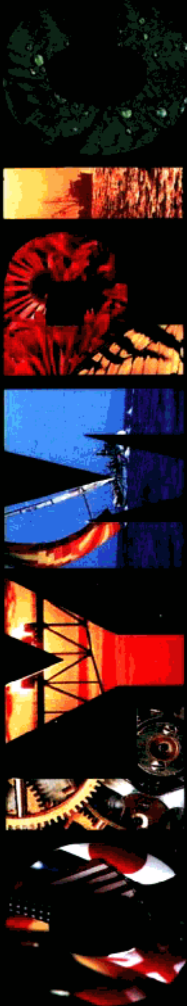
初三年级 SHU XUE

（普及本修订版）



数　学
奥林匹克教材

中国教育学会数学教育研究发展中心 审定

首都师范大学出版社

shuxue
aolinpike
jiaocai

奥林匹克

首都师大奥林匹克图书
助你叩击成功之门

目　录

一、方 程 的 根

根的概念是代数方程一般理论的源泉与命脉，但是同学们往往忽略此点，因此切实掌握根的概念实属关键的关键.

(一)验根

例 1 若 $a+b+c=0$，则一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

必有一个根是 1.

证明 将 $x=1$ 代入原方程：

左边 $=a\times1^2+b\times1+c=a+b+c=0=$ 右边（合）

故 1 是原方程的根.

说明 系数之和为零的方程必有一个根是 1，此点可作为常识. 例如

$$2x^2-3x+1=0$$

有一个根是 1；

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$

也有一个根是 1.

例 2 试证明 $\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

证明 将 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 代入原方程：

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=a\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c\\
&=a\left(\frac{b^2\mp2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-4ac}{4a^2}\right)+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c\\
&=\frac{2b^2\mp2b\sqrt{b^2-4ac}-4ac}{4a}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c
\end{aligned}$$

$$=\frac{b^2\mp b\sqrt{b^2-4ac}-2ac}{2a}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{2ac}{2a}$$

$=0=$右边(合)

故 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

说明 既然标明 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程,由定义那就表明 $a\neq0$ 了.

例 3 方程 $x^2+|x|+1=0$ 有( )个实数根

(A)4 (B)2 (C)1 (D)0

解 ∵ $x^2+|x|+1\geqslant0+0+1=1>0$

∴ 原方程无实数根.

故选(D).

例 4 设方程 $x^2+px+q=0$ 的两实根为 a,b 且有 $l_1=a+b$, $l_2=a^2+b^2,\cdots,l_n=a^n+b^n$,则当 $n\geqslant3$ 时,$l_n+pl_{n-1}+ql_{n-2}=$______.

解 将 $l_n=a^n+b^n,l_{n-1}=a^{n-1}+b^{n-1},l_{n-2}=a^{n-2}+b^{n-2}$代入到原式中,则

$$\begin{aligned}&l_n+pl_{n-1}+ql_{n-2}\\&=(a^n+b^n)+p(a^{n-1}+b^{n-1})+q(a^{n-2}+b^{n-2})\\&=a^{n-2}(a^2+pa+q)+b^{n-2}(b^2+pb+q)\\&=a^{n-2}\times0+b^{n-2}\times0=0\end{aligned}$$

说明 此题实质上证明了下述命题:

$l_n=a^n+b^n$ 是方程 $l_n+pl_{n-1}+ql_{n-2}=0$ 的解.

例 5 已知两数积 $ab\neq1$,且 $2a^2+1234567890a+3=0,3b^2+1234567890b+2=0$,则$\frac{a}{b}=$________.

解 由 $3b^2+1234567890b+2=0$,知 $b\neq0$,又 $ab\neq1$,故 $a\neq\frac{1}{b}$.

a 是方程 $2x^2+1234567890x+3=0$ 的一个根,b 是方程 $3y^2+1234567890y+2=0$ 的一个根,所以 $\frac{1}{b}$ 是 $3\left(\frac{1}{y}\right)^2+1234567890$

$\left(\frac{1}{y}\right)+2=0$ 的根，即$\frac{1}{b}$是 $2y^2+1234567890y+3=0$ 的一个根.

