目　录

第一章 可靠性的基本概念

§1.1 可靠性的定义

"可靠性"这一词有广义的和狭义的两种定义。

广义可靠性指的是系统、设备或元器件在规定的条件下，在规定的时间内，完成规定功能的能力；而狭义的可靠性指的是系统、设备或元器件（以下总称为产品）在规定的条件下和规定的时间内，完成规定功能的概率。

狭义可靠性与广义可靠性在定义上的区别仅在于把"能力"换成"概率"。为了区别这二者，我们把狭义的可靠性用"可靠度"来表示。由定义可见，可靠度的意义就是利用概率明确地表示出产品的抽象的可靠性，使之数量化，这样对于提高产品可靠性，进行可靠性管理以及交易中使用就有一个数量上的标准。

可靠性定义中的"规定的条件"，常常指的是使用条件、维护条件和贮存条件等。这些条件不同，产品的可靠性则不同，例如同一产品在实验室的使用条件与在现场的使用条件不同，可靠性就会有所不同，又如不同的贮存条件也会使产品的可靠性不一样。

定义中的"规定的时间"则明确地指出了可靠性与时间是密切相关的，这是可靠性的核心，因为不谈时间也就无可靠性而言了，但规定的时间长短又随着产品的不同和使用目的的不同而不同，例如火箭是要求在几秒钟或几分钟之内可靠，而飞机则要求在几万至几十万小时内可靠。一般来说，随着时间的增加可靠性逐渐降低，所以可靠性是对一定的时间而言的。

定义中的"规定的功能"是指产品能满足全部技术指标而不是部分技术指标，而产品不能完成规定的功能，说明产品不再可靠。我们把产品失掉规定的功能的状态称为产品发生"故障"或"失效"，所以在可靠性中产品的"正常"或"失效"是产品的两种基本状态。

定义中的"能力"，这是定性的抽象的概念，因此往往用"概率"来定量地反映出来。对于故障后可修复的产品，例如汽车、计算机之类和对于故障后不可修复的产品，例如灯泡、火箭之类，反映"能力"除了用"可靠度"之外，还有一些不同之处，这就是对可修复的产品还应增加表示其从"故障"状态恢复到"正常"状态的"能力"，即维修的难易程度，这通常用"维修度"表示；或者对于可维修的产品直接用"有效度"来综合反映"可靠度"及"维修度"。所以"能力"实际上就是指，表示产品可靠性的各种指标，而在不同的场合和不同的情况下，将采用不同的指标。常用的可靠性指标有"可靠度"、"失效率"、"有效度"或"平均寿命"等等，下面作详细说明。

§1.2 可靠性中的基本函数

由于可靠性是对一定的时间而言的，可靠性中的许多指标实际上是时间的函数，所以为了表征产品的可靠性，需要引入一些有关函数的概念，例如可靠度函数、失效分布函数、失效密度函数以及失效率函数等。这些是可靠性研究中的基本函数。

一、可靠度函数R(t)与失效分布函数F(t)

从可靠度的定义中，我们知道可靠度是对一定的时间t而言的，所规定的时间t不同，其数值也是不同的，所以它是时间t的函数，称为可靠度函数，用R(t)表示。与可靠度相反，我们定义，产品在规定的条件下，在规定的时间内丧失规定的功能（即发生失效或故障）的概率称为产品的累积失效概率（简称失效概率），一般则称为不可靠度。不可靠度也是时间t的函数，通常称为失效分布函数（或称不可靠度函数），用F(t)表示。

我们把产品从开始工作到首次失效前的一段时间T称为寿命，这样，对可靠度而言，以下三个事件是等价的，即

"产品在时间t内完成规定的功能"；

"产品在时间t内无故障"；

"产品的寿命T大于时间t"。

由于产品发生失效是随机的，所以寿命T是一个随机变量，不同的产品，不同的工作条件，则T的取值的统计规律不同，所以产品的可靠度函数R(t)可以看作是事件"T>t"的概率，即

$$R(t)=P(T>t) \tag{1.1}$$

而产品的失效分布函数F(t)，则可看作是事件"T≤t"的概率，即

$$F(t)=P(T\leqslant t) \tag{1.2}$$

这表示在规定的条件下，产品的寿命T不超过t的概率，或者说产品在规定的时间t之前失效的概率。

由于可靠度与不可靠度是相反事件的概率，故可靠度函数与失效分布函数有以下关系，即

$$F(t)=1-R(t)=1-P(T>t)$$

在工程上，为了求一种产品的可靠度函数或失效分布函数，一般通过对这种产品进行寿命试验来估计一个产品在某一时间t内的可靠度及失效概率，进而得出该产品的可靠度函数及失效分布函数。

例如，在$t=0$时，有n件产品开始工作，而到t时刻有$r(t)$件产品失效，仍有$n_1=n-r(t)$件产品在继续工作，则下式：

$$\hat{R}=[n-r(t)]/n=1-r(t)/n=n_1/n$$

可以作为时刻t的可靠度函数值的估计值。下面我们用某种型号的电子器件70只，在规定的条件下工作，并记录其失效时间，然后对该产品的可靠度进行估计，并由此例说明可靠性中的可靠度函数、失效分布函数、失效密度函数以及失效率等几个重要的基本概念。

