B.K.萨乌里耶夫

抛物型方程的网格积分法

科学出版社

抛物型方程的网格积分法

B. K. 薩烏里耶夫 著

袁 兆 鼎 譯

科 學 出 版 社

В. К. САУЛЬЕВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

ФИЗМАТГИЗ

Москва 1960

內 容 簡 介

本书系統地叙述了用网格法解抛物型偏微分方程的方法. 除介紹已有的方法之外，作者并提出了自己的新解法. 书中也注意到解法的实际应用，特别是在数字电子計算机上的应用.

本书共分两章，第一章叙述网格方程的形成及其收斂性和稳定性等；第二章叙述隐式网格方程的解法.

本书可作为在数字电子計算机上工作的程序設計人員、有关的科学技术人員以及計算数学专业的大学生的参考书.

抛物型方程的网格积分法

B. K. 薩烏里耶夫 著

袁 兆 鼎 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1963 年 12 月第 一 版	书号：2919　字数：235,000
1963 年 12 月第一次印刷	开本：850×1168 1/32
(京) 0001—3,200	印张：9 1/8

定价：1.50 元

序　　言

近些年来，大家很注意用网格法求数学物理方程数值解的問題。网格法特别适合于在程序控制的計算机上实現，因为这类方法的特点是对于每个节点相同运算环节的大量重复。随着新計算技术的发展，这类方法的应用范围异常地扩大了，因为这类方法的主要缺点——大量的重复运算——在应用計算机时已不起决定性的作用了。所以最近几年发表的网格法方面的文献，比快速計算机出現以前发表的全部文献还多几倍。

因为需要进行大量的計算工作，算法的稳定性便开始起主要作用。假若某步計算中产生的誤差(例如由于舍入产生的誤差)是振蕩的并且其絕对值增加，則方法是不稳定的。假若在以后的計算过程中，这个誤差是衰減的，則方法是稳定的。显然，只有稳定的方法才有实际价值。我們有趣地指出，在“用手”解拋物型方程的时候，仅能沿时間坐标軸計算不多的步数，这时不稳定的因素还来不及起作用。所以沒有及时地发現某些方法(例如李卡尔松法)的不稳定性。在利用現代計算机解大型問題的时候，这时必須沿时間坐标軸計算很多步数，关于稳定和不稳定因素的敏感度增加得非常快。

拋物型方程与双曲型方程比較起来，拋物型方程对稳定性特别敏感。例如取最簡单的拋物型方程$\partial U/\partial t=\partial^2U/\partial x^2$和边界条件为$U(0,t)=U(1,t)\equiv 0$的混合問題为例，当$t$增加时，这个方程的特解$e^{-n^2t}\sin n\pi x$減小得很快。

网格法过于粗糙，它不能永远很好地逼近这样的調和分量(即$e^{-n^2t}\sin n\pi x$——譯者注)。当t增加时，对应于这些調和分量的差分方程的特解可能增加很快(按絕对值)。相应方法的不稳定也就表現在这里。差分方法的不稳定性与低頻調和分量无关，而是与

高頻調和分量相联系着．照例这些高頻分量的富利叶系数很小，它們在計算准确度允許范围之內，在这种意义下，稳定性与“寄生性的”調和分量相联系着．

差分方程准确解收斂于微分方程解的問題，与差分方法的稳定性密切相关．在局部区域，微分方程的解等于相应差分方程的解加上逼近誤差．当差分方法不稳定时，这个誤差振蕩．所以一般講，这时差分方程的解不收斂于微分方程的解．反之，当差分方程稳定时逼近誤差衰減，一般講差分方程的解，当步长很小时接近微分方程的解，并且当网格无限縮小时收斂于微分方程的解．粗略地講，差分方法的两个基本概念（稳定性和向原微分方程解的收斂性）間的相互联系就是如此．

