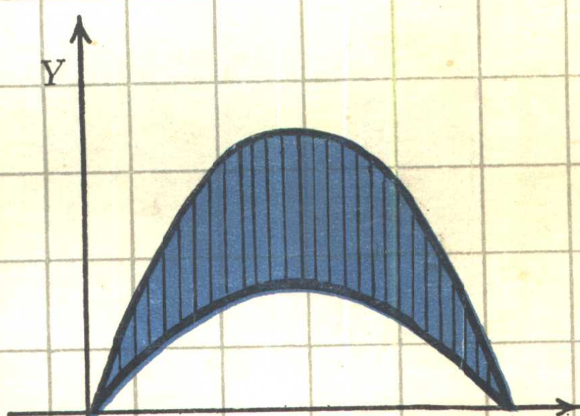
1984

全国硕士研究生数学入学试题汇解



安徽教育出版社

1984

全国硕士研究生数学入学试题汇解

程乃栋　宁日[illegible]
潘麟生　杨有[illegible]
谢明勤

安徽教育出版社

一九八四年全国硕士研究生

数学入学试题汇解

程乃栋　宁日晖

潘麟生　杨有椿

谢明勤

安徽教育出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：9.5　字数：200,000

1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

印数：43,600

统一书号：7276·249　定价：1.60元

前　言

本书选编了中国科学院及国内部分高等理工院校，特别是一些有影响的重点大学（非数学专业）一九八四年硕士研究生入学试题。其内容涉及到高等数学及工程数学各方面的内容，反映出有关课程教学大纲的基本要求，其中不少试题具有一定的难度。本书对选入的试题都作了详细解答，有的还一题多解，对于一些难度较大的试题作了必要的分析。这对报考硕士研究生的同志，在应试前复习数学课程有直接参考价值；对高等理工学校在校学生提高数学解题能力也能起到一定的启迪作用。

本书由淮南矿业学院程乃栋、合肥工业大学宁日晖、潘麟生、安徽机电学院杨有椿、安徽师范大学谢明勤编解。

本书承蒙中国科学技术大学严镇军副教授和合肥工业大学卢树铭副教授对全部试题解答内容进行了审阅和订正，特致谢意。

由于时间仓促，加以受到水平的限制，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编者

1984.11.

目　　录

中国科学院 ……………………………………1

　　高等数学(二)、(三)、(四) ……………………………1

清华大学……………………………………15

西安交通大学…………………………………27

上海交通大学…………………………………38

中国科学技术大学……………………………48

　　高等数学(甲)、(乙) …………………………48

国防科学技术大学……………………………63

同济大学……………………………………70

哈尔滨工业大学………………………………80

　　(一)高等数学 ………………………………80

　　(二)高等数学 ………………………………83

　　(三)高等数学(包括线性代数) ………………88

　　(四)高等数学(包括线性代数与复变函数) ……97

大连工学院 …………………………………102

华东工程学院 ………………………………111

　　(一)高等数学 ………………………………111

　　(二)高等数学 ………………………………119

东北工学院 …………………………………130

　　高等数学……………………………………130

　　工程数学(线性代数、概率论和数理统计)……139

　　线性代数……………………………………145

　　数学物理方法 ………………………………153

合肥工业大学(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ) ……………………159

湖南大学 ……………………………………………………172
成都地质学院 ………………………………………………182
(一)高等数学 ……………………………………………182
(二)线性代数 ……………………………………………190
北京工业大学 ………………………………………………198
(一)高等数学 ……………………………………………198
(二)高等数学 ……………………………………………204
山东海洋学院 ………………………………………………211
高等数学(一)、(二) ……………………………………211
数学物理方法 ……………………………………………217
西南交通大学 ………………………………………………221
高等数学……………………………………………………221
线性代数和概率论 ………………………………………224
华东水利学院 ………………………………………………237
(一)高等数学 ……………………………………………237
(二)线性代数 ……………………………………………242
华东化工学院(工程类) ……………………………………248
华东师范大学 ………………………………………………258
(一)高等数学 ……………………………………………258
(二)高等数学(包括概率论) ……………………………264
(三)高等数学(包括概率论) ……………………………268
(四)高等数学(包括线性代数) …………………………274
安徽大学 ……………………………………………………284
(一)高等数学(包括线性代数) …………………………284
(二)高等数学(包括线性代数) …………………………294

中　国　科　学　院

高等数学(二)

1. 求证

(1) 标量场 $\Phi(x, y, z)$ 的梯度是与曲面 $\Phi(x,y,z)=C$ (C 为常量)垂直的矢量场.