设取$n=70$，时间单位以"小时"计，每100小时为一组，失效时间分别列于表1.1。

表 1.1

210	272							
320	320	351	362	364	365	365	376	389
389	390							
410	420	420	420	432	443	454	456	466
466	470	470	480	496	496	499		
510	512	524	524	533	540	540	540	540
540	552	552	564	564	578	588	589	589
590	594							
619	628	628	628	628	628	628	630	630
649	656	660	670	692				
712	736	736	750	760	786			
840								

按每100小时观测一次失效数，可列成表1.2：

表 1.2

(1) 观测序号 i (区间)	(2) 总观测时间 t_i	(3) 第 i 区间失效数 Δr_i	(4) 累积失效数 $r_i=\sum\Delta r_i=n-n_i$	(5) 工作样品数 $n_i=n-\sum\Delta r_i$
0	0	—	—	70
1	100	0	0	70
2	200	0	0	70
3	300	2	2	68
4	400	11	13	57
5	500	16	29	41
6	600	20	49	21
7	700	14	63	7
8	800	6	69	1
9	900	1	70	0

(6) 可靠度 $\hat{R}(t_i)=\frac{n_i}{n}$	(7) 累积失效概率（或不可靠度） $\hat{F}(t)=1-\frac{n_i}{n}$	(8) 各区间的失效概率密度（%/小时） $\hat{f}(t_i)=\frac{\Delta r_i}{n}\cdot\frac{1}{\Delta t}$	(9) 失效率（%/小时） $\hat{\lambda}(t_i,t_{i+1})=\frac{\Delta r_i}{n_i}\cdot\frac{1}{\Delta t}$
1	0	—	—
1	0	0	0
1	0	0	0
0.971	0.029	0.029	0.029
0.814	0.186	0.157	0.162
0.585	0.415	0.228	0.280
0.300	0.700	0.286	0.488
0.100	0.900	0.200	0.666
0.015	0.985	0.085	0.858
0	1	0.014	1.000

根据 $\hat{R}=n_i/n$，可以求出在不同时间区间Δt之间的可靠度，如表 1.2 中第（6）项所示。把计算结果表示在横坐标为 t，纵坐标为 R(t) 的坐标图上，并把各点联接起来，可得一

条曲线，如果我们把Δt取得很小，$\Delta t \to 0$，那么该曲线就成为光滑的连续的曲线，这是一条下降的曲线，该曲线的表达式就是此种产品的可靠度函数$R(t)$，见图 1-1 所示。

从图 1-1 上我们可以估计出不同时刻的可靠度值。例如，在 $t=500$ 小时，$R(500)=0.585$。反过来，如果给出了可靠度 $R=0.9$，也可从图上估计出时间$t=360$小时。

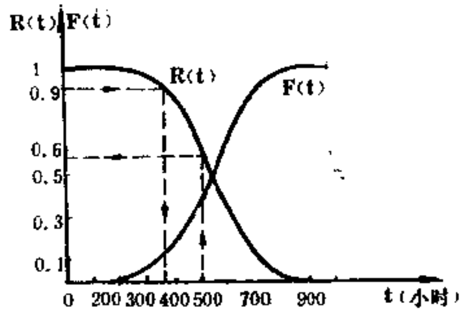

图 1-1 可靠度函数

用相同的方法，根据表 1.2 中的第（7）项，我们可以作出累积失效概率的曲线，当$\Delta t \to 0$ 时该曲线的表达式就是失效分布函数 $F(t)$（即不可靠度函数）。

如果已经知道产品的失效分布函数$F(t)$，则可靠度函数$R(t)$也就可以从$F(t)$求出，这是因为

$$R(t)=P(T>t)=1-P(T\leqslant t)=1-F(t) \tag{1.3}$$

或者

$$R(t)+F(t)=1 \tag{1.4}$$

显然，图1-1也反映出了以上$R(t)$与$F(t)$的关系。

二、失效密度函数$f(t)$

表1.2中第（8）项为各区间失效概率密度。

失效概率密度可以定义为：单位时间内的失效概率，用$f(t)$表示。根据定义，失效概率密度的估计值可表示为

$$\hat{f}(t_i)=\frac{\Delta r_i}{n}\cdot\frac{1}{\Delta t} \tag{1.5}$$

在Δt时间内的失效频率为$f(t_i)\Delta t$，而累积失效概率$F(t_i)$可由$f(t_i)$来确定，即

$$F(t_i)=\sum_{j=0}^{i} f(t_j)\Delta t \tag{1.6}$$

如果我们将$f(t_i)$与t_i的关系表示在坐标上，当$\Delta t \to 0$时，同样可得到一条光滑的连续的曲线，该曲线的表达式就是失效概率密度函数（或失效密度函数），并用$f(t)$表示，如图1-2所示。