用网格法解抛物型方程时所产生的困难，基本上有如下两点．最簡单的网格法，乍一看来，从应用观点也是很誘惑人的方法，对稳定因素特别敏感，所以为了保証稳定性，必須对时間步长加上与空間步长有关的限制条件．另一方面，从稳定性观点看来很好的方法，实际应用并不方便．所以出現了一系列的研究工作，来寻求这样的解法：它在通常的意义下，是介于这两种极端类型的解法之間的解法，并能将較弱的稳定性限制，和較为不复杂的計算結合起来．这时还应当注意到另外的两个重要因素—近似解的准确度和程序設計的方便性（对于在現代大型計算机上工作来說是最重要的一个因素）．

本书的作者，在利用电子計算机数値解数学物理方程方面，有丰富的經驗．另一方面，他是网格法方面一系列理論工作的作者．在利用网格法解抛物型方程方面，作者自然較多地介紹了自己的工作，同时也对現代文献中关于这方面的問題，做了綜合介紹．这里的綜合介紹实际上可以認为是詳尽无遺的．相信作者的巨大工作，将会給那些必須接触这类問題的人們带来好处．

Л. А. 刘斯台尔尼克

作 者 序

我們知道,絕大多数的微分方程,特别是偏微分方程,不能用公式积分. 这时必須采用某种近似方法. 大量不同的偏微分方程近似积分方法中,网格法1)是最重要的方法之一.

网格法的文献基本上是杂志上的文章. 在非杂志的文献中,我們首先提出列宾基和費利波夫(Рябенький, Филиппов[1])的书,米克拉捷(Микеладзе[1])的书,帕諾夫(Панов[3])的手册,彼德罗夫斯基(Петровский[2])的书的附录,拉德仁斯卡婭(Ладыженская[1])的书,帕諾夫(Панов[4])的书,吉洪諾夫和薩馬尔斯基(Тихонов, Самарский[1])的书中六章四节和四章六节,康特洛維奇和克雷洛夫(Канторович, Крылов[1])的书中第三章,考拉慈(Collatz[4])书中第三章和第四章以及密尔納(Milne[1])书的第二部分.

由于椭圓型方程原則地区别于抛物型方程和双曲型方程,网格法对这两类微分方程的应用有很大的差别. 假如說,对椭圓型方程网格問題归結为解綫性代数方程組,那么抛物型和双曲型方程的情形则是(沿 t 軸)"按步地"解网格問題. 假如說,在目前对椭圓型方程的基本問題是实际解网格方程組的問題2),那么对抛物型和双曲型方程則相反,解网格方程(显式情形)沒有什么困难,因而每个网格方程的收斂性和穩定性則是基本問題.

---

1) 在文献中也广泛地应用"有限差方法"的名称. 我們把这个术語用于常微分方程相应的数值方法.

2) 在以下的工作中,对于椭圓型方程,实际上已經証明了在所有的情况下网格法的收斂性: 不假定解的存在的有 Люстерник[1] (二維拉普拉斯方程), Петровский[1] (高維拉普拉斯方程), Ладыженская[1] (二阶变系数方程), Люстерник[3] (拉普拉斯方程的特征值問題), Саульев[3] (任意阶的方程)等等;假定有光滑解存在的有 Микеладзе[1] 和 Волков[1] (对边值問題估計誤差), Саульев[1,2] (特征值問題的誤差估計)等等.

一般地講，从实践的观点看来，抛物型方程的网格解法，比起双曲型方程类似的問題，更需要研究．問題在于，对于双曲型网格方程稳定性对时間軸步长Δt的限制，实际上沒有过高的要求．对双曲型方程的关系式$\Delta t = O(\Delta x)$，完全是自然的，这是由双曲型微分方程的性质（特征三角形）所引起的．而抛物型网格方程中常常出現的关系式$\Delta t = O((\Delta x)^2)$，并不是由抛物型微分方程性質所得出的，只是由于所用的差分方程的不完备性所引起的．由于上述的理由，又因为本书的主要結果几乎都不能推广到双曲型方程，所以自然要单独研究抛物型方程的情形．在本书中沒有討論双曲型方程的情形．