(2) 矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 的旋度的散度恒为零.

证 (1) $\Phi(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 的梯度为

$$\mathrm{grad}\,\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k},$$

而它的三个分量恰好是曲面 $\Phi(x, y, z)=C$ 在 M 点的法线的方向数，故所求得证.

(2) 设 $\mathbf{F}(x, y, z)=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$，则

$$\mathrm{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

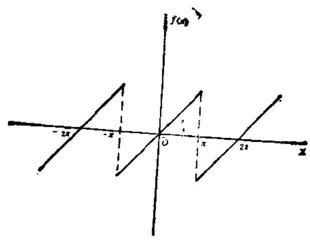
故 $$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=0$$

2. 试将如图所示之锯齿波在$(-\pi, \pi)$的区间内展开成付里叶级数，并利用所得结果求出无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$的和

解 由图知，该锯齿波为奇函数，因此可设

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$$

于是 $$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx$$



$$=\frac{(-1)^{k-1}2}{k}$$

所以，　　$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2\sin kx}{k}$

从而　　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

3. 求解方程 $1+yy''+y'^2=0$. $\left(\text{其中}\,y'=\frac{dy}{dx}\right)$

解　原方程可写成

$$1+\frac{1}{2}(y^2)''=0$$

积分可得

$$y^2=-x^2+c_1x+c_2$$

故原方程的解为

$$y=\pm\sqrt{-x^2+c_1x+c_2}$$

其中 c_1、c_2 为任意常数.

4. (1) 使用留数定理求积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

(2) 写出定义$\Gamma(z)$函数的通常表达式，并证明：

$$\Gamma(z\times1)=z\Gamma(z)$$

(3) 设 $f(z)=\phi+i\psi$ 是解析函数($z=x+iy$)若已知

$$\phi=x^2+4x-y^2+2y$$

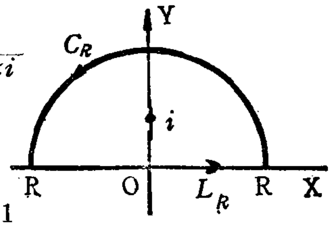
(a) 求 ψ;　　　　　　　　(b) 求 $f(z)$

解　(1) 取积分围道为半园域的边界 $L=L_R+C_R$(如图)

因为函数$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在L内部有唯一的一阶极点$z=i$，所以由留数定理，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2},\ i\right)=\frac{1}{2i}$$



积分是沿着L的正向取的。但

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}\right|\leqslant\int_{C_R}\frac{|dz|}{R^2-1}=\frac{\pi R}{R^2-1}\to 0\,(R\to\infty)$$

因此令$R\to\infty$时，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

(2) $\Gamma(z)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$

由分部积分法

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^z\,dt=-\int_0^{\infty}t^z d(e^{-t})$$

$$=-e^{-t}\,t^z\Big|_0^{\infty}+z\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^{z-1}\,dt=z\Gamma(z)$$

(3) 由哥西一黎曼方程，

$$\psi=\int\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy=\int\frac{\partial\phi}{\partial x}dy$$

$$=\int(2x+4)dy=(2x+4)y+g(x)$$

因此 $\quad\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=2y+g'(x)=-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=2y-2$

得到 $\quad g'(x)=-2,\qquad g(x)=-2x+C$

故 $\quad\psi=2xy+4y-2x+C$

$$f(z)=\phi+i\psi=z^2+(4-2i)z+iC$$

其中C为任意实常数

5. (1) 把二次型$2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$写成矩阵形式：

$$X^TAX;$$

(2) 求矩阵A的本征值和本征向量；

(3) 求一个从x_1，x_2，x_3到u_1，u_2，u_3的线性变换，它可以消去二次型(1)中的交叉乘积项。并写出得到的u_1，u_2，u_3的二次型(标准二次型)

解 (1) 令

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

则即有 $\psi(x_1,\ x_2,\ x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3=X^TAX$

(2) $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6)$$

故A的本征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=6$相应的本征向量为(2，0，1)，(0，1，0)，(1，0，-2)

(3) 作满秩线性变换

$$u_1=2x_1-2x_3,\ u_2=x_2,\ u_3=x_3$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

于是 $$\psi(x_1,\ x_2,\ x_3)=\frac{1}{2}u_1^2+4u_2^2+3u_3^2$$

六、用拉普拉斯变换求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t)=0,\ u(3,t)=0, \\ u(x,0)=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x \end{cases}$$

