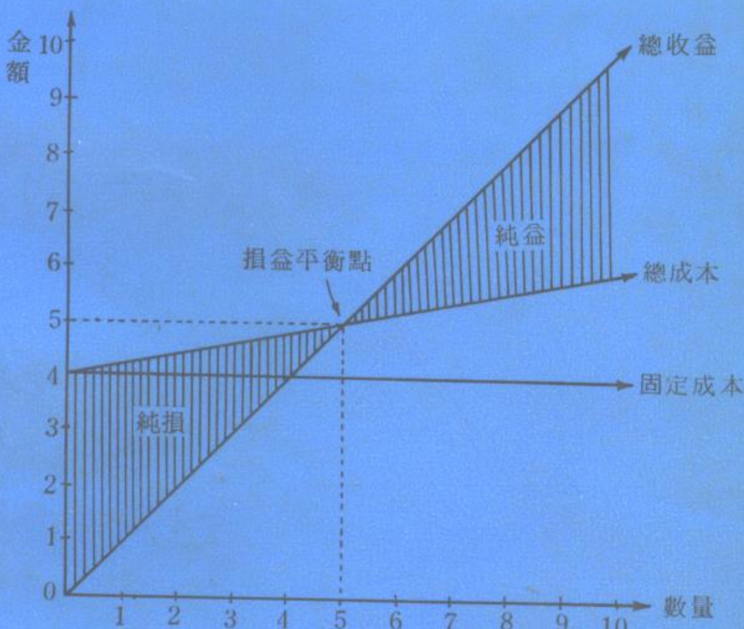
大 學 用 書

管理數學

管理碩士 楊容昌 編著



大中國圖書公司印行

編著者：楊蓉昌

發行人：薛瑜

出版者
印刷者：大中國圖書公司

台北市重慶南路一段66號

電話:3111487 郵撥:2619號

登記證：局版臺業字第0653號

中華民國七十一年六月初版

基本定價四元五角

編號：527

序

近年來，政府機構及工商企業在充滿競爭的經營環境中，所面臨的管理決策問題越來越繁雜；所以對管理決策和計劃之擬定便不能單憑經驗和臆斷，必須運用可靠的計量資料及計量方法，以求減少決策實施後可能發生的風險。自二次大戰以來，世界各國學術機構紛紛應用科學的、數學的或邏輯的方法，幫助企業決策者克服其所面臨的困難問題。因而，有遠見的決策主管必須要能與時俱進，才能「運籌帷幄，決勝千里」，在同業中取得有利的競爭地位，而爲其所領導的企業組織或團體謀生存、求發展。

筆者從事管理課程教學工作多年，現將講稿整理成書，並參閱國內外有關著作，以簡明之數學式子，介紹計量管理理論及應用方法。除可作大專院校「管理數學」、「作業研究」等課程的教材外，對各企業機構的生產政策、經營管理以及成本控制等亦可提供管理決策者作爲參考書籍。

本書的內容採理論與應用並重，爲使讀者融會貫通，理論部份均給予簡明的證明，復以例題配合解說其應用方法，並搜集實際管理問題做爲習題，讀者如能多做習題必能駕輕就熟解決管理問題。全書共十八章，可做大專院校一學年的教材。

本書倉促付梓，疏誤之處在所難免，尚祈管理學者、企業先進，不吝賜教，多所匡正是幸。

一九八二年五月

楊　蓉　昌　謹誌

管 理 數 學

目 次

管 理 數 學

第一章 基本數學

1-1 數的定義

無論在日常生活上或科學應用上，吾人所使用的各種數的種類可以下圖加以區分：

- 數
  - 虛數
  - 實數
    - 無理數
    - 有理數
      - 分數
      - 整數
        - 正整數
        - 零
        - 負整數