在基本的第一章"网格方程的形成"中，除了討論已知网格方法的各种推广之外，还研究了几个原则上不同的新方法．其中的某些方法，在一定的条件下可以与熟知的网格法比美．但是这些新网格法的使命，是使我們深刻地了解，已經成为古典方法的那些已知的网格法的規律性．例如对第一章§§ 3—5中引进的显式网格法，方法的准确度增加时稳定条件变得严格．普通的显式方程是上述方法的特殊情形，它是这个規律性的极端情况：方法的准确度最高，因而稳定条件最严格．

在这一章里研究的新方法，不能在任何程度上貶低已知方法的价值．在某些情况下恰恰相反，正是老方法比新方法好．在这里我們首先提出已知的科郎克-尼考里松方法（見第一章，§ 2）．我們認为，一般来講，这个方法对一維情形是最好的．所以本书第一章所討論的大多数的新方法，虽然在某些方面有实际的优点，它們基本上是具有理論上和方法上的意义的．

由第一章中討論的"隐式"抛物型网格方程所形成的椭圓型网格方程組的实际解法，开始想在本书不长的附录中討論．这时我們想在另一本书"椭圓型微分方程的网格积分法"中更完全而詳尽地叙述这些問題．但是因为：1）这个附录达到了独立一章的內容，2）在抛物型网格方程稳定性和椭圓型网格方程迭代法收斂性的研究中存在着密切的联系，3）在实践中迫切需要椭圓型网格方程的解

法，而缺乏多少較为完全的綜合介紹，所以我們决定把这些問題单独的放在第二章內.

在具有輔助性的第二章"网格方程解法"中綜合介紹了老的，特别是新的网格方程組的实际(数值)解法. 这时特别注意了在电子計算机上容易編制程序的正則的迭代法（例如具有松弛因子的順次超松弛法).

在本书的最后，引进了足够广泛的文献目录——208 篇. 其中約 74% 属于第一章，13% 属于第二章，13% 是其他文献. 所以絕大多数的文献属于討論抛物型方程网格解法的第一章. 对这一章，我們收集了我們知道的所有文献，其中也着重指出了不大著名的国外文献. 属于第二章內容的，关于椭圓型网格方程数值解方面的广泛的文献，将要在已經提到的书"椭圓型微分方程的网格积分法"中征引. 我們爭取在最近半年写完那本书.

这本书是供直接或間接与数值解抛物型和椭圓型方程（特别是不定常热传导方程和拉普拉斯方程）有关的广大讀者应用的. 讀这本书，除了高等学校一般的高等数学知識外，不需要特别的数学知識.

因为照顾到上述的讀者，我們力图将本书的內容叙述成最容易接受的形式，特别避免了严格的数学叙述，有时略去了証明. 对于希望深刻研究网格方程理論基本概念的讀者，我們向他們介紹列宾基和費利波夫(Рябенький, Филиппов[1])的书.

本书不企图成为这一問題的詳尽无遗的著作. 例如在书中完全沒有討論柯西問題的网格解法(Рябенький[2], Камынин[1])，具有一般边界条件的問題(Рябенький, Филиппов[1], Юшков[5])，具有动边界的問題(所謂斯蒂凡問題)(Douglas, Callie[2], Ehrlich[1])，可以看做网格法的特殊情形的直綫法（Будак[1,3], Лебедев[1], Тихонов, Самарский[1], Фаддеева[2])，用統計方法(蒙特卡洛类型的方法)（Saito[1], Harmuth[1], Blanc[1]）和用图解法（Collatz[4], Юшков[5], Heinrich[1]）解网格方程，在微分分析机上，在机械的，电的或其他模拟計算机上解抛物型方程（Krank[1]）等問題. 很多

問題,例如按富科斯-沃尔科夫方法提高解的准确度,应用三角形,六边形等等的网格等,只在联系到这些材料时順便提了一下.

