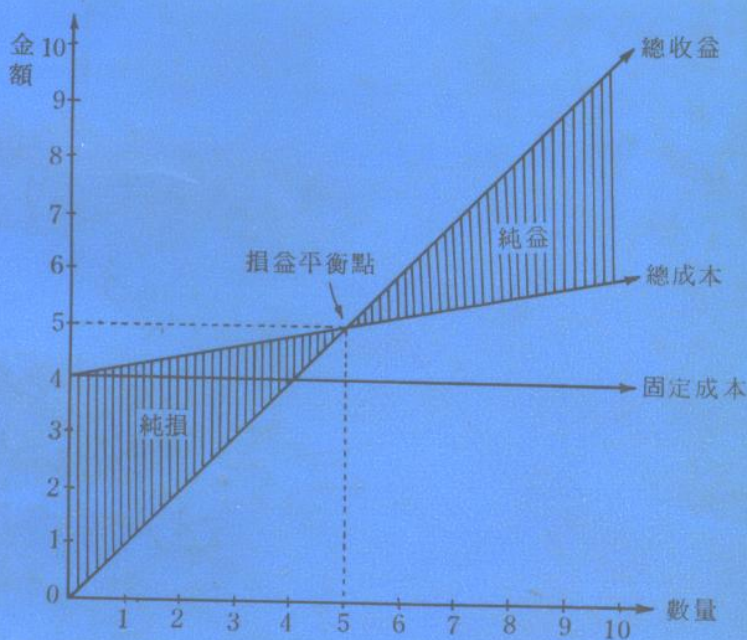


大學用書

管理數學

管理碩士 楊容昌 編著



大中國圖書公司印行



版權所有・翻印必究

編著者：楊 蓉 昌
發行人：薛 瑜
出版者：大中國圖書公司
印刷者：

台北市重慶南路一段66號

電話：3111487 郵撥：2619號

登記證：局版臺業字第0653號

中華民國七十一年六月初版

基本定價四元五角

編號：527

序

近年來，政府機構及工商企業在充滿競爭的經營環境中，所面臨的管理決策問題越來越繁雜；所以對管理決策和計劃之擬定便不能單憑經驗和臆斷，必須運用可靠的計量資料及計量方法，以求減少決策實施後可能發生的風險。自二次大戰以來，世界各國學術機構紛紛應用科學的、數學的或邏輯的方法，幫助企業決策者克服其所面臨的困難問題。因而，有遠見的決策主管必須要能與時俱進，才能「運籌帷幄，決勝千里」，在同業中取得有利的競爭地位，而為其所領導的企業組織或團體謀生存、求發展。

筆者從事管理課程教學工作多年，現將講稿整理成書，並參閱國內外有關著作，以簡明之數學式子，介紹計量管理理論及應用方法。除可作大專院校「管理數學」、「作業研究」等課程的教材外，對各企業機構的生產政策、經營管理以及成本控制等亦可提供管理決策者作為參考書籍。

本書的內容採理論與應用並重，為使讀者融會貫通，理論部份均給予簡明的證明，復以例題配合解說其應用方法，並搜集實際管理問題做為習題，讀者如能多做習題必能駕輕就熟解決管理問題。全書共十八章，可做大專院校一學年的教材。

本書倉促付梓，疏誤之處在所難免，尚祈管理學者、企業先進，不吝賜教，多所匡正是幸。

一九八二年五月

楊 蓉 昌 謹誌

管 理 數 學

目 次

第一章	基本數學	1
1-1	數的定義	1
1-2	實數公理與絕對值	3
1-3	指數與對數	4
第二章	集合論	13
2-1	集合的定義	13
2-2	集合的表示法	14
2-3	集合的種類	15
2-4	集合的應用	17
第三章	直線方程式	25
3-1	平面上的座標系	25
3-2	平面上兩點間距離	26
3-3	斜 率	28
3-4	直線方程式的求法	29
3-5	直線方程式的應用	33

第四章 曲線方程式	39
4-1 圓的方程式	39
4-2 拋物線的方程式	40
4-3 曲線方程式的應用	43
第五章 矩陣與行列式	47
5-1 矩陣的意義	47
5-2 矩陣的加減運算	48
5-3 矩陣的乘法運算	50
5-4 反矩陣	54
5-5 行列式	60
5-6 行列式求反矩陣	68
第六章 微 分	77
6-1 函數變量的觀念	77
6-2 導函數	78
6-3 導函數的求法	80
6-4 極大值與極小值	87
6-5 導函數的應用	91
第七章 積 分	97
7-1 反導函數	97
7-2 積分的意義	97
7-3 積分的求法	101
7-4 積分的面積意義	105