各種數的定義如下：

(1) **負整數**（Negative integers）：就是任何小於零的整數，而當加上它的正量時變為零。

(2) **零**（zero）：是一個特別的數，任何數加上零等於原來的數。

(3) **正整數**（Positive integers）：又稱為自然數，任何自然數都可由"1"開始，逐次加1而得。

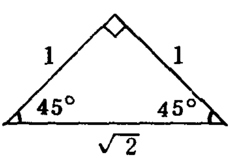
(4) **整數**（Integers）：是負整數、零和正整數的通稱。

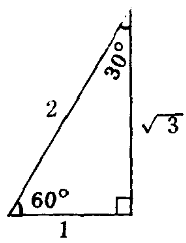
(5) **分數**（Fractions）：是兩個整數之商，但分母不為零或1。

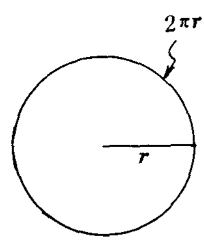
(6) **有理數**（Rational Number）：是所有整數和分數的通稱，它

一定可以寫成分數 $\frac{b}{a}$ ，而 b 是整數，a 是不為零的整數，當 $a=1$ 時，便是一個整數。

(7) **無理數**（Irrational Numbers）：是不能用整數或分數來表示的數，或者不能寫成兩個整數比的數，例如 $\frac{1}{7}=0.142857$ ……和 $\frac{1}{13}=0.076923$ ……等循環小數均是有理數；但 $\pi=3.14159265$ ……和 $e=2.718281$ ……等非循環小數，其正確值是永遠找不到的，也無法寫成兩個整數比，故均為無理數；無理數絕對不是沒有理由的數，因其事實上都存在且可以用圖形表示出來，只是其正確值無論算到什麼數位都是不可能的。例如等腰直角三角形，邊長是 1，其斜邊長度是 $\sqrt{2}$；直角三角形，如斜邊及某邊長是 2 和 1，則其另一邊長是 $\sqrt{3}$；圓的周長是直徑的 π 倍；均無法精確獲得其數值，但其絕對存在。$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 和圓周長都是無理數。







(8) **虛數**（Imaginery Numbers）：是一個負數的平方根，若是去取一個虛數的平方，我們會得一個負數；通常我們令 $\sqrt{-1}=i$，故 $\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,i$，$\sqrt{-4}=2i$，$(\sqrt{-a})^2=-a$；在工程科學及高等數學，虛數佔著很重要的地位。

(9) **實數**（Real Number）：為有理數和無理數的通稱，是任何不為虛數的數。

〔**例 1**〕 ① $-\frac{5}{7}$（實數，有理數及分數）

② $\sqrt{2}$（實數及無理數）

③ $\sqrt{-9}$（虛數）

④ $\sqrt{-5}$（虛數）

⑤ -5（實數、有理數、整數及負整數）

⑥ $\sqrt{5}$（實數及無理數）

1-2　實數公理與絕對值

1. 加法公理

(a) 交換律：$a+b=b+a$

(b) 結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$

(c) 同一律：$a+0=a$

(d) 自反律：$x=x$

(e) 對稱律：若 $x=y$，則 $y=x$

(f) 遞移律：若 $a=b$，$b=c$，則 $a=c$

(g) 逆算律：$a+(-a)=0$

2. 乘法公理

(a) 交換律：$a\times b=b\times a$

(b) 結合律：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)=(a\times c)\times b$

(c) 同一律：$a\times 1=a$

(d) 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

(e) 逆算律：$a\times\frac{1}{a}=1$

3. 不等量公理

(a) $a>b$，則 $a+c<b+c$

(b) $a<b$，$c>0$，則 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

(c) $a<b$，$c<0$，則 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

(d) $a<b$，則 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

(e) $a<b$，$a>0$，$b>0$，$n>0$，則 $a^n<b^n$，
$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

4. 絕對值

任一數之絕對值以 $|x|$ 表示，乃指 x 與原點的距離。

若 $x\geq 0$，則 $|x|=x$

$x<0$，則 $|x|=-x$

因此，任意一個實數的絕對值均非負，即 $|x|\geq 0$。

〔**例2**〕 ① $|-5|=5$ ② $|7|=7$

③ $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ ④ $|3-7|=|-4|=4$

⑤ $|8-6|=|2|=2$

⑥ $|x|<5$ 表示 x 與原點的距離小於5，即 $-5<x<5$

1-3 指數與對數

1. 指數

設 a 爲任意實數，a 自乘 n 次，用 a^n 來表示，其中 n 即稱爲 a 的指數。指數法則如下：

(a) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

(b) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

(c) $(a^m)^n=a^{mn}$

(d) $(ab)^n=a^nb^n$

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

(f)　$a^0=1$（但 $a \neq 0$）

$$\text{因爲}\begin{cases} a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 \\ a^m \div a^m = 1 \end{cases}$$