显然，失效分布函数$F(t)$与失效密度函数$f(t)$的关系可用下式表示：

$$F(t)=\int_0^t f(t)\,dt \tag{1.7}$$

而失效密度函数就是失效分布函数$F(t)$的微商：

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt} \tag{1.8}$$

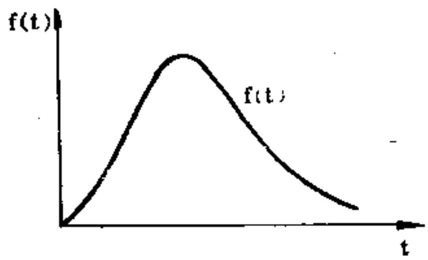

图 1-2 失效密度函数

这样，如果已知产品的失效密度函数$f(t)$，也可以得出产品的可靠度函数，即

$$R(t) = 1-F(t) = \int_t^{\infty} f(t)\,dt \tag{1.9}$$

相反，

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{1.10}$$

$f(t)$、$F(t)$与$R(t)$之间的关系如图 1-3所示。

因此，我们通过对产品进行寿命试验，可以得出产品的失效密度函数，根据失效密度函数可以求出产品的可靠度函数和失效分布函数。

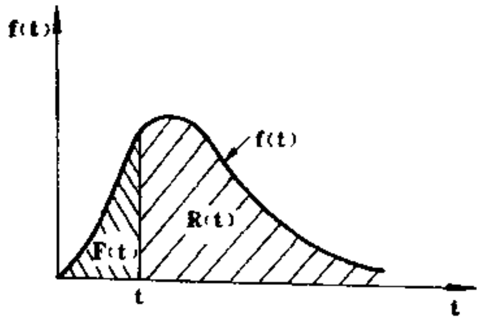

图 1-3　失效密度函数 f(t) 与 R(t)，F(t)的关系

三、失效率函数$\lambda(t)$

表 1.2 中的第（9）项表示的是产品的失效率。

1. 失效率的定义

失效率定义为：已工作到时刻t_i的产品，在时刻 t_i 后单位时间内发生失效的概率，称为该产品在时刻 t_i 的失效率函数，简称失效率，用λ（t_i）表示。

同样；表1.2中的计算式$\lambda(t_i, t_{i+1}) = \Delta r_i / (n_i \Delta t)$ 是根据定义，把定义中的概率用频率表示而得出的。因为产品的失效率是可靠性中的一个重要概念，已知产品的失效率可以确定产品的寿命分布，产品的失效率常常作为这类产品可靠性的指标，所以下面对失效率概念作一些直观的剖析，以便正确理解它的含义，然后再推导失效率的数学表达式。

设$t=0$时，有n个产品开始工作，到时刻 t_i 有 r_i 个产品失效，剩下$n_i = n - r_i$个产品进行工作，为了考虑时刻t_i后产品的失效情况，再观察Δt时间，如图1-4所示；如果在t_i到$t_i+\Delta t$时间内又有Δr_i个产品失效。那么，在时刻t_i尚有n_i个产品继续工作的条件下，在时间（t_i，$t_i+\Delta t$）内失效的频率为

$$\frac{\Delta T_i}{n_i} = \frac{\text{在时间}(t_i, t_i+\Delta t)\text{内失效的产品数}}{\text{在时刻}t_i\text{仍正常工作的产品数}}$$

于是产品工作到时刻t_i之后，每单位时间内发生失效的频率为

$$\frac{\frac{\Delta r_i}{n_i}}{\Delta t} = \frac{\Delta r_i}{n_i \Delta t} = \lambda(t_i, t_{i+1}) \tag{1.11}$$

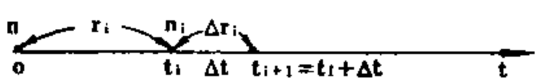

图 1-4　失效率

这个计算式可以用来估计在时刻t_i的失效率$\lambda(t_i)$。例如，当$t_i = 500$小时，$n_i = 41$，在下一个$\Delta t = 100$小时之内，失效数$\Delta r_i = 20$，则失效频率为

$$\frac{\Delta r_i}{n_i} = \frac{20}{41} = 0.488$$

单位时间内的失效频率$\lambda(t_i)$为

$$\hat{\lambda}(500)=\frac{\Delta r_i}{n_i\,\Delta t}=0.488\%/\text{小时}$$

失效率的单位：

从失效率的估计公式中可以定出失效率的量纲为

$$\hat{\lambda}(t_i)=\frac{\Delta r_i}{n_i\,\Delta t}[\text{※※}\%\text{小时}] \tag{1.12}$$

例如$\hat{\lambda}(1000)=2\times10^{-5}$/小时$=2\%/1000$小时，它表示产品工作1000小时后，每100个产品大约有2个失效的水平。

失效率的基本单位是1个菲特，它定义为

1菲特（FIT）$=10^{-9}$/小时

它的意义是每1000个产品工作一百万小时后，只有一个失效；或者每一万个产品工作十万小时后，只有一个失效。由此可见，失效率越小，产品的可靠性越高，反之，失效率愈大，产品的可靠性就愈差。我国电子元器件的可靠性等级就是按失效率的大小来制定的。