故　a，$\frac{1}{b}$是方程 $2x^2+1234567890x+3=0$ 的两个不同的根.

∴　$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{3}{2}$.

说明　最后一步用到了韦达定理.

(二)已知方程的根，求其他参变量

例 6　已知$\frac{1}{2}$是方程

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{2x+5}{2}=\frac{6x-m}{4}-1 \quad ①$$

的根，求 m.

解　因为$\frac{1}{2}$是方程①的根，所以 $x=\frac{1}{2}$适合方程①，即

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{2}-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+5}{2}=\frac{6\left(\frac{1}{2}\right)-m}{4}-1$$

即　$0-3=\frac{3-m}{4}-1$，

故　$m=11$.

例 7　若 $x=0.5$ 能使方程 $2x^2-3x+a=0$ 成立，则 $a=$____，方程的根是____.

解　因为 $x=0.5$ 适合方程，所以

$$2\times0.5^2-3\times0.5+a=0$$

故　$a=1$，方程为 $2x^2-3x+1=0$.

由于系数之和为零，故方程的另一根为 1，即方程的两根为 0.5 与 1.

说明　如果用韦达定理，则 $0.5+x_2=\frac{3}{2}$，所以 $x_2=1$.

例 8　设 a、b 是整数，方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个根是 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$，则 $a+b=$______.

解 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{2^2-2(2)(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$=2-\sqrt{3}$是方程的根.

$\therefore\quad (2-\sqrt{3})^2+a(2-\sqrt{3})+b=0$

$\Rightarrow(7+2a+b)-(4+a)\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}7+2a+b=0\\4+a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=1\end{cases}$

$\Rightarrow a+b=-4+1=-3.$

说明 若$s+r\sqrt{t}=0$,s、r、t是有理数且$\sqrt{t}$是无理数,则$s=r=0$.

(三)一元二次方程的根

例9 若m、n是有理数,$\sqrt{n}$是无理数,$m+\sqrt{n}$是一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{①}$$

的一个根,则$m-\sqrt{n}$也是方程①的一个根.

证明 因为$m+\sqrt{n}$是方程的一个根,所以

$a(m+\sqrt{n})^2+b(m+\sqrt{n})+c=0$

$\Rightarrow(am^2+an+bm+c)+(2am+b)\sqrt{n}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}am^2+an+bm+c=0\\2am+b=0\end{cases}$

将$m-\sqrt{n}$代入方程①,得

左边$=a(m-\sqrt{n})^2+b(m-\sqrt{n})+c$

$=(am^2+an+bm+c)-(2am+b)\sqrt{n}$

$=0-0\cdot\sqrt{n}$

$=0=$右边

故 $m-\sqrt{n}$也是方程①的一个根.

说明 $m+\sqrt{n}$,$m-\sqrt{n}$称为一元二次方程①的一对共轭根.

共轭根总是成对出现.

例 10 一元二次方程至多只能有二个不同的根.

证明 (利用反证法)假如方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \tag{①}$$

有三个不同的根 x_1,x_2,x_3,则

$$ax_1^2+bx_1+c=0 \tag{②}$$

$$ax_2^2+bx_2+c=0 \tag{③}$$

$$ax_3^2+bx_3+c=0 \tag{④}$$

②-③得

$$a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0 \tag{⑤}$$

$\because$ $x_1\neq x_2$,$\therefore$ $x_1-x_2\neq 0$,⑤的两边除以 x_1-x_2 得

$$a(x_1+x_2)+b=0 \tag{⑥}$$

②-④得

$$a(x_1^2-x_3^2)+b(x_1-x_3)=0 \tag{⑦}$$

$\because$ $x_1\neq x_3$,$\therefore$ $x_1-x_3\neq 0$,⑦的两边除以 x_1-x_3 得

$$a(x_1+x_3)+b=0 \tag{⑧}$$

⑥-⑧得

$$a(x_2-x_3)=0 \tag{⑨}$$

$\because$ $x_2\neq x_3$,$\therefore$ $x_2-x_3\neq 0$,⑨的两边除以 x_2-x_3 得 $a=0$,与 $a\neq 0$ 矛盾.

