LM
朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

● 学科专题研究系列丛书 ●

主编 张志朝

数学专题

ShuXueZhuanTiYanJiu

研究

总主编 宋伯涛

高中数学解题方法集锦

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

高中数学解题方法集锦

主编　张志朝

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

高中数学解题方法集锦

主编　张志朝

*

中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号　邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷　新华书店总经销

*

850×1168　1/32　11.25印张　310千字
2001年8月北京第1版　2001年8月北京第1次印刷
定价:13.00元
ISBN 7-5006-4542-2/G·1335

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上"朗曼专题"、"北京朗曼教学与研究中心教研成果"等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及"宋伯涛总主编"名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局100101－89号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编100101。
本中心 E-mail:SPTJWLSQ@163bj.com

出 版 前 言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册，分别为：1. 集合与简易逻辑；2. 函数及其性质；3. 数列、极限、数学归纳法；4. 三角函数；5. 向量；6. 方程与不等式；7. 排列、组合和概率；8. 直线、平面、简单几何体；9. 直线与二次曲线；10. 怎样解高中数学选择题；11. 怎样解高中数学应用题；12. 高中数学解题方法集锦；13. 高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历“做数学”的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间仓促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

目　录

第一讲　集合问题解法琐谈

集合是高中数学的重要基础知识，它贯穿于整个中学数学教学之中，并且作为一种数学语言和工具在其他数学问题中有广泛的应用，在高考中，它也是年年必考的内容之一，集合问题一般有两种类型，一是涉及集合本身的问题；二是以集合为载体，综合其他数学知识构成的综合题，本讲探讨集合问题的一般性解法，供同学们解相关问题时作参考.

1. 利用集合概念

例 1　设 $A=\{(x,y)\mid|x+1|+(y-2)^2=0\}$，$B=\{-1,2\}$则必有　（　）.

A. $A\supset B$　　B. $A\subset B$　　C. $A=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

分析：学生易错选 C. 错因是未正确理解集合概念，误以为 $A=\{-1,2\}$，其实 $\{(x,y)\mid|x+1|+(y-2)^2=0\}=\{(-1,2)\}$，$A$ 是点集而 B 是数集，故正确答案应选 D.

例 2　$M=\{y\mid y=x^2-1,x\in R\}$，集合 $N=\left\{x\mid y=\sqrt{3-x^2}\right\}$，则 $M\cap N$ 等于　（　）.

A. $\left\{\left(-\sqrt{2},1\right),\left(\sqrt{2},1\right)\right\}$　B. $\left[0,\sqrt{3}\right]$

C. $\left[-1,\sqrt{3}\right]$　D. $\varnothing$

分析：集合 M 中的元素是 y，它表示函数 $y=x^2-1$ 的值域，集合 N 中的元素是 x，它表示函数 $y=\sqrt{3-x^2}$的定义域.

由 $M\{y\mid y\geqslant-1\}$，$N=\left\{x\mid-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\right\}$，知 $M\cap N=\left\{t\mid-1\leqslant t\leqslant\sqrt{3}\right\}$，因此选 C.

说明：此题易误认为是求两条曲线的交点，搞清楚集合中元素的特征，正确理解集合概念是解题的关键.

2. 利用集合性质

例 3　已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a\neq0$. 若 $M=N$，求 q 的值.

解：$\because$　$M=N$，

$\therefore$ 对应元素相等，且有两种情形：

$\begin{cases}a+d=aq, ①\\ a+2d=aq^2. ②\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}a+d=aq^2, ③\\ a+2d=aq. ④\end{cases}$

由①、②解得 $q=1$，则 $a=aq=aq^2$，与集合中元素的互异性矛盾.

由③、④解得 $q=-\dfrac{1}{2}$，$q=1$（舍去）.

$\therefore \quad q=-\dfrac{1}{2}$.

说明：利用集合元素的无序性，得到两个方程组，求出 q 值后要检验，排除与集合元素的互异性或题设条件相矛盾的情况.

3. 利用集合运算

集合的交、并、补运算是高考对集合内容考查的重点. 利用集合交、并、补的定义解题，关键是对交、并、补概念的正确理解.