无論网格方程的形成,或者实际解法方面存在很多方法,都可以根据具体情况(問題特点,需要的准确度,計算机的可能性等等)选择某种方法,以便花費最少的劳动得到所需的結果. 正如索波列夫院士的比喻,对数值方法应該知道"每个解的数字值多少卢布". 归根結蒂,这正是选择某种数值方法唯一的判别原则.

目　　录

第一章　网格方程的形成

引　　論

1°. 假定需要求出函数 $U(x,t)$. 函数$U(x,t)$在区域 $D(0<x<1;\ 0<t\leqslant T)$中满足方程

$$LU \equiv \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \tag{I}$$

和以下的补充条件

$$\left.\begin{array}{ll} U(x,0) = f(x) & (0<x<1); \\ U(0,t) = U(1,t) = 0 & (0\leqslant t\leqslant T). \end{array}\right\} \tag{II}$$

以后假定 $f(x)$ 使問題(I), (II)存在唯一并且足够光滑的解[1)],关于这一点不再特别指明.

問題 (I),(II) 是最簡单的抛物型問題. 我們选择这个問題討論的原因,是这个問題的計算最簡单也最明显. 而在很多情况下,将所得的結果推广到更一般的方程(这些正是实践中最有兴趣的变系数方程,含多个自变量的方程,方程組等),都沒有原則性的困难. 在那些不能推广或者至少是不能直接推广到一般情形的地方,我們将特别說明. 但是在某些节中,正象这些节的标題所指出的那样,将討論問題(I),(II)各种推广的情形.

2°. 問題 (I),(II) 的近似解法之一是网格法. 我們用最簡单的逼近例題来說明这个方法的实質.

以步长 $h=1/n$ 将变量 x 的变化間隔[0,1]分为相等的 n 段,其网格点（节点）为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$, 其中 $x_i=ih$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

选择步长 h 时,首先根据解的性質(問題 (I),(II) 的解 U 变化

---

1) 关于抛物型方程的一般理論, 例如見 Тихонов, Самарский[1], Соболев[1], Krank[1].

比較平滑时，可以选择較大的步长 h)，和希望得到的解的准确度(准确度要求越高，需要步长越小)．类似地，以步长 $l = T/r$ 将 t 的变化間隔 $[0, T]$ 分为相等的 r 段，分点为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = T$，其中 $t_k = kl(k = 0, 1, \cdots, r)$．选择步长 l 时，除了按照选择步长 h 的原則外，还要根据稳定性的要求(詳見下述)．

因为用太大的步长 h 和 l，将引起解中較大的誤差，而用太小的步长，則需花費很大的計算量，所以应当存在某些“最优步长” h 和 l，以最小的計算量保証得到希望的准确度．在实践中选择大約的最优步长时，常常以步长 h (一般 l 决定于 h 的选择)計算过之后，再以步长 $2h$ 計算一次，假若以步长 $2h$ 算得的結果与以步长 h 算得的結果实际上无甚差别，則說明步长 h 无論如何不大于最优步长．假若不然，則需以步长 $h/2$ 計算，假若以步长 h 和 $h/2$ 算得的結果实际上一致，則說明 h 差不多是最优步长．类似的加倍和減半步长的重复計算原則，应用于某些自动选择步长的程序中．

直綫系 $x = ih$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 和 $t = kl(k = 0, 1, \cdots, r-1)$ 的交点形成的节点集合是矩形网格，我們以 $D^{(h)}$ 表示它．在这个网格上写出以下的关系式

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{(x_i, t_k)} &= \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{l} + O(l), \\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{(x_i, t_k)} &= \frac{U_{i-1,k} - 2U_{i,k} + U_{i+1,k}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

为了书写方便，其中令 $U(ih, kl) = U(x_i, t_k) = U_{i,k}$．表达式 $O(z^\alpha)(\alpha > 0)$ 表示一个量，$\lim\limits_{z\to 0} O(z^\alpha)/z^\alpha = C$，$C$ 为某个常数．