例 一台电视机有1000个焊点，工作1000小时后，检查100台电视机，发现有两点脱焊，那么焊点的失效率为多少？

解 100台电视机共有$100\times1000=10^5$个焊点，这里每一个焊点相当于一个产品，若取$\Delta t=1000$小时，则1000小时后失效率的估计值为

$$\hat{\lambda}(0)=\frac{2}{1000(10^5-0)}=2\times10^{-8}/\text{小时}=20\text{菲特}$$

这里说明一点，也就是为什么有了失效密度函数，还要引入失效率这一概念。从上面分析中可以看出，讲失效率是有条件的，“产品工作到时刻t后”就是条件。上式分母中n_i就是随着t这个条件的变化而变化的。因而失效率能非常灵敏地反映出产品失效的变化速度。而失效密度$f(t)$反应出的只是在t附近的一个单位时间内产品失效数与$t=0$时的工作产品数n之比，因而不够灵敏。

例如，如图1-5所示，在$t=0$时，有$n=100$件产品开始工作，在$t=100$小时前有两个失效，而在100到105小时有1个失效。那么$n_i=100-2=98$，在$t(100\sim105)$内$\Delta r_i=1$，故

$$\hat{f}(100)=\frac{\Delta r_i}{n}\cdot\frac{1}{\Delta t}=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{(105-100)}=\frac{1}{5\times100}$$

$$\hat{\lambda}(100)=\frac{\Delta r_i}{n_i}\cdot\frac{1}{\Delta t}=\frac{1}{98}\cdot\frac{1}{(105-100)}=\frac{1}{5\times98}$$

又如到$t=1000$小时前有51个失效，而在1000到1005小时内失效1个，此时$n_i=100-51=49$，$\Delta r_i=1$，$\Delta t=1005-1000=5$小时，故

$$\hat{f}(1000)=\frac{1}{5\times100}$$

$$\hat{\lambda}(1000)=\frac{1}{5\times49}$$

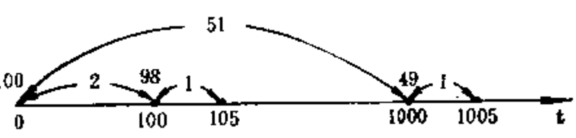

图 1-5 失效率计算实例

在这个例子中，我们可以看出：

从失效密度观点看，在$t=100$和$t=1000$处，单位时间内失效频率是相同的，而从失效率观点看，这两者是不同的。人们希望在时刻t后，未来的失效数与还在工作的产品数之比愈小愈好，但$f(t_i)$反映不出这一点，而$\lambda(t_i)$能反映出这一点。

2． **失效率$\lambda(t)$与$R(t)$、$F(t)$之间的关系**

下面我们从上述失效率的定义推导失效率$\lambda(t)$的数学表达式。设T是在规定条件下产品的寿命，其失效分布函数为$F(t)$，失效密度函数为$f(t)$。此时，事件"产品工作到时刻t后"可表示为"$T>t$"。事件"产品在$(t, t+\Delta t)$内失效"可表示为"$t<T\leqslant t+\Delta t$"。于是产品工作到时刻t后，在$(t, t+\Delta t)$内产品失效的概率可以表示为条件概率$P(t<T\leqslant t+\Delta t|T>t)$，把此条件概率除以时间间隔$\Delta t$以后，就得到在$\Delta t$时间内的平均失效率，当$\Delta t\to 0$时，就得到在时刻t的失效率

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T\leqslant t+\Delta t|T>t)}{\Delta t} \tag{1.13}$$

由条件概率性质和事件包含关系，可知

$$\begin{aligned}P(t<T\leqslant t+\Delta t|T>t)&=\frac{P(t<T\leqslant t+\Delta t, T>t)}{P(T>t)}\\&=\frac{P(t<T\leqslant t+\Delta t)}{P(T>t)}\\&=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\cdot\frac{1}{1-F(t)}\\&=\frac{F'(t)}{1-F(t)}\end{aligned} \tag{1.14}$$

进一步还可推得

$$\lambda(t)=\frac{F'(t)}{R(t)}=\frac{f(t)}{R(t)}=-\frac{R'(t)}{R(t)} \tag{1.15}$$

这些都是失效率的数学表达式。从这些关系式中可以看出，假如已知失效分布$F(t)$，或$f(t)$，或可靠度函数$R(t)$，都可以立即求出$\lambda(t)$。一句话，知道了产品的失效分布，就可确定失效率函数$\lambda(t)$。

反之，假如已知产品的失效率$\lambda(t)$，那么也可以定出产品的失效分布，这是因为可靠度函数$R(t)$满足下列微分方程：

$$\frac{R'(t)}{R(t)}=-\lambda(t) \tag{1.16}$$

对两边积分，可得

$$\ln R(t)=-\int_0^t\lambda(t)dt$$

$$R(t)=\exp[-\int_0^t \lambda(t)dt] \tag{1.17}$$

于是

$$F(t)=1-R(t)=1-\exp[-\int_0^t \lambda(t)dt] \tag{1.18}$$

$$f(t)=F'(t)=\lambda(t)\exp[-\int_0^t \lambda(t)dt] \tag{1.19}$$

这些结果是很重要的，它不仅给出了从失效率$\lambda(t)$推导失效分布$F(t)$和$f(t)$的具体公式，而且还说明$\lambda(t)$与$F(t)$、$f(t)$、$R(t)$一样重要，都是用来描述产品寿命T取值的统计规律性的。它们之间是相关的，只是因各自着重说明的侧面不同，而用途也就不同而已。