7-5	積分的應用	106
第八章	生產理論與成本結構	113
8-1	平均產量與邊際產量	113
8-2	平均成本與邊際成本	117
8-3	平均收益與邊際收益	119
8-4	最適產量與價格的決定	120
第九章	線性規劃理論	125
9-1	線性規劃的意義	125
9-2	圖解法	127
9-3	單形法	132
9-4	線性規劃的對偶解法	150
9-5	對偶函數的意義與靈敏度分析	154
第十章	對局理論	171
10-1	對局理論的意義	171
10-2	兩人零和對局	172
10-3	兩人非零和對局	187
10-4	局部對局解法	188
10-5	圖解法	191
10-6	線性規劃法	196
第十一章	損益平衡分析	217
11-1	損益平衡分析的意義	217
11-2	損益平衡分析的數學模式	220

11-3	損益平衡分析的功用	222
11-4	價格發生變化時的分析	226
11-5	變動成本發生變化時的分析	230
11-6	固定成本發生變化時的分析	233
第十二章	動態規劃理論	237
12-1	動態規劃的意義	237
12-2	不確定情況下的動態規劃	249
12-3	動態規劃的報酬函數	252
第十三章	存貨控制理論	259
13-1	存貨的意義	259
13-2	一次訂貨的存貨問題	259
13-3	多次訂貨的存貨問題	266
13-4	敏感性分析	270
第十四章	運輸及指派問題	275
14-1	運輸法及指派法的意義	275
14-2	運輸法——西北角法及基礎法	275
14-3	運輸法——修正分配法	278
14-4	供給量小於需求量之運輸方法	282
14-5	指派法——匈牙利法	283
14-6	特殊指派問題	287
第十五章	決策理論	293
15-1	決策理論的意義	293

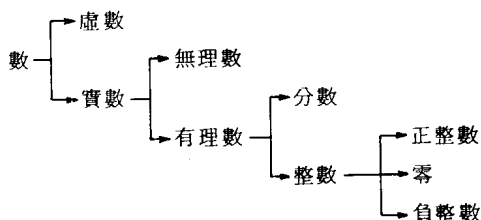
15-2	確定情況下的決策問題	300
15-3	風險情況下的決策問題	302
15-4	不確定情況下的決策問題	313
15-5	貝氏決策理論	315
第十六章	計劃評核術	333
16-1	計劃評核術的意義	333
16-2	計劃評核術的歷史發展	334
16-3	計劃評核術的優點	335
16-4	網狀圖的表示法	336
16-5	網狀圖的時間計算	347
16-6	要徑法	353
第十七章	等候線理論	363
17-1	等候線的意義	363
17-2	等候系統的結構	365
17-3	等候線理論的規則與假設	366
17-4	等候系統的求解模式	367
第十八章	整數規劃	393
18-1	整數規劃的意義	393
18-2	全部整數型規劃	394
18-3	部份整數型規劃	406
18-4	Gomory Constraints 通式	410

管 理 數 學

第一章 基本數學

1-1 數的定義

無論在日常生活上或科學應用上，吾人所使用的各種數的種類可以下圖加以區分：

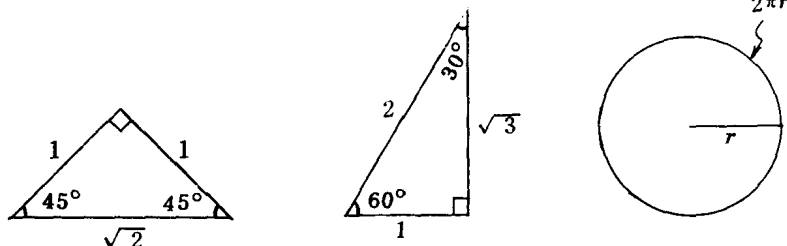


各種數的定義如下：

- (1) **負整數** (Negative integers)：就是任何小於零的整數，而當加上它的正量時變為零。
- (2) **零** (zero)：是一個特別的數，任何數加上零等於原來的數。
- (3) **正整數** (Positive integers)：又稱為自然數，任何自然數都可由“1”開始，逐次加1而得。
- (4) **整數** (Integers)：是負整數、零和正整數的通稱。
- (5) **分數** (Fractions)：是兩個整數之商，但分母不為零或1。
- (6) **有理數** (Rational Number)：是所有整數和分數的通稱，它