解　作u的拉氏变换

$$\bar{u}=\int_0^{\infty}e^{-pt}u\,dt$$

由分部积分得

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial t}dt=e^{-pt}u\Big|_0^{\infty}+p\int_0^{\infty}e^{-pt}u\,dt$$

$$=-u(x,0)+p\bar{u}=-10\sin 2\pi x+6\sin 4\pi x+p\bar{u}$$

又　$$\int_0^{\infty}e^{-pt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt=\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}$$

因得到$\bar{u}$的常微分方程定解问题

$$\begin{cases}4\dfrac{d^2\bar{u}}{dx^2}-p\bar{u}=-10\sin 2\pi x+6\sin 4\pi x\\ \bar{u}\big|_{x=0}=\bar{u}\big|_{x=3}=0\end{cases}$$

解之得　$$\bar{u}=\frac{10\sin 2\pi x}{16\pi^2+p}-\frac{6\sin 4\pi x}{64\pi^2+p}$$

利用反变换公式　$L^{-1}\left[\dfrac{1}{p-a}\right]=e^{at}$，即得

$$u=10e^{-16\pi^2 t}\sin 2\pi x-6e^{-64\pi^2 t}\sin 4\pi x$$

高等数学　（三）

1．设a和b为实常数，$b<0$，定义

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^b), & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时}\end{cases}$$

回答下列问题，并简单说明理由：

（1）在什么情况下，$f(x)$不是连续函数？

（2）在什么情况下，$f(x)$连续，但不可微？

（3）在什么情况下，$f(x)$可微，但$f'(x)$在$[-1,1]$上无界？

（4）在什么情况下，$f(x)$可微且$f'(x)$在$[-1,1]$上有界，但$f'(x)$不连续？

(5) 在什么情况下，$f(x)$连续可微？

答 (1) $a\leqslant 0$

因为 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}x^a\sin(x^b)$不存在

(2)$0<a\leqslant 1$

因为 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}x^{a-1}\sin(x^b)$不存在

(3) $1<a<1-b$

因为 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}[ax^{a-1}\mathrm{sim}(x^b)+bx^{a-1+b}\cos(x^b)]$无界

(4) $a=1-b$

因为 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\lim\limits_{x\to 0+}x^{-b}\sin(x^b)=0=f'(0)$

但$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}b\cos(x^b)$不存在

(5) $a>1-b$

因为当$x\neq 0$时，显然$f'(x)$连续，又$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$

2. 构造一个函数$f(x)$，使

$$\int_{-1}^{1}x^4f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)\cos x\,dx=0$$

且
$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=1$$

解 由第一个条件可知，$f(x)$为奇函数. 现任取奇函数$g(x)\neq 0$，使$g^2(x)$可积. 若

$$\int_{-1}^{1}g^2(x)dx=a^2$$

则$f(x)=\dfrac{1}{a}g(x)$即为所求. 例如$g(x)=x$，则$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$.

3. 连续掷五次均匀钱币，令ξ表示出现正面的次数，η表示连续出现三次正面的次数，求ξ，η，(ξ,η)的概率分布.

解 $p(\xi=k)=\dfrac{C_5^k}{2^5}$，$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

所以 ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

连续出现三次正面的情形只有第1,2,3次，第2,3,4次，第3,4,5次三种，即

$$p(\eta=0)=\frac{29}{32},\quad p(\eta=1)=\frac{3}{32}$$

所以 η 的概率分布为

η	0	1
p	$\frac{29}{32}$	$\frac{3}{32}$

$$P(\xi=k,\ \xi=m)=P(\xi=k)\cdot P(\eta=m|\xi=k)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\ m=0,\ 1)$$

所以$(\xi,\ \eta)$的概率分布为

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$
1	0	0	0	$\frac{3}{32}$	0	0

4. 求解微分方程

$$(y')^2+2(1-e^xy)y'=e^xy(2-e^xy)-1$$

解 将原方程整理可得

$$[y'+(1-e^xy)]^2=0$$

因此

$$y'-e^{x}y=-1$$

故原方程的解为

$$y=e^{\int e^{x}dx}\left(c-\int e^{-\int e^{x}dx}dx\right)$$

$$=c\,e^{e^{x}}-e^{e^{x}}\int e^{-e^{x}}dx$$

5. 证明：在两个广义积分$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$和$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx$中有一个绝对收敛，另一个收敛但不绝对收敛，并且比较这两个积分值的大小.