現在在某个节点 $(x_i, t_k) \in D^{(h)}$ 上取方程(I)，并将关系(III)代入，我們得

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{l} = \frac{U_{i-1,k} - 2U_{i,k} + U_{i+1,k}}{h^2} + O(l + h^2)^{1)}. \quad \text{(IV)}$$

1) 量 $O(l + h^2)$ 与 $O(l) + O(h^2)$ 等价．

将 (IV) 中的无穷小量舍弃,以后将 $O(l+h^2)$ 叫做逼近誤差. 注意到初始条件和边界条件(II),我們写出以下的网格問題:

$$\left.\begin{aligned}&u_{i,k+1}=\frac{l}{h^2}(u_{i-1,k}-2u_{i+1,k})+\left(1-\frac{2l}{h^2}\right)u_{i,k}\\&(i=1,2,\cdots,n-1;\ k=0,1,\cdots,r-1);\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{V})$$

$$\left.\begin{aligned}&u_{i,0}=f(ih)\qquad (i=1,2,\cdots,n-1);\\&u_{0,k}=u_{n,k}=0\quad (k=0,1,\cdots,r).\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{VI})$$

方程(V)是对应于(I)的所有已知网格方程中最簡单的一个.

3°. 純粹代数問題 (V),(VI) 是微分問題 (I), (II) 的一个近似. 逼近誤差在某种程度上可以做为衡量近似的尺度, 所以很自然地希望, 問題 (V), (VI) 的解 $u_{i,k}$ 在某种意义下接近問題 (I), (II) 的解 $U_{i,k}$.

网格解法 (V), (VI) 的收斂問題在于寻求条件,在这些条件下,当网格无限縮小,即 $h\to 0$ 和 $l\to 0$ 时,解的誤差 $\varepsilon_{i,k}\equiv U_{i,k}-u_{i,k}$ 在 $D^{(h)}$ 內一致地趋于 0 (即对所有的 $1\leqslant i\leqslant n-1,\ 0\leqslant k\leqslant r-1$ 一致地趋于 0).

显然,发散的网格解法无論从理論观点或实践观点看来,都是沒有价值的.

离散的問題(V),(VI)比原来的問題(I), (II)簡单得多. 它的解可以如下求得:用已知的初始值 $u_{i,0}(i=0,1,\cdots,n)$,以任意的次序按公式(V)計算数值 $u_{i,1}(i=1,2,\cdots,n-1)$, 然后用求得的值 $u_{i,1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 和已知的边界值 $u_{0,1}$ 和 $u_{n,1}$, 仍按公式(V)計算数值 $u_{i,2}(i=1,2,\cdots,n-1)$, 依此类推. 利用解 $u_{i,k}$ 在第 k 层(我們把节点 $x=ih(i=0,1,\cdots,n)$, $t=kl$ 的集合叫做第 k 层)上的值和边界值 $u_{0,k}$ 和 $u_{n,k}$, 按公式 (V) 計算解在第 $k+1$ 层上的值,这也就是"按步"求解的过程.

4°. 我們用 $u_{i,k}$ 表示网格問題 (V),(VI) 的准确解,以 $\tilde{u}_{i,k}$ 表示实际算出的解. $\tilde{u}_{i,k}$ 与 $u_{i,k}$ 有差別. 产生誤差 $u_{i,k}-\tilde{u}_{i,k}$ 的主要原因是舍入誤差的影响. 实际上,舍入誤差永远是存在的,因为实际上应用公式 (V) 計算时, 我們只能用有限位进行計算——手

算用十进制，电子計算机用二进制．几乎对所有中間結果都要进行舍入，所以必然会引起上述的情况．

网格方程(V)的稳定性問題在于寻求条件，在这些条件下，数值誤差 $\rho_{i,k} \equiv u_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}$ 当 k 增加时，对所有的 $i(0 \leqslant i \leqslant n)$ 一致地趋于 0（或至少是保持有界）．