一定可以寫成分數 $\frac{b}{a}$ ，而 b 是整數， a 是不為零的整數，當 $a = 1$ 時，便是一個整數。

- (7) 無理數 (Irrational Numbers)：是不能用整數或分數來表示的數，或者不能寫成兩個整數比的數，例如 $\frac{1}{7} = 0.142857 \dots$ 和 $\frac{1}{13} = 0.076923 \dots$ 等循環小數均是有理數；但 $\pi = 3.14159265 \dots$ 和 $e = 2.718281 \dots$ 等非循環小數，其正確值是永遠找不到的，也無法寫成兩個整數比，故均為無理數；無理數絕對不是沒有理由的數，因其事實上都存在且可以用圖形表示出來，只是其正確值無論算到什麼數位都是不可能的。例如等腰直角三角形，邊長是 1，其斜邊長度是 $\sqrt{2}$ ；直角三角形，如斜邊及某邊長是 2 和 1，則其另一邊長是 $\sqrt{3}$ ；圓的周長是直徑的 π 倍；均無法精確獲得其數值，但其絕對存在。 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 和圓周長都是無理數。



- (8) 虛數 (Imaginary Numbers)：是一個負數的平方根，若是去取一個虛數的平方，我們會得一個負數；通常我們令 $\sqrt{-1} = i$ ，故 $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ ， $\sqrt{-4} = 2i$ ， $(\sqrt{-a})^2 = -a$ ；在工程科學及高等數學，虛數佔著很重要的地位。
- (9) 實數 (Real Number)：為有理數和無理數的通稱，是任何不為虛數的數。

〔例 1〕 ① $-\frac{5}{7}$ (實數，有理數及分數)

- ② $\sqrt{2}$ (實數及無理數)
- ③ $\sqrt{-9}$ (虛數)
- ④ $\sqrt{-5}$ (虛數)
- ⑤ -5 (實數、有理數、整數及負整數)
- ⑥ $\sqrt{5}$ (實數及無理數)

1-2 實數公理與絕對值

1. 加法公理

- (a) 交換律： $a + b = b + a$
- (b) 結合律： $(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$
- (c) 同一律： $a + 0 = a$
- (d) 自反律： $x = x$
- (e) 對稱律：若 $x = y$ ，則 $y = x$
- (f) 遞移律：若 $a = b$ ， $b = c$ ，則 $a = c$
- (g) 逆算律： $a + (-a) = 0$

2. 乘法公理

- (a) 交換律： $a \times b = b \times a$
- (b) 結合律： $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$
- (c) 同一律： $a \times 1 = a$
- (d) 分配律： $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- (e) 逆算律： $a \times \frac{1}{a} = 1$

3. 不等量公理

- (a) $a > b$ ，則 $a + c < b + c$
- (b) $a < b$ ， $c > 0$ ，則 $ac < bc$ ， $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

$$(c) \quad a < b, c < 0, \text{ 則 } ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$(d) \quad a < b, \text{ 則 } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$(e) \quad a < b, a > 0, b > 0, n > 0, \text{ 則 } a^n < b^n, \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

4. 絕對值

任一數之絕對值以 $|x|$ 表示，乃指 x 與原點的距離。

若 $x \geq 0$ ，則 $|x| = x$

$x < 0$ ，則 $|x| = -x$

因此，任意一個實數的絕對值均非負，即 $|x| \geq 0$ 。

$$〔例2〕 \quad ① \quad |-5| = 5$$

$$② \quad |7| = 7$$

$$③ \quad |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$④ \quad |3-7| = |-4| = 4$$

$$⑤ \quad |8-6| = |2| = 2$$

$$⑥ \quad |x| < 5 \text{ 表示 } x \text{ 與原點的距離小於 } 5, \text{ 即 } -5 < x < 5$$

1-3 指數與對數

1. 指數

設 a 為任意實數， a 自乘 n 次，用 a^n 來表示，其中 n 即稱為 a 的指數。指數法則如下：

$$(a) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(b) \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(c) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(d) \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(e) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(f) \quad a^0 = 1 \quad (\text{但 } a \neq 0)$$

$$\text{因爲} \begin{cases} a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 \\ a^m \div a^m = 1 \end{cases}$$

$$(g) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{因爲} \begin{cases} a^m \div a^{m+k} = a^{m-(m+k)} = a^{-k} \\ a^m \div a^{m+k} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^k} = \frac{1}{a^k} \end{cases}$$

$$(h) \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{但 } a > 0)$$

因爲 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a$ ，也就是說 $a^{\frac{1}{n}}$ 的 n 次方得 a ，