3. **产品的失效规律**

人们在各种产品的使用和试验中得到大量的数据，对它进行统计分析之后，发现一般的产品（例如大部分电子产品的元器件）、人的寿命等的失效率λ和时间t的关系有如图1-6所示的像浴盆那样的曲线图形，因此称为浴盆曲线。

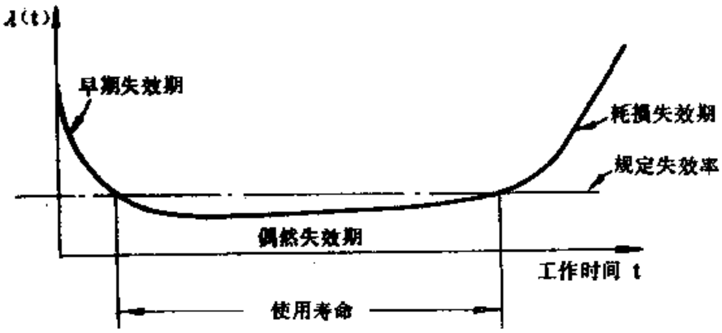

图 1-6 浴盆曲线

这条曲线明显地分为三段，并对应着产品的三个时期：

①早期失效期（相当于幼儿死亡期）：

其特点是失效率高，但随着时间的增加失效率迅速下降。这相当于幼儿抵抗力差，易于死亡，随着年龄的增大，死亡率很快下降。对于产品，则是由于设计和制造工艺上的缺陷导致产品的失效，例如原材料有缺陷，装配调整不当等。这可以通过加强对原材料和工艺的检验以及对产品的质量管理，进行可靠性筛选等方法，来降低产品早期失效率。

②偶然失效期（相当于青壮年期）：

这个时期也称随机失效期或稳定工作阶段，正如人处于青壮年阶段，其特点是失效率低且稳定，近似为常数。其失效主要原因是由偶然因素所引起的，这个时期是产品的主要工作时期，在这一时期要尽力做好产品的维护和保养工作，使这一阶段尽量延长。

③耗损失效期（老人期）：

其特点是失效率迅速上升，很快导致产品报废。产品失效的主要原因是由于老化、疲劳和耗损等因素引起的，正如人到年老，死亡率迅速增加一样。这一阶段要针对不同的情况采取一些补救措施，例如由于元器件老化引起整个系统失效，可以采取更换这部分元器件的方法，对寿命短的产品可以采取预防性检修的措施和替换方法，这些办法在系统设计时就要考虑到。

但是并非所有的产品均有上述三个失效阶段，有的产品只有其中一个或两个阶段，例如某些货量低劣的产品在早期失效后就进入了耗损失效期。可靠性研究虽然会遇到以上三个阶段，但着重研究的是偶然失效期，因为它是发生在产品的正常使用期间的失效。

§1.3 可靠性中的寿命指标

在可靠性研究中，上述所用的几种描述产品可靠性的函数，实际上就是表征产品可靠性的指标。从这些函数中我们可以看出它们都是与产品的寿命T有关的，这样，有时可以直接用产品的寿命来定量地评定产品的可靠性则更为直观。例如，我们经常在产品技术指标中看到：该产品的“平均寿命”多长，或“平均故障间隔时间”多长等等。在可靠性中常用的寿命指标有：平均寿命、可靠寿命、中位寿命以及使用寿命等。

一、平均寿命（MTTF或MTBF）

在可靠性寿命指标中最常用的是平均寿命，平均寿命的叫法随产品是否可以修复而不同。

对于不可修复的产品，平均寿命指，产品发生失效前已工作（或贮存）的平均时间，通常用MTTF（Mean Time To Failure）表示，称为失效前平均时间，简称平均寿命。

对于可修复的产品，它是指，平均无故障工作的时间或称平均故障间隔，用MTBF（Mean Time Between Failures）表示，一般情况下统称平均寿命，本书用θ表示。

对于不可修复的产品，通过寿命试验，测得全部寿命数为t_1，t_2，…，t_n。则其平均寿命MTTF的估计值用$\hat{\theta}$表示为

$$\hat{\theta} = MTTF = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \tag{1.20}$$

对于可修复的产品，在使用中发生过n次故障，每次故障修复后重新投入工作，其工作时间分别为t_1，t_2，…，t_n，则其平均寿命的估计值为

$$\hat{\theta} = MTBF = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \tag{1.21}$$

比较式（1.20）与（1.21）可见MTTF与MTBF在数学上的表达式是一样的。

如果已知产品的失效密度函数$f(t)$，则寿命$T=t$的概率为

$$f(t)dt$$

那么产品的平均寿命，也就是寿命T的数学期望值可表示为

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt \tag{1.22}$$

已知
$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

代入式（1.22）中得平均寿命为

$$\theta = MTTF = \int_0^{\infty} t\left(-\frac{dR(t)}{dt}\right)dt$$

$$= -[tR(t)]\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t)\,dt = \int_0^{\infty} R(t)dt \tag{1.23}$$