(g)　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

$$\text{因爲}\begin{cases} a^m \div a^{m+k} = a^{m-(m+k)} = a^{-k} \\ a^m \div a^{m+k} = \dfrac{a^m}{a^{m+k}} = \dfrac{a^m}{a^m \cdot a^k} = \dfrac{1}{a^k} \end{cases}$$

(h)　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$（但 $a>0$）

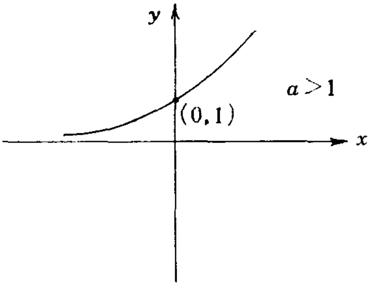
因爲 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$，也就是說 $a^{\frac{1}{n}}$ 的 n 次方得 a，因此 $a^{\frac{1}{n}}$ 可以當作 a 的 n 次方根。如 $a<0$ 則有下列不合理現象，故此法則必須 $a>0$。

$$-1=(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1$$

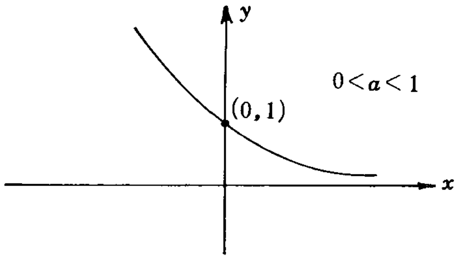
指數函數 $y=a^x$ 的性質如下：

(a)　當 $a=1$ 時，爲常數函數 $y=1$。

(b)　當 $a>1$ 時，爲遞增函數，當 x 趨近於∞時，y 亦趨近於∞；x 趨近於 $-\infty$ 時，y 趨近於 0。當 $x=0$ 時，$y=1$。



(c)　當 $0<a<1$ 時，爲遞減函數，當 x 趨近於∞時，y 趨近於 0；x 趨近於 $-\infty$ 時，y 趨近於∞。當 $x=0$ 時，$y=1$。



〔例3〕 ① $x^4 \cdot x^2 \cdot x^6 = x^{4+2+6} = x^{12}$

② $3a^3 \cdot 2a^4 = 6a^{3+4} = 6a^7$

③ $(-2)^2 \cdot (-2)^6 = (-2)^{2+6} = (-2)^8 = 256$

④ $\dfrac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$

⑤ $\dfrac{a^2b^3}{ab} = a^{2-1} \cdot b^{3-1} = ab^2$

⑥ $a^0 + (a+2b)^0 = 1+1 = 2$

⑦ $(80^{-2})^{\frac{1}{2}} = (80)^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 80^{-1} = \dfrac{1}{80}$

⑧ $\dfrac{\sqrt{ab^3}}{\sqrt[3]{a^2b}} = \dfrac{(ab^3)^{\frac{1}{2}}}{(a^2b)^{1/3}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{2/3}b^{1/3}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}$

$$= a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{7}{6}} = a^{-\frac{1}{6}}b\,b^{\frac{1}{6}} = b\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$$

2. 對數

設 a 爲不等於 1 的正數，對於正數 x，有一個可滿足 $a^y = x$ 中的 y 值與其對應，此 y 值稱爲以 a 爲底的對數，可用下式表示之：

$$y = \log_a x$$

x 稱之爲眞數

對數法則如下：

(a) $\log_a 1 = 0$（因 $a^0 = 1$）

(b)　$\log_a a = 1$（因 $a^1 = 1$）

(c)　$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

因爲如令　$\log_a m = p$，$\log_a n = q$

$a^p = m$，　$a^q = n$

$m \cdot n = a^{p+q}$

$\therefore$　$\log_a(m \cdot n) = p + q = \log_a m + \log_a n$

(d)　$\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

因爲如令　$\log_a m = p$，$\log_a n = q$

$\therefore a^p = m$，　$a^q = n$

$\dfrac{m}{n} = a^{p-q}$

$\therefore$　$\log_a \dfrac{m}{n} = p - q = \log_a m - \log_a n$

(e)　$\log_a m^n = n \log_a m$

因爲如令　$\log_a m = p$，

$a^p = m$

$a^{np} = m^n$

$\therefore$　$\log_a m^n = np = n \log_a m$

(f)　$\log_a m = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}$　（稱爲底的變換公式）