例 4 设 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$，$B=\{x\,|\,x^2+4x+3<0\}$，求集合 C，使其同时满足下列三个条件：① $C\subseteq(A\cup B)\cap Z$（$Z$ 是整数集）；② C 有两个元素；③ $C\cap B\neq\varnothing$.

分析：由条件①、②知集合 C 中有且仅有两个元素，且为整数，因为 $B=\{x\,|\,x^2+4x+3<0\}=\{x\,|\,-3<x<-1\}$，由条件③知 $-2\in C$. 因为 $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cup B=\{x\,|\,-3<x<-1\}\cup\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}=\{x\,|\,-3<x\leqslant 1\}$，从而可知 $C=\{-2,-1\}$ 或 $\{-2,0\}$ 或 $\{-2,1\}$.

例 5 已知 $A=\{x\,|\,x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\,|\,\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\,|\,x^2+2x-8=0\}$. 若 $\varnothing\subset A\cap B$，且 $A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

解：$\because \quad B=\{x\,|\,\log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{2,3\}$，$C=\{x\,|\,x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$.

由 $A\cap C=\varnothing$ 知 $-4\notin A$，$2\notin A$.

$\because \quad \varnothing\subset A\cap B$，$\therefore \quad 3\in A$，

$\therefore \quad 9-3a+a^2-19=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，与 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\,|\,x^2+2x-15=0\}=\{-5,3\}$，满足 $A\cap C=\varnothing$.

$\therefore\ A=-2.$

4. 利用空集的特性

空集是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，利用空集的这一特性，可使一些题设中隐含有空集条件的问题得以正确解决.

例 6　已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in R\}$，若 $A\cap R^+=\varnothing$，求 P 的取值范围.

分析：正确理解条件 $A\cap R^+=\varnothing$ 是解题的关键. $A\cap R^+=\varnothing$ 包含两种情况：(1)A 中元素不是正数；(2)A 是空集.

解：$\because\ A\cap R^+=\varnothing$，

$\therefore$ 集合 A 有以下两种情况：

(1)$A\neq\varnothing$，即方程 $x+(p+2)x+1=0$ 有两个非正数解，其充要条件是

$$\begin{cases} p+2>0 \\ (p+2)^2-4\geqslant 0 \end{cases}$$

解得 $p\geqslant 0$.

(2)$A=\varnothing$，即方程 $x+(p+2)x+1=0$ 无实数根，所以判别式 $\Delta=(p+2)^2-4<0$，解得 $-4<p<0$.

综上可得实数 p 的取值范围是 $p>-4$.

5. 数形结合

当集合中的元素具有明显的几何意义时，则可充分利用"形"的直观性，通过数与形的相互转化使问题获解.

例 7　已知集合 $A=\{x\mid \lg(x-a+1)<\lg 2\}$，$B=\{x\mid (x-a)(x-2)>0\}$. 若 $A\cup B=R$，求实数 a 的取值范围.

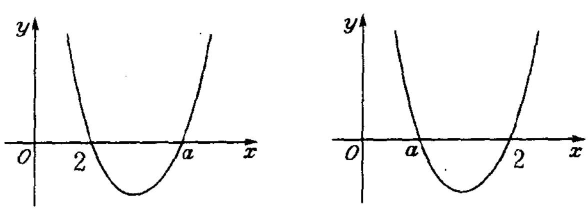

图 1

分析：此题若用代数方法通过解不等式求 a 的范围，需分情况进行讨论，若数形结合，则可使问题获得简捷解法.

解：$A=\{x|\lg(x-a+1)<\lg 2\}=\{x|a-1<x<a+1\}$.

设 $f(x)=(x-a)(x-2)$，作出它的草图，由图可知 $A\cup B=R$ 的充要条件是

$$\begin{cases}f(a-1)>0,\\f(a+1)>0.\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}3-a>0,\\a-1>0.\end{cases}\therefore\quad 1<a<3.$$

6. **合理转化**

集合问题一般都是用符号语言表述的，因而较抽象，解题过程中常需把集合语句转化成熟悉的非集合表述的问题，这样有利于运用熟知的方法解决问题.