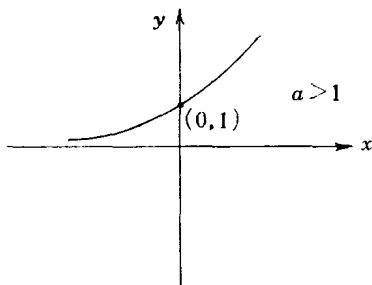
因此 $a^{\frac{1}{n}}$ 可以當作 a 的 n 次方根。如 $a < 0$ 則有下列不合理現象，故此法則必須 $a > 0$ 。

$$-1 = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

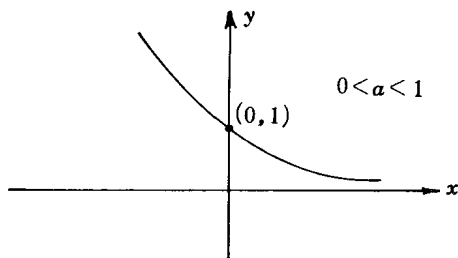
指數函數 $y = a^x$ 的性質如下：

(a) 當 $a = 1$ 時，爲常數函數 $y = 1$ 。

(b) 當 $a > 1$ 時，爲遞增函數，當 x 趨近於 ∞ 時， y 亦趨近於 ∞ ； x 趨近於 $-\infty$ 時， y 趨近於 0。當 $x = 0$ 時， $y = 1$ 。



(c) 當 $0 < a < 1$ 時，爲遞減函數，當 x 趨近於 ∞ 時， y 趨近於 0； x 趨近於 $-\infty$ 時， y 趨近於 ∞ 。當 $x = 0$ 時， $y = 1$ 。



- [例 3]
- ① $x^4 \cdot x^2 \cdot x^6 = x^{4+2+6} = x^{12}$
 - ② $3a^3 \cdot 2a^4 = 6a^{3+4} = 6a^7$
 - ③ $(-2)^2 \cdot (-2)^6 = (-2)^{2+6} = (-2)^8 = 256$
 - ④ $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$
 - ⑤ $\frac{a^2 b^3}{ab} = a^{2-1} \cdot b^{3-1} = ab^2$
 - ⑥ $a^0 + (a + 2b)^0 = 1 + 1 = 2$
 - ⑦ $(80^{-2})^{\frac{1}{2}} = (80)^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 80^{-1} = \frac{1}{80}$
 - ⑧ $\frac{\sqrt{ab^3}}{\sqrt[3]{a^2b}} = \frac{(ab^3)^{\frac{1}{2}}}{(a^2b)^{1/3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}}{a^{2/3} b^{1/3}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} b^{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}$
 $= a^{-\frac{1}{6}} b^{\frac{7}{6}} = a^{-\frac{1}{6}} b b^{\frac{1}{6}} = b \sqrt[6]{\frac{b}{a}}$

2. 對數

設 a 為不等於 1 的正數，對於正數 x ，有一個可滿足 $a^y = x$ 中的 y 值與其對應，此 y 值稱為以 a 為底的對數，可用下式表示之：

$$y = \log_a x$$

x 稱之為真數

對數法則如下：

$$(a) \quad \log_a 1 = 0 \quad (\text{因 } a^0 = 1)$$

$$(b) \quad \log_a a = 1 \quad (\text{因 } a^1 = 1)$$

$$(c) \quad \log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

因爲如令 $\log_a m = p$, $\log_a n = q$

$$a^p = m, \quad a^q = n$$

$$m \cdot n = a^{p+q}$$

$$\therefore \log_a(m \cdot n) = p + q = \log_a m + \log_a n$$

$$(d) \quad \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

因爲如令 $\log_a m = p$, $\log_a n = q$

$$\therefore a^p = m, \quad a^q = n$$

$$\frac{m}{n} = a^{p-q}$$

$$\therefore \log_a \frac{m}{n} = p - q = \log_a m - \log_a n$$

$$(e) \quad \log_a m^n = n \log_a m$$

因爲如令 $\log_a m = p$,

$$a^p = m$$

$$a^{np} = m^n$$

$$\therefore \log_a m^n = np = n \log_a m$$

$$(f) \quad \log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a} \quad (\text{稱爲底的變換公式})$$