故方程①至多有两个不同的根.

说明 此点可作为观察法解一元二次方程的理论基础.例如解方程$(x+1)(x+3)=8$:

由于$(x+1)(x+3)=2\times 4=(-4)(-2)$

$\therefore$ $x+1=2$ 或 $x+1=-4$.

故 $x=1$ 或 $x=-5$.

由于一元二次方程至多有两个不同的根,故 1,-5 是此方程全

部的根.

小结 以方程的根的概念作基础,可以建立起同解方程、结果方程的概念与理论.后者也是解分式方程与无理方程时必须验根的理论依据.

习 题 一

1. 若 $a-b+c=0$,则 -1 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根.

2. 试证:0 是方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0(a_0\neq0)$ 的一个根.

3. 若 $1,\frac{1}{2}$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根,求 a、b.

4. 若 m 是方程①:$ax^2+bx+a=0(a\neq0)$ 的一个根,则 $\frac{1}{m}$ 也是方程①的一个根.

5. 若 $-\frac{b}{2a}+\sqrt{k}$ 是方程①:$ax^2+bx+c=0$ 的一个根,则 $-\frac{b}{2a}-\sqrt{k}$ 也是方程①的一个根.

6. 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)x^2-2(a+1)x+1=0$ 恰有一个实根,a 应取值为________.

7. 若 $\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根(其中 a、b 是有理数),则 ab 为(　　).

8. 若 q_1、q_2 是 $x^2+ax+b=0$ 的两个实根,且 $q_1\neq q_2$,$b\neq0$,又 c_1、c_2 是任意两个实数,则 $x_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n$ 是方程 $x_n+ax_{n-1}+bx_{n-2}=0$ 的解.

9. 如果 a 是 $x^2-3x+1=0$ 的根,试求 $\frac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2}{a^2+1}$ 的值.

二、一元二次方程的解法

在一元方程中，一元一次方程的解法很简单，而一般的三次、四次方程求根公式很繁复，四次以上的方程在理论上又无求根公式，因此对于一元二次方程的解法，就占有举足轻重的地位了.

(一)因式分解法

因式分解法是基于这样一个原理：

$f_1f_2\cdots f_n=0$ 的充要条件是 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个为零.

例 1 解方程 $(7x+3)(2x+5)(3x-2)=0$.

解 $7x+3=0$ 或 $2x+5=0$ 或 $3x-2=0$

$\therefore\quad x_1=-\frac{3}{7},x_2=-2\frac{1}{2},x_3=\frac{2}{3}$.

例 2 解方程 $x^2+4x-5=0$

解 因为 $1+4-5=0$，所以有一个根为 1，因而 x^2+4x-5 必有一个因子 $x-1$；

$$x^2+4x-5=(x^2-x)+(5x-5)$$
$$=x(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x+5)$$
$$(x-1)(x+5)=0$$

$\Rightarrow x-1=0$ 或 $x+5=0$

故 $x_1=1,x_2=-5$.

说明 利用韦达定理容易求出另一个根 x_2：

$\because\quad 1+x_2=-4,\therefore\quad x_2=-5$.

例 3 设 a,b 是自然数，定义运算“$*$”为 $a*b=a^2+a+b^2+b$，则方程 $x*(x+2)=14$ 的正整数解 $x=$________.

解 由 $x*(x+2)=14$ 得

$$x^2+x+(x+2)^2+(x+2)=14$$

$\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow(x-1)(x+4)=0$

$\Rightarrow x-1=0$ 或 $x+4=0\Rightarrow x_1=1$ 或 $x_2=-4$（不合）

故　$x=1$.

说明　利用韦达定理很方便地即求出另一根 x_2：

$\because$　$1\cdot x_2=-4$，

$\therefore$　$x_2=-4$.

例 4　方程 $x^2+1998x+1997\cdot1999=0$ 的两个根中较大的根是________.