因爲令　$a^p = m$，　$\log_a m = p$

$\log_b a^p = \log_b m$

$p \log_b a = \log_b m$

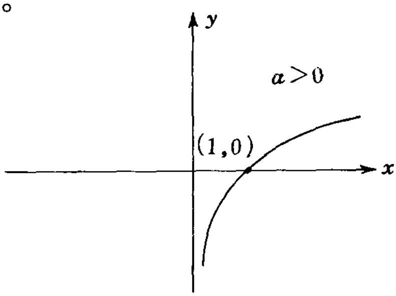
$p = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}$

$\therefore$　$\log_a m = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}$

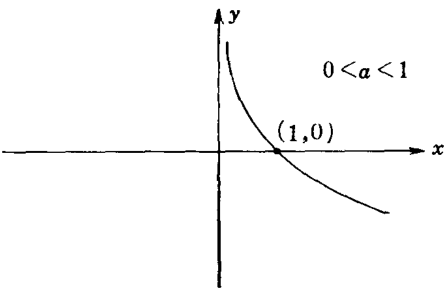
對數函數 $y=\log_a x$ 的性質如下：

(a) 當 $a=1$ 時，爲常數函數 $x=1$

(b) 當 $a>1$ 時，爲遞增函數，當 x 漸增，y 亦增；當 $x=1$ 時，$y=0$；當 $x<1$ 時，y 爲負值；當 x 趨近於零時，y 爲 $-\infty$。



(c) 當 $0<a<1$ 時；爲遞減函數，當 x 漸增，y 漸減；當 $x=1$ 時，$y=0$；當 $x>1$ 時，y 爲負值；當 x 趨近於零時，y 爲 ∞。



對數一般分爲兩種，一爲以 10 爲底的一般對數（Common Logarithms），一爲以 $e=2.71828\cdots\cdots$ 爲底的自然對數（Nature Logarithms）。若以指數式來對照，一般對數的關係式可寫成：

$$10^3=1000\ ,\quad \log_{10}10^3=3$$

$$10^2=100\ ,\quad \log_{10}10^2=2$$

$$10^1=10\ ,\quad \log_{10}10=1$$

$$10^0 = 1 \quad , \quad \log_{10} 1 = 0$$

$$10^{-1} = 0.1 \quad , \quad \log_{10} 0.1 = -1$$

$$10^{-2} = 0.01 \quad , \quad \log_{10} 0.01 = -2$$

$$10^{-3} = 0.001 \quad , \quad \log_{10} 0.001 = -3$$

以 e 爲底的自然對數，以符號 ln 來表示，卽 $\log_e = ln$ ；如指數式 $x = e^y$ ，則其自然對數關係式爲 $y = ln\,x$ 。

〔例4〕 ① $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

② $\log_5 1 = 0$

③ $\log_{10} 10^{3.5} = 3.5$

④ 若 $\log a = 0.3$ ， $\log b = 2.8$ ， $\log c = 1.7$

則 $$\log \frac{a^3 b^{\frac{1}{2}}}{c} = \log a^3 + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c$$

$$= 3\log a + \frac{1}{2}\log b - \log c$$

$$= 3(0.3) + \frac{1}{2}(2.8) - 1.7$$

$$= 0.6$$

〔例5〕 試解下述方程式 x 之值：

$$2\log_2 x + \log_2 (x-1) = 3\log_2 x - 3$$

〔解〕 $$2\log_2 x + \log_2 (x-1) = 3\log_2 x - 3$$

$$\log_2 x^2 (x-1) = 3\log_2 x - \log_2 8$$

$$\log_2 x^2 (x-1) = \log_2 \frac{x^3}{8}$$

$$x^2 (x-1) = \frac{x^3}{8}$$

$$8x^3 - 8x^2 = x^3$$