因爲令 $a^p = m$, $\log_a m = p$

$$\log_b a^p = \log_b m$$

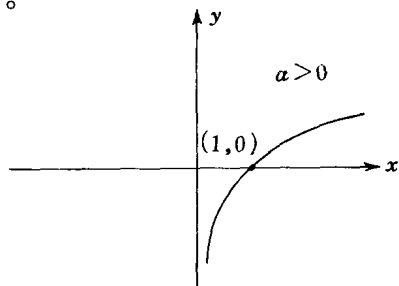
$$p \log_b a = \log_b m$$

$$p = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

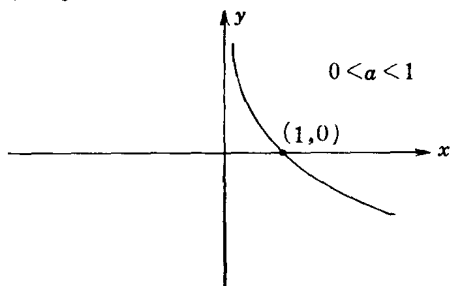
$$\therefore \log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

對數函數 $y = \log_a x$ 的性質如下：

- (a) 當 $a = 1$ 時，為常數函數 $x = 1$
- (b) 當 $a > 1$ 時，為遞增函數，當 x 漸增， y 亦增；當 $x = 1$ 時， $y = 0$ ；當 $x < 1$ 時， y 為負值；當 x 趨近於零時， y 為 $-\infty$ 。



- (c) 當 $0 < a < 1$ 時；為遞減函數，當 x 漸增， y 漸減；當 $x = 1$ 時， $y = 0$ ；當 $x > 1$ 時， y 為負值；當 x 趨近於零時， y 為 ∞ 。



對數一般分為兩種，一為以 10 為底的一般對數（Common Logarithms），一為以 $e = 2.71828 \dots$ 為底的自然對數（Nature Logarithms）。若以指數式來對照，一般對數的關係式可寫成：

$$10^3 = 1000 \quad , \quad \log_{10} 10^3 = 3$$

$$10^2 = 100 \quad , \quad \log_{10} 10^2 = 2$$

$$10^1 = 10 \quad , \quad \log_{10} 10 = 1$$

$$10^0 = 1 \quad , \quad \log_{10} 1 = 0$$

$$10^{-1} = 0.1 \quad , \quad \log_{10} 0.1 = -1$$

$$10^{-2} = 0.01 \quad , \quad \log_{10} 0.01 = -2$$

$$10^{-3} = 0.001 \quad , \quad \log_{10} 0.001 = -3$$

以 e 爲底的自然對數，以符號 $\ln$ 來表示，即 $\log_e = \ln$ ；如指數式 $x = e^y$ ，則其自然對數關係式爲 $y = \ln x$ 。

〔例 4〕 ① $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

② $\log_3 1 = 0$

③ $\log_{10} 10^{3.5} = 3.5$

④ 若 $\log a = 0.3$ ， $\log b = 2.8$ ， $\log c = 1.7$

$$\begin{aligned} \text{則 } \log \frac{a^3 b^{\frac{1}{2}}}{c} &= \log a^3 + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c \\ &= 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - \log c \\ &= 3(0.3) + \frac{1}{2}(2.8) - 1.7 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

〔例 5〕 試解下述方程式 x 之值：

$$2 \log_2 x + \log_2 (x-1) = 3 \log_2 x - 3$$

〔解〕 $2 \log_2 x + \log_2 (x-1) = 3 \log_2 x - 3$

$$\log_2 x^2 (x-1) = 3 \log_2 x - \log_2 8$$

$$\log_2 x^2 (x-1) = \log_2 \frac{x^3}{8}$$

$$x^2 (x-1) = \frac{x^3}{8}$$

$$8x^3 - 8x^2 = x^3$$