二、可靠寿命与中位寿命

可靠寿命定义为，使可靠度等于给定值r所对应的时间称为可靠度为r的可靠寿命，用t_r表示，即

$$R(t_r)=r$$

当可靠度水平$r=0.5$时的可靠寿命称为中位寿命，用$t_{0.5}$表示。

当可靠度为r时，在可靠度函数曲线上可找出可靠寿命 t_r 的值，见图1－7所示。同样可在$r=0.5$处找出中位寿命$t_{0.5}$的值。

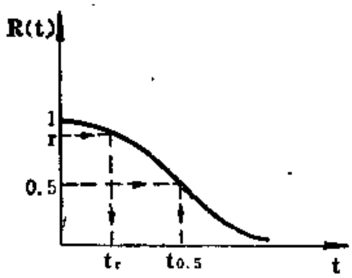

图 1—7 可靠寿命t_r与中位寿命$t_{0.5}$

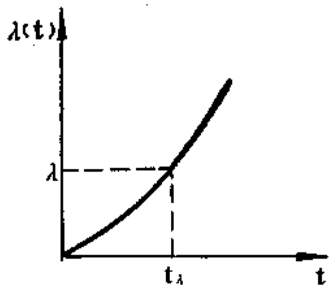

图 1—8 使用寿命

三、使用寿命

使用寿命定义为，产品在规定的使用条件下，具有可以接受的失效率的时间区间称为失效率为 λ 的使用寿命，用 t_λ 表示。在图1－8上，根据一给定的失效率 λ，由失效率函数曲线上可找出其相对应的使用寿命 t_λ。同样，从浴盆曲线（图1－6）上也可得出。

§1.4　可维修产品的可靠性指标

可维修产品的可靠性指标，除了可靠度R(t)、失效率 λ(t) 、平均寿命MTBF之外，还应考虑与维修有关的维修度M(t) 、修复率μ(t) 以及平均修复时间MTTR。在可维修产品中，为了综合反映产品的可靠度和维修度，也就是综合评价产品的可利用程度，通常还用有效度A(t)来作为可维修产品的可靠性指标。下面介绍可维修产品可靠性的主要指标。

一、维修度M(t)

维修度也称修理度，它是表征产品维修的难易程度的。维修度的定义为：产品在规定使用条件下，在规定时间t内，按照规定的程序和方法进行维修时，保持或恢复到能完成规定功能状态的概率，即

$$M(t)=P(\tau\leqslant t)=G(t) \tag{1.24}$$

显然，它是时间的函数，时间越长，完成维修的概率越大。维修度也可以理解为，当$t=0$时，处于故障状态的产品，经过维修后，到达t时刻累积有百分之几恢复到正常的状态。维修度函数是一个非减函数，当$t=0$时，$M(t)=0$；$t\to\infty$时，$M(t)=1$，它具有分布函数的特

点，和前面介绍的累积失效分布函数（不可靠度）F(t) 及失效概率密度函数 f(t) 相似。也用G(t) 表示维修分布函数，用g(t) 表示维修分布概率密度函数。

二、修复率$\mu(t)$

对应于失效率$\lambda(t)$，我们引入修复率$\mu(t)$ 的定义为，修理时间已达到某个时刻t的产品，在该时刻后单位时间内完成修复的概率，即

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1-G(t)} \tag{1.25}$$

与前面失效率与可靠度的关系相似，维修度与修复率之间的关系为：

$$M(t) = G(t) = 1-\exp\left[-\int_0^t \mu(t)\,dt\right] \tag{1.26}$$

三、平均修复时间MTTR

平均修复时间是修复时间的平均值，即

$$MTTR = E(t) = \int_0^\infty tg(t)\,dt \tag{1.27}$$

如果产品的维修分布为指数分布，则

$$\begin{cases} G(t) = 1-e^{-\mu t}\ (t>0) \\ g(t) = \mu e^{-\mu t}\ (t>0) \end{cases} \tag{1.28}$$

其中$\mu>0$是常数。则该产品在t时刻的维修度为

$$M(t) = 1-e^{-\mu t} \tag{1.29}$$

而修复率 $\mu(t)=\mu$，则平均时间为

$$MTTR = E(t)\int_0^\infty t\mu e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu} \tag{1.30}$$

除了指数分布之外，有的产品的维修分布服从对数正态分布。

为了更好地理解维修度，我们将维修度与可靠度有关内容列表对比（见表1.3）。

表 1.3

	可　靠　度	维　修　度
函　数	可靠度函数 $R(t)=1-F(t)$	$1-M(t)$
累积分布函数	不可靠度函数：$F(t)$	维修度函数：$M(t)$
密度函数	$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}$	$g(t)=\frac{dM(t)}{dt}$
率（单位时间）	失效率$\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}$	修复率$\mu(t)=\frac{g(t)}{1-M(t)}$
指数分布时的累积分布与平均时间	$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ $MTBE=\frac{1}{\lambda}$	$M(t)=1-e^{-\mu t}$ $MTTR=\frac{1}{\mu}$

四、有效度 A(t)