假如舍入引起的誤差在計算过程中有下降的趋势（或者不增加），則方程(V)叫做稳定的1)*)．在相反的情况下，誤差的积累可以如此之大（特别是在电子計算机上計算时，进行大量的算术运算），以致于数值解 $\tilde{u}_{i,k}$ 和問題(V)，(VI)的准确解 $u_{i,k}$ 不再有任何共同之处．不言而喻，这种不稳定的网格方程不能用于微分方程的数值积分．

---

1) 例如在 Рябенький, Филиппов[1] 的书中及 Петровский 的书中 (335 頁) 給出了网格方程稳定概念的严格定义．

*) 稳定性的基本思想和处理方法是諾亦曼提出的(見 O'Brien, Hyman, Kaplan 的[1])．因为考虑全部网格点上計算誤差(包括舍入誤差)累积的总和时比較困难，所以一般只考虑一层上計算誤差对以后計算結果的影响，即是假定解网格方程时，除了某一层上产生計算誤差外，其他层上的計算没有任何誤差，研究这一层上計算誤差对結果的影响．綫性常系数方程的情况，問題可以归結为 $t=0$ 一层上計算誤差对結果的影响，即是网格方程对初值的稳定性問題，这个問題的提法类似于偏微分方程中解对初值的正則性．同样地可以定义网格方程对边值或右端項的稳定性．

定义网格方程对初值稳定性的方法很多，基本上区别于以下三个方面：(1) 层数趋于无穷的方式．一种方式是沿 t 軸的步长 l 不变，当 $k \to \infty$ 时，若誤差趋于 0 或有界叫做稳定；另一种方式是 t 的变化間隔 $[0, T]$ 不变，当步长 l 趋于 0 时，层数趋于无穷，这时每层上的誤差不超过初始誤差，或对层数 k 一致有界叫做稳定．(2)衡量誤差的方法．一类方法是建立每一层上誤差的范数，例如可取 $\max\limits_i |u_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}|$，$h\sum\limits_i |u_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}|$ 或 $h\left[\sum\limits_i |u_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 做为第 k 层上誤差 $u_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 的范数，将范数理解为誤差的大小．另一种办法将一层上的誤差看成一个向量，取定向量空間的一个基底，研究当层数 k 增加时，每个誤差分量的增减情况．后一种方法不如前者严格，但較易实現．(3) 誤差增减的情况．当层数 k 增大时，可定义誤差减小或不增加为稳定，亦可定义誤差对层数 k 一致有界为稳定．在双曲型方程的情形，有时定义誤差随 k 增加的速率不超过綫性规律时为稳定，或叫半稳定．

稳定性問題提法的形式决定于微分方程和网格方程的內在性质，也与研究問題的数学工具有关．一般講，无論有那一种有稳定性保証的网格方程，包括半稳定网格方程在內，都是有实用价值的——譯者注．

稳定(或不稳定)是网格方程本身的內在性質. 稳定的网格方程可以比做好收音机,人的耳朵听不到其中的噪音和各种干扰(由于元件不完善等等,这是永远存在的). 至少好的收音机可以覚察不到这种討厌的声音. 我們将在下面看到完全相同的情况, 能够将某些网格方程"做成"(卽选择相应的某些网格方程的参数)这样,使得不希望有的干扰(如上所述, 可能完全压倒眞解的舍入誤差)不致于歪曲了基本的"调子"(卽問題(V),(VI)的解 $u_{i,k}$).

5°. 这样一来,用网格法解問題(I),(II)时所产生的最終的实际誤差,其絕对值不超过

$$|U_{i,k} - u_{i,k}| + |u_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}|, \quad (x_i, t_k) \in D^{(h)}. \qquad \text{(VII)}$$

假若相应的网格方程稳定, 則(VII)中第二項实际上等于0(卽实际上是相当小的——譯者注).