例 8　设全集 $I=\{(x,y)|x\in R,y\in R\}$，$A=\{(x,y)|\dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，$B=\{(x,y)|y=x+1\}$，求 $\overline{A}\cap B$.

分析：将集合 A 转化为直线 $y=x+1$ 上去掉点 $(2,3)$ 的全体点集，从而集合 $\overline{A}=\{(2,3)\}\cup\{$不在 $y=x+1$ 上的全体点集$\}$，集合 B 转化为直线 $y=x+1$ 上的全体点集，于是 $\overline{A}\cap B=\{(2,3)\}$.

例 9　已知函数 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f(x-1)=x+1\}$，当 $A=\{2\}$ 时，求集合 B.

分析：由于 $f(x)=x$，从而得 $x^2+(p-1)x+q=0$，将 $A=\{2\}$ 换一种说法，即是方程 $x^2+2(p-1)x+q=0$ 有等根 2，这样就变成了我们熟悉的问题. 利用韦达定理可求得 $p=-3$，$q=4$，所以 $f(x)=x^2-3x+4$，从而求得 $B=\{x|f(x-1)=x+1\}=\{x|x^2-6x+7=0\}=\{3+\sqrt{2},3-\sqrt{2}\}$.

7. **分类讨论**

对一些含参数的集合问题，常需要进行分类讨论求解.

例 10　设 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

分析：当 $-2\leqslant x\leqslant a$ 时，$z=x^2$ 的范围与实数 a 取值的正负号，$|a|$ 与 2 的大小均有关系，因此必须对 a 分情况进行讨论，从而得到集合 C，再根据 $C\subseteq B$，求出 a 的取值范围.

解：$\because\quad A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，

$\therefore\quad B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$

$=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$.

(1)当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时,$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$,因为 $C\subseteq B$,所以 $4\leqslant 2a+3$,解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$,与 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 矛盾.

(2)当 $0<a\leqslant 2$ 时,$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$,因为 $C\subseteq B$,所以 $4\leqslant 2a+3$,解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$,故 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$.

(3)当 $a>2$ 时,$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$,因为 $C\subseteq B$,所以 $a^2\leqslant 2a+3$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$,故 $2<a\leqslant 3$.

综上可得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

8. 补集思想

对于一个有限集 A,有时它的元素之和不易求出,但它的补集 C_UA 的元素之和恰容易求出,那么,此时我们可先求出 C_UA 的元素之和. 再利用:A 的元素之和等于全集的元素之和与 C_UA 的元素之和的差,就可求出 A 的元素之和.

例 11　已知集合 $A=\{x\mid x\neq 2n$ 或 $x\neq 3n,n\in N,x\in N,1\leqslant x\leqslant 100\}$,试求出集合 A 的元素之和.

解:设 $U=\{1,2,3,4,\cdots\cdots,100\}$. 则 $C_UA=\{x\mid x=2n$ 且 $x=3n,)\ \ n\in N,1\leqslant x\leqslant 100\}=\{x\mid x=6n,n\in N,1\leqslant x\leqslant 100\}$

于是集合 A 的元素之和 $=(1+2+3+\cdots\cdots+100)-(6+12+18+\cdots\cdots+96)=5050-816=4234$.

【强化训练】

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$,$C=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$,若 $B\subsetneqq A$,$C\subseteq A$,求实数 a、b 的值.
2. 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$且 $A=B$,试求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots\cdots+\left(x^{2002}+\frac{1}{y^{2002}}\right)$ 的值.
3. 已知 $A=\{x\mid x\neq 3n$ 且 $x\neq 5n,n\in N,x\in N,1\leqslant x\leqslant 100\}$,试求出集合 A 的所有元素之和.
4. 设集合 $A=\{x\mid |2x-x^2|\leqslant x\}$,$B=\left\{x\mid \left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}$,$C=\{x\mid ax^2+x+b<0\}$,若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,且 $(A\cup B)\cup C=R$,求 a、b 的值.

【强化训练解答】

1. 解：$A=\{1,2\}$，由 $B\subsetneqq A$ 故 B 有三种可能：$B=\varnothing$、$B=\{1\}$、$B=\{2\}$，又∵ 方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的根为 1 和 $a-1$，

∴ B 只有一种可能 $a-1=1$，∴ $a=2$.