解　$\because$　$1997\cdot1999=(1998-1)(1998+1)=1998^2-1$，

$\therefore$　原方程可变为：

$x^2+1998^2x+(1998^2-1)=0$

$\because$　$1-1998^2+(1998^2-1)=0$，

$\therefore$　原方程有一个根 $x_1=-1$.

$(x^2-1)+1998^2(x+1)=0$

$\Rightarrow(x+1)(x-1+1998^2)=0$

$\Rightarrow x+1=0$ 或 $x-1+1998^2=0$

$\Rightarrow x_1=-1, x_2=1-1998^2$

故较大的根为 -1.

说明　利用韦达定理知

$$(-1)+x_2=-1998^2,\quad x_2=1-1998^2.$$

例 5　证明方程 $x^3-x-1999=0$ 没有整数解.

解　$\because$　$x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$，

$\therefore$　$(x+1)x(x-1)=1999$.

但　$(x+1)x(x-1)$ 是 3 的倍数，而 1999 不是 3 的倍数，故方程无整数解.

例 6　解关于 x 的方程：

$$abx^2+ab-(a^2+b^2)x=0$$

解　(1)当 $a=b=0$ 时，x 可为任意实数；

(2)当$\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$ 或$\begin{cases}a\neq 0\\b=0\end{cases}$ 时,$x=0$;

(3)当$\begin{cases}a\neq 0\\b\neq 0\end{cases}$时,$(ax-b)(bx-a)=0$,

$$ax-b=0\text{ 或 }bx-a=0$$

故 $x=\dfrac{b}{a}$或$x=\dfrac{a}{b}$.

(二)配方法

配方法源于开平方法:$f^2=a\Leftrightarrow f=\pm\sqrt{a}$.

例 7 利用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

解 将方程两边都乘以 $4a$,得

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac$$

$$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

$$\Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$$

$$\Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\Rightarrow 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

配方方法本身也很重要,由下面的例 8 可见其技巧.

例 8 把关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 配方成为 $a(x-2)^2+b(x-2)+c=0$ 的形式,得________.

解法 1 $(x^2-4x+4)+4x-4-2x+2=0$

$$(x-2)^2+2x-4+2=0$$

$$(x-2)^2+2(x-2)+2=0$$

解法 2 (利用换元法)

设 $y=x-2$,则 $x=y+2$

$$x^2-2x+2=(y+2)^2-2(y+2)+2$$

$$=y^2+4y+4-2y-4+2=y^2+2y+2$$

$=(x-2)^2+2(x-2)+2$

$\therefore\quad (x-2)^2+2(x-2)+2=0$

解法 3 （待定系数法）显然可设

$$x^2-2x+2=(x-2)^2+b(x-2)+c$$

由于两边恒等，故当 $x=2$ 时两边也相等

$$2^2-2\times2+2=0^2+b\times0+c$$

$\therefore\quad c=2$

$\Rightarrow x^2-2x+2=(x-2)^2+b(x-2)+2$

$\Rightarrow x(x-2)=(x-2)^2+b(x-2)$

$\Rightarrow x=(x-2)+b\Rightarrow b=2$

$\therefore\quad (x-2)^2+2(x-2)+2=0$

例 9 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 且 $x+2y=1$，那么 $x+3y^2$ 的最小值是____.

解 $x+2y=1\Rightarrow x=1-2y$ 代入得

$$x+3y^2=1-2y+3y^2=3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

故 当 $y=\frac{1}{3}$ 时，$x+3y^2$ 有最小值 $\frac{2}{3}$.

例 10 如果多项式

$$p=2a^2-8ab+17b^2-16a-4b+1990$$

那么 p 的最小值等于________.

解 $\because$
$$\begin{aligned}p&=2(a^2-4ab+4b^2)+9b^2-16a-4b+1990\\&=2(a-2b)^2-16(a-2b)+9b^2-36b+1990\\&=2[(a-2b)-8(a-2b)+16]+9b^2-36b+1958\\&=2(a-2b-4)^2+9(b^2-4b+4)+1922\\&=2(a-2b-4)^2+9(b-2)^2+1922\end{aligned}$$

$\therefore$ 当且仅当 $\begin{cases}a-2b-4=0\\b-2=0\end{cases}$ 时，p 有极小值.