应用矩陣的写法和范数工具,現在我們推导出网格問題(V),(VI)的稳定和收斂条件. 为此将問題(V),(VI)写成矩陣形式:

$$u^{(k+1)} = Au^{(k)}, \ u^{(0)} = f, (k = 0, 1, \cdots, r-1), \qquad \text{(VIII)}$$

其中 $u^{(k)}$ 是未知的列矩陣 $\{u_{1,k}, u_{2,k}, \cdots, u_{n-1,k}\}$, $f = \{f(h), f(2h), \cdots, f((n-1)h)\}$ 是初始向量, A 是 $n-1$ 維雅可比方陣(三对角方陣),其形状为

$$A = \begin{bmatrix} 1-\frac{2l}{h^2} & \frac{l}{h^2} & & & \\ \frac{l}{h^2} & 1-\frac{2l}{h^2} & \frac{l}{h^2} & & \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & & \frac{l}{h^2} & 1-\frac{2l}{h^2} \end{bmatrix}.$$

今后,我們都用如下的矩陣和向量的范数:

$$\left.\begin{aligned} \|u^{(k)}\| &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |u_{i,k}|, \\ \|A\| &= \|\{a_{i,j}\}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \sum_{j=1}^{n-1} |a_{i,j}|. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX)}$$

用公式(IX) 定义的范数, 在以下的意义下是相符合的, 卽布尼亚

考夫斯基-施瓦尔兹不等式对其成立(見 Фаддеева[1], 60 頁).

假若取向量 $\bar{f}$ 代替初始向量 f (例如将 f 的分量經过舍入得 $\bar{f}$), 即代替 (VIII) 来研究方程組

$$\bar{u}^{(k+1)} = A\bar{u}^{(k)},\ \bar{u}^{(0)} = \bar{f}\ (k = 0, 1, \cdots, r-1). \tag{X}$$

显然,对于誤差将有方程組

$$\bar{\rho}^{(k+1)} = A\bar{\rho}^{(k)},\ \bar{\rho}^{(0)} = f - \bar{f}, \tag{XI}$$

或者

$$\bar{\rho}^{(k)} = A^k\bar{\rho}^{(0)} \equiv A^k(f - \bar{f}). \tag{XII}$$

将布尼亚考夫斯基-施瓦尔兹不等式应用于关系式(XII):

$$\|\bar{\rho}^{(k)}\| \leqslant \|A\|^k\|\bar{\rho}^{(0)}\|, \tag{XIII}$$

可由(XIII)明显看出,若

$$\|A\| \leqslant 1, \tag{XIV}$$

则当 k 增加时, 初始条件(在第 0 层上)的誤差 $\bar{\rho}^{(0)}$ 所引起的誤差 $\bar{\rho}^{(k)}$ 不增加. 假若誤差不在开始的一层,比方說在第 m 层上, 显然可得不等式(XIV),因为第 m 层可以取做开始的一层.

我們詳細地研究了誤差产生在某一层的簡单情形. 这时不等式(XIV) 是由一层过渡到以后各层时誤差不增加的充分条件. 实践中的情况更为复杂, 因为在每一层都引进誤差(舍入). 但是在这样的一般情况下,由于迭加原則(方程組 (VIII) 是綫性的!), 自然可以希望,不等式 (XIV) 仍是方程組 (VIII) 稳定的充分条件(这个問題大概尚无証明——譯者注).

显然, 若矩陣 A 对角綫上的元素是非負的, 即条件 $1 - 2l/h^2 \geqslant 0$, 或者

$$l \leqslant h^2/2 \tag{XV}$$

成立,則有 $\|A\| = 1$. 条件 (XV) 即是所求的方程 (V) 的稳定条件,对所有的 k 最終保証 $|u^{(k)} - \tilde{u}^{(k)}|$ 很小的条件.

6°. 指出这一点是恰当的,条件 (XV) 不仅是方程(V)稳定的充分条件,而且也是必要条件[1]. 实际上,方程(V)稳定的必要和充

1) 例如在 Петровский[2] 的 357—358 頁証明了条件 (XV) 的必要性(和充分性).