记

$$g(t,x,\mu)=f(t,x,\mu)-f(t,x,\mu^0),$$

由于f关于μ连续,故当$\|\mu-\mu^0\|\ll 1$时$\|g\|\ll 1$,再应用定理1.8便得解对μ连续的结论. ▌

关于解对初值和参数的可微性,在本书中用得不多,我们仅列出结论,其证明可参阅文献[2,3].

定理 1.10(解对初值和参数的可微性) 设$f(t,x,\mu)$对t是$r-1$次连续可微,对x和μ是r次连续可微,则Cauchy问题(1.3.5)的解$x=x(t,t_0,x^0,\mu)$对t,t_0,x^0,μ而言是r次连续可微的.

---

① 严格说来,$x(t)$的存在区间$[a,b]$是假设,仿照定理1.7的证明可知,只要$\|g\|\ll 1$,$\bar{x}(t)$也必在$[a,b]$存在.

② 与定理1.7同理,可得到共同的Lipschitz常数L.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com