即 当 $\begin{cases}a=8\\b=2\end{cases}$ 时，$p_{\min}=1922$.

（三）公式法

例 11 解关于 x 的方程 $x^2-3mx+2m^2-mn-n^2=0$.

解 $\because$ b^2-4ac

$$=(-3m)^2-4\times1\times(2m^2-mn-n^2)$$

$$=9m^2-8m^2+4mn+4n^2$$

$$=m^2+4mn+4n^2=(m+2n)^2$$

$\therefore$ $x_{1,2}=\dfrac{3m\pm(m+2n)}{2}$

$x_1=2m+n, x_2=m-n$.

例 12 方程 $x^2-|x|-1=0$ 的解是（　　）.

(A) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$； (B) $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；

(C) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$； (D) $\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

解 $|x|^2-|x|-1=0$

$\Rightarrow|x|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $|x|=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（不合）

$\Rightarrow x=\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

故选(D).

例 13 方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$ 的两个实根的大小关系是（　　）.

(A) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geqslant\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(B) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(C) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\leqslant\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(D) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

解 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x_1-x_2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

$\because \begin{cases}\sqrt{b^2-4ac}\geqslant 0\\ a<0,\end{cases} \quad \therefore \quad x_1-x_2\leqslant 0\Rightarrow x_1\leqslant x_2.$

故选(A).

例 14 关于 x 的方程 $6x^2=(2m-1)x+m+1$ 有一根 α,满足不等式:$-1988\leqslant\alpha\leqslant 1988$,且使得 $\frac{3}{5}\alpha$ 为整数,则 m 可取(　　)个值.

(A)6627　　(B)3977　　(C)2385　　(D)1989

解 将原方程化为 $6x^2-(2m-1)x-(m+1)=0$.

$\because$ α 是方程的根,

$\therefore$ $6\alpha^2-(2m-1)\alpha-(m+1)=0$.

$$\alpha=\frac{(2m-1)\pm\sqrt{(2m-1)^2+24(m+1)}}{12}$$

$$=\frac{2m-1\pm\sqrt{(2m+5)^2}}{12}=\frac{2m-1\pm(2m+5)}{12}$$

$\alpha_1=\frac{m+1}{3}$, $\quad\alpha_2=-\frac{1}{2}$(不合).

故 $-1988\leqslant\frac{m+1}{3}\leqslant 1988$

$\Rightarrow -5964\leqslant m+1\leqslant 5964$.

又 $\frac{3}{5}\alpha=\frac{m+1}{5}\in Z$,可设 $\frac{m+1}{5}=t$,则 $m=5t-1$,

$-5964\leqslant(5t-1)+1\leqslant 5964$

$\Rightarrow -1192\frac{4}{5}\leqslant t\leqslant 1192\frac{4}{5}$

则 $t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm1192$.

故 m 可取 $1192\times2+1=2385$ 个值.

小结 配方法是公式法的原理与依据,又可用来求极值.因此熟练掌握多种配方的方法与技巧是必不可少的训练.

习 题 二

1. 关于 x 的方程 $(x-p)^2=(x-q)^2$ 的解是________.

2. 如果 $2x^2-3x-1$ 与 $a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 是同一个多项式的不同形式，那么 $\frac{a+b}{c}=$________.

3. 方程 $|x|^2-7|x|+6=0$，各根的和________.

4. 解一元二次方程

$$(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$$

5. 解方程　$x^2+(1-3\sqrt{5})x+4+\sqrt{5}=0$

6. 解一元二次方程

$$ab(a^2+b^2)^2x^2-(a^2+b^2)^2x+a^2-b^2=0$$

*7. 已知 $M=4x^2-12xy+10y^2+4y+9$，当式中 x、y 各取何值时，M 的值最小？并求此最小值.