由于可维修产品发生故障后，可以在规定的时间内修好，并投入正常工作，这就相当于增加了产品的工作概率，所以有效度定义为，产品在某时刻t具有维持其规定功能的概率，称为产品在t时刻的瞬时有效度，又称瞬时利用率。若我们用一个二值函数(0，1)来表示产品在t时刻的状态，即

$$X(t)=\begin{cases}0 & \text{表示时刻}t\text{产品工作}\\ 1 & \text{表示时刻}t\text{产品维修}\end{cases}$$

则t时刻产品的瞬时有效度可表示为

$$A(t)=P\{X(t)=0\} \tag{1.31}$$

瞬时有效度反映时刻t产品的状态，它与t时刻前产品是否有故障无关。当 $t\to\infty$ 时，$A(t)$ 的瞬态项消失，则若极限

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=A(\infty) \tag{1.32}$$

存在，则称$A(\infty)$为平稳状态下的有效度，简称稳态有效度，也称为工作时间比，可表示为

$$A=\frac{\text{能工作时间}}{\text{能工作时间}+\text{不能工作时间}} \tag{1.33}$$

式中不能工作时间包括一切维修时间和停机时间。若产品只因故障或修复故障而停机时，稳态有效度可写为

$$A=\frac{MTBF}{MTBF+MTTR} \tag{1.34}$$

当产品的寿命分布与故障后的修复时间分布均为指数分布时，稳态有效度可写为

$$A=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{1.35}$$

这里要说明一点：对于可维修产品，其首次发生故障的时间 T_1，是随机变量，其分布称为首次故障分布 $F_1(t)$，但它与不维修产品的寿命分布 $F(t)$ 是完全一样的，因此，可认为可维修产品的首次故障分布就是寿命分布。同样，可认为可维修产品的故障前平均时间MTTF就是平均寿命MTBF。但由于对可维修产品来讲更重要的是平均无故障工作时间，我们假设修复后的产品与原来新的一样好，也就是修复后的产品的寿命分布与原来的一样。这样也就可以认为平均无故障工作时间就是平均寿命MTBF，所以把故障前平均时间、平均无故障工作时间、平均寿命统称为平均寿命MTBF。另外，对于不维修产品而言，其可靠度就是有效度，这是因为不维修产品的有效度是与维修度无关的。

§1.5 可靠性中常用的失效分布

我们通过产品的寿命试验，可以确定出产品的失效分布；根据产品的失效分布，可以掌握产品的可靠性；从而根据可靠性的定量分析，可以提出改进产品可靠性的方法，确定维修措施，制定试验计划等。但由于各种产品的失效机理不同，其失效分布也是多种多样的。在可靠性中常见的产品失效分布有指数分布、Γ-分布、威布尔分布、对数正态分布等。由

于这些内容在概率论和数理统计中已有详细的叙述，故在此仅简单介绍最常用的几种分布，以及其与可靠性有关的特征参数。

一、指数分布

在可靠性分析中，产品失效分布按指数分布是最基本、最常用的分布。正如上面所述，电子元器件之类产品，在早期剔除不可靠产品之后，其偶然失效期比较长。在这个期间发生的失效是随机的，无法预测的，因此这个时间的失效率是比较低的，而且是比较稳定的。也就是说，失效率近似为常值，而一般复杂的系统大多数也属于这种分布规律。

由于失效率$\lambda(t)=\lambda$（常值），所以可靠度函数为

$$R(t)=e^{-\int_0^t \lambda dt}=e^{-\lambda t} \tag{1.36}$$

失效密度函数则为

$$f(t)=\lambda(t)\exp[-\int_0^\infty \lambda(t)\,dt]=\lambda e^{-\lambda t} \tag{1.37}$$

失效分布函数则为

$$F(t)=1-e^{-\lambda t} \tag{1.38}$$

这种寿命分布类型就称为指数分布。其失效分布曲线如图1－9所示，可靠度曲线如图1－10所示。

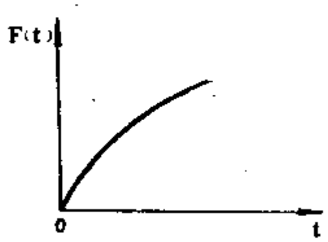

图 1-9　失效分布曲线

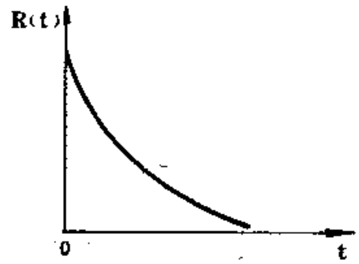

图 1-10　可靠度曲线

指数分布的平均寿命θ为

$$\theta=\int_0^\infty R(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda} \tag{1.39}$$

可见，指数分布的平均寿命（MTBF）为失效率λ的倒数。通常由于失效率λ很小时，平均寿命θ很大，很可能有一些样品观测很长时间也难以得出平均寿命。为此在试验中常采用“截尾寿命试验”，也就是在试验到一定时间或达到一定的失效数时停止试验。