由 $C\subseteqq A$，显然当 $b=3$ 时，$A=C$，另一种情况是 $C=\varnothing$，即 $b^2-8<0$，∴ $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

综上所述，$a=2$，$b=3$ 或 $b\in\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

2. 解：∵ $\{0,|x|,y\}=\{x,xy,\lg xy\}$

∴ $0\in\{x,xy,\lg xy\}$，若 $x=0$ 或 $xy=0$ 则 $\lg xy$ 无意义. 故 $x\neq 0$ 且 $xy\neq 0$. 所以只能是 $\lg xy=0$，

∴ $xy=1$. 于是 $1\in\{0,|x|,y\}$

∴ $|x|=1$ 或 $y=1$.

若 $y=1$，则由 $xy=1$ 可知：$x=1$. 而这与集合 $\{x,xy,\lg xy\}$ 的元素互异性相矛盾. 故 $y\neq 1$.

所以必有 $|x|=1$. ∴ $x=-1$ 或 $x=1$.

若 $x=1$，则由 $xy=1$ 可知又与集合 $\{x,xy,\lg xy\}$ 的元素互异性相矛盾.

因此 $x=-1$. 又∵ $xy=1$，∴ $y=-1$.

于是
$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots\cdots+\left(x^{2002}+\frac{1}{y^{2002}}\right)$$
$$=\left(-1+\frac{1}{-1}\right)+\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(-1+\frac{1}{-1}\right)+\left(1+\frac{1}{1}\right)+\cdots\cdots+\left[(-1)^{2002}+\frac{1}{(-1)^{2002}}\right]$$
$$=-2+2-2+\cdots\cdots-2+2$$
$$=0.$$

3. 解：设 $U=\{1,2,3,\cdots\cdots,100\}$.

则 $C_uA=\{x\mid x=3n$ 或 $x=5n,n\in N,1\leqslant x\leqslant 100\}$.

先求补集 C_uA 的元素之和：$(3+6+9+\cdots\cdots+99)+(5+10+15+\cdots\cdots+100)-(15+30+45+60+75+90)=1683+1050-315=2418$.

故 A 的所有元素之和为：

$(1+2+3+\cdots\cdots+100)-2418=5050-2418=2632$.

4. 解：$A=\{x|x=0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=[0,1)$

$\therefore\quad A\cup B=[0,3]$.

由于$(A\cup B)\cap C=\varnothing$且$(A\cup B)\cup C=R$，

$\therefore\quad C=C_R(A\cup B)$

$\therefore\quad C=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.

从而 $ax^2+x+b=a(x-0)(x-3)<0(a<0)$

故 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=0$.

第二讲　抽象型函数问题的解题策略

抽象型函数问题是指没有明确给出具体函数表达式的问题.这类问题对发展学生的思维能力,进行数学思维方法的渗透,有较好的作用,但因其比较抽象,学生往往难以入手.本文就这类问题的解题策略谈点看法.

一、通过类比,探索思路方法

例 1　已知 $f(x)$是定义在实数集 R 上的函数,且 $f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$,$f(0)=2-\sqrt{3}$,求 $f(1996)$的值.

分析:由条件知 $f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$,利用此式和 $f(0)=2-\sqrt{3}$,逐步递推求出 $f(1996)$,显然较繁琐,若将此式与 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$进行类比,则结构形式类似,而 $\tan x$ 的周期为 $\pi=4\times\dfrac{\pi}{4}$,于是便产生一个念头,$f(x)$也是周期函数,周期为 $4\times2=8$.我们不妨来证明这一猜想.

$$f(x+4)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

$$f(x+8)=f(x+4+4)=-\frac{1}{f(x+4)}=-\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}=f(x).$$

于是猜想成立,从而有

$$\begin{aligned}f(1996)&=f(249\times8+4)=f(4)=f(0+4)\\&=-\frac{1}{f(0)}=-\frac{1}{2-\sqrt{3}}\\&=-2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

二、运用特殊化,推测问题结论

例 2　若对于任意正数 x、y,总有 $f(xy)=f(x)+f(y)$,那么下列各式错误的是　　　　　　　　　　(　　).