(注：若$\int_{0}^{\infty}|f(x)|dx$收敛，则称$\int_{0}^{\infty}f(x)dx$绝对收敛)

证明 因$\frac{|\sin x|}{(1+x)^{2}}\leqslant\frac{1}{(1+x)^{2}}$，而$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^{2}}$收敛，故积分$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx$绝对收敛.

又对任意$b>0$，由分部积分得

$$\int_{0}^{b}\frac{\cos x}{1+x}dx=\frac{\sin x}{1+x}\Big|_{0}^{b}+\int_{0}^{b}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx$$

$$=\frac{\sin b}{1+b}+\int_{0}^{b}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx\to\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx,\ (b\to\infty)$$

故第一个广义积分收敛，且有

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx$$

因为$|\cos x|\geqslant\cos^{2}x$，所以

$$\int_{0}^{\infty}\frac{|\cos x|}{1+x}dx\geqslant\int_{0}^{\infty}\frac{\cos^{2}x}{1+x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{2(1+x)}+\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2(1+x)}dx$$

上式右边第一个积分是发散的，用前面同样的方法可证明第二个积分是收敛的。因此，积分$\int_{0}^{\infty}\frac{|\cos x|}{1+x}dx$发散，即积分$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$

回答下列问题并简单说明理由：

(1) 在什么情形下$f(x)$不是连续函数？

(2) 在什么情形下$f(x)$是有界函数？

(3) 在什么情形下$f(x)$连续但不可微？

(4) 在什么情形下$f(x)$可微但$f'(x)$不连续？

(5) 在什么情形下$f(x)$连续可微？

答 (1) $a\leqslant 0$

因为$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x}$不存在。

(2) $a=0$

因为 $|f(x)|\leqslant\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1.$

(3) $0<a\leqslant 1$

因为$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+} x^{a-1}\ \mathrm{sim}\frac{1}{x}$不存在。

(4) $1<a\leqslant 2$

因为$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(ax^{a-1}\ \mathrm{sim}\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x}\right)$不存在。

(5) $a>2$

因为 $f'(x)=\begin{cases} ax^{a-1}\sin\frac{1}{x}-x^{a-2}\cos\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$

且 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=f'(0)=0.$

2. 构造一个函数$f(x)$使

$$\int_{-1}^{1} x^4 f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)\cos x\,dx=0 \quad 且$$

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2 dx=1.$$

解 见中国科学院“高等数学(三)”第二题。

3. 求解微分方程

$$y'' + 2y' + 5y = 17\cos 2x$$

解 原方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$ 因此特征根为 $r_1 = -1 + i$，$r_2 = -1 - i$ 于是齐次方程的通解为

$$y_0 = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

设非齐次方程的特解为

$$y^* = a\cos 2x + b\sin 2x$$

将 y^* 代入原方程并比较系数，可以得到

$$a = 1, \qquad b = 4$$

因此原方程的通解为

$$y = y_0 + y^* = e^{x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \cos 2x + 4\sin 2x$$

其中 c_1、c_2 为任意常数.

4. 设 $f_n(x) = \dfrac{n + x}{1 + nx^2} + n^2\cos\dfrac{x-1}{n}$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$

解 $f'_n(x) = \dfrac{1 - 2n^2x - nx^2}{(1 + nx^2)^2} - n\sin\dfrac{x-1}{n}$

$$= \frac{\dfrac{1}{n^2} - 2x - \dfrac{x^2}{n}}{\left(\dfrac{1}{n} + x^2\right)^2} - (x-1)\frac{\sin\dfrac{x-1}{n}}{\dfrac{x-1}{n}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = -\dfrac{2}{x^3} - x + 1.$

5. 设区域 Ω：$4x^2 + by^2 \leqslant 1$，其中 $1 \leqslant b \leqslant 4$ 问积分 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$ 什么时候取最小值？这个最小值为多少？

解 积分 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$ 的值等于平面 XOY、柱面 $4x^2 + by^2 = 1$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围区域的体积，当 $b = 4$ 时，柱

不绝对收敛。

6．设闭曲线Γ：$\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$　$0\leqslant t\leqslant 2\pi$

求曲线积分 $\oint_{\Gamma}\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ 的值

解　由假设可得

$$dx=-\sin t\,dt,\qquad dy=2\cos t\,dt$$

因此

$$\oint_{\Gamma}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{2(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt}{\cos^2 t+4\sin^2 t}$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}\,t}{1+4\mathrm{tg}^2 t}=4\,\mathrm{arc\,tg}(2\,\mathrm{tg}\,t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi.$$

7．已知

$$T'AT=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 5 \end{pmatrix}$$

其中

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$