对于指数分布的产品，在平均寿命时间内的可靠度为

$$R(\theta)=e^{-\frac{\lambda}{\lambda}}=e^{-1}=0.368$$

即指数分布的平均寿命是对应于可靠度水平为0.368（或36.8%）的时间。这说明产品在平均寿命时间的可靠度是很低的，因此为了使产品可靠度比较高，产品的工作时间t应远小于平均寿命。例如为了保证产品有0.99的可靠度，这时根据指数分布的可靠寿命计算，可得

$$R=e^{-\lambda t_r}=r$$

即 $$t_r=-\frac{\ln r}{\lambda}=-\frac{\ln 0.99}{\lambda}=0.01\cdot\frac{1}{\lambda}=0.01\theta=\theta\times 1\%$$

这说明产品可靠度要求为0.99的工作时间t不应大于平均寿命的1%。产品的中位寿命为$t_{0.5}=0.693/\lambda$，二者都比平均寿命$1/\lambda$小。

指数分布还有一个重要性质——无记忆性。设产品寿命T服从指数分布，则对任意二个正数s和t有

$$P(T>s+t\,|\,T>s)=\frac{P(T>s+t,\ T>s)}{P(T>s)}=\frac{P(T>s+t)}{P(T>s)}$$

$$=\frac{R(s+t)}{R(s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=R(t)=P(T>t)$$

这表明产品已工作了s小时，则它再工作t小时的可靠度与已工作的时间s小时无关，所以有人称指数分布是"永远年青的"。

例 设某元件的寿命T服从指数分布，它的平均寿命为5000小时，试求其失效率和使用125小时后的可靠度。

解 根据题意有

$$平均寿命\ \theta=\frac{1}{\lambda}=5000小时$$

所以失效率为

$$\lambda=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{5000}=0.2\times 10^{-3}/小时$$

当$t=125$小时时，$\lambda t=0.2\times10^{-3}\times125=0.025$，在$\lambda t$较小时有近似公式：

$$R(t)=e^{-\lambda t}\doteq 1-\lambda t$$

所以 $$R(125)\doteq 1-0.025=0.975$$

二、Γ-分布

Γ-分布是指数分布的一种推广。有这样一种产品，它能经受若干次外界冲击，但到第k次冲击来到时，产品才失效。假如在时间（0，t）内产品受到的冲击次数x满足泊松分布的条件，那么当$k=1$时，这种产品的寿命分布就是指数分布。当k为任意自然数时，产品的寿命就是第k次冲击来到的时间，记这个时间为T。那么T是一个随机变量，它的可靠度函数为

$$R(t)=P(T>t)=P(在(0,\ t)内出现冲击不超过k-1次)$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}P(x=i)\tag{1.40}$$

这里的随机变量x表示在时间（0，t）内受到的冲击次数，它服从泊松分布。所以

$$R(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\tag{1.41}$$

而T的失效密度为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -R'(t) \\
&= -\left(-\lambda e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} + e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i\lambda(\lambda t)^{i-1}}{i!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} \right) \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t} \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

这就是Γ-分布。它含有二个参数k与λ，当k＝1时，它是指数分布；当k为正整数时，它称为爱尔兰分布；当k为正实数时，它就是Γ-分布。图1-11表示λ＝1时，k＝1/2，1，2，3的Γ-分布的密度函数曲线。从图上可以看出，参数k决定了Γ-分布的形状，故称k为形状参数，而称λ为尺度参数，相比之下，形状参数k更为重要一些。

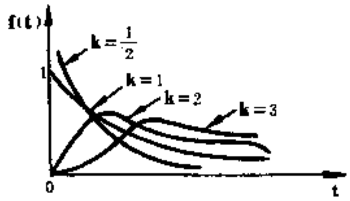

图 1-11 Γ-分布的密度函数曲线

Γ-分布的平均寿命与方差可以算出，为此先对任意自然界L计算 $E(T^l)$。

$$
\begin{aligned}
E(T^l) &= \int_0^\infty t^l f(t)\,dt = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k+l-1} e^{-\lambda t}\,dt \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \frac{\Gamma(k+l)}{\lambda^{k+l}} \\
&= \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{\lambda^l} \qquad (1.43)
\end{aligned}
$$

于是

$$
E(T) = \frac{k}{\lambda} \qquad (1.44)
$$

$$
\begin{aligned}
D(T) &= E(T^2) - E^2(T) \\
&= \frac{k(k+1)}{\lambda_2} - \frac{k^2}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2} \qquad (1.45)
\end{aligned}
$$

可见，Γ-分布的平均寿命与方差是指数分布的平均寿命与方差的k倍。这并非偶然的巧合，而是可从Γ-分布的卷积公式得到的。当Γ-分布的尺度参数λ不变时，如图1-12所示，服从Γ-分布的寿命T可以分解为k个相互独立的，且皆服从指数分布的随机变量T_1，T_2，…，T_k之和，即

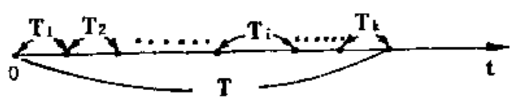

图 1-12 Γ-分布的寿命分布

$$
T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k
$$

这里T_i可以看作为第i－1次到第i次冲击来到的间隔时间。

Γ-分布的失效率为