科學圖書大庫

波動學

譯者　官德樣　林啓東　林楝樑
葉天正　盧伯誠
校閱　黃振麟

徐氏基金會出版

序　言

本冊着重於波的學習，這是一個廣泛的題目。大家都知道許多自然現象與波有關，諸如水波、聲波、光波、無線電波、地震波、德布羅意波、以及其他的波。同時，仔細檢查一下物理圖書館書架上所珍藏的書，就可以發現研究某一方面波動現象——比方說，水中的超聲波——就可以寫成一本書或出版一本期刊，甚至吸引一個科學家的全部注意力。然而很奇怪地，一個這種狹窄學問方面的職業「專家」，却可以很容易地跟其他不相干狹窄學問的「專家」們相互交換意見。首先，他要學習他們的術語，他們的單位以及什麼數目是重要的。事實上當他改變興趣時，他可能可以在極短的時間內變成新學科的一個專家。這種事情並不是不可能，因爲許多完全不相干，完全不同的物理現象，都可以用一組共同的觀念來描述，而每一位科學家都具有這些觀念的共同語言。「波」這個字裏即蘊涵了許多這種共同觀念。

本書的主要目的是要闡明波的許多基本觀念以及它們間的關係。爲了這個目的，本書的編排方法不是按照可觀察到的自然現象如聲、光等等而組成，而是用波的基本觀念組成。

本書附帶的一個目標是要使讀者熟悉許多有趣而重要的波的例子，讓讀者瞭解波觀念的廣泛應用性及一般性。因此在介紹了一個新觀念之後，往往立刻把它應用到許多不同的物理系統以做爲說明。別的逼近法是先用一個簡單的例子（伸張弦）來發展一些有用的觀念，然後再考慮其他有趣的物理系統。本書所採用的逼近方法和這個形成一個對比。

我所選擇用來說明的許多例子間都有幾何上的「酷似」，這樣做的目的是想要鼓勵學生在不同的波動現象間找出它們的類似性，同時也激發他有勇氣用這種有點冒險猜測的類似性來處理新的現象。利用類似性大家都知道是危險的，而且也是一個陷穽，但是其他的方法也是一樣（把光波猜爲「有點像」力學上的波動，而在一種膠狀似的以太中傳播，這種猜測得到許多有用的結果，幫助馬克士威推導出他有名的方程式。它還做了一些有趣的預言。當實驗的證據——特別是邁克爾孫、摩黎的——指出這種力學式模型不是完

全正確時，愛因斯坦證明如何捨棄此模型而仍然保留馬克士威方程式，愛因斯坦寧願直接猜這些方程式——所謂的純推測。到現在，雖然還有大部份科學家利用類似性及模型以幫助他們猜測新的方程式，但是通常他們所發表的只是方程式而已）。

「家庭實驗」在本書中占很重要的部份，從這種實驗中可以得到課堂上表演以及實驗室中實驗所無法得到的樂趣及見識，同時這些實驗也非常重要。因爲這種實驗是在「家」中做的，因此可以親切而舒適地安排，這是重要的一點，因爲沒有實驗的同伴在你讀直尺上的讀數時把球取走跑開（或是當你要把球拿起時他却坐在上面）；也沒有指導者來解釋那種屬於「他」的實驗，你所需要的是做你自己的實驗，用的是你的雙手，速度隨你願意，要做多少次就可做多少次！

家庭實驗有一點很可取，就是在下午十點正發現自己誤解了上禮拜所做的一個實驗，在十點十五分你就可以再度安排好你的實驗而重新做一次。這一點很重要，因爲在一個眞的實驗中，沒有人能夠第一次就完全正確地做成，事後回想反省是成功的一個秘訣，（當然還有其他的），當你有一個實驗後的想法而要繼續做時，却因爲"裝置已被拆下"或"現在已過了下午五點了"或其他蠢笨的理由而不能夠做，沒有別的事比這個更令學習的人感到沮喪與受阻礙！

最後我希望經由家庭實驗而培養讀者對現象的洞察能力，我還希望學生們能夠用他們自己的手創造一幅景象使他的眼睛，他的耳朵以及他的心靈同時感到驚訝與愉快。

色彩清晰的石塊兒
河床中輕快地滾著
或水波光粼粼地閃著
——碩歇基（Soseki）

目 錄

序言

第一章 簡單系統的自由振動 …… 1

1.1 引 言 …… 1
1.2 一度自由度系統的自由振動 …… 2
1.3 線性與疊加原理 …… 12
1.4 兩度自由度系統的自由振動 …… 15
1.5 節 拍 …… 29

第二章 多度自由度系統的自由振動 …… 48

2.1 引 言 …… 48
2.2 連續弦的橫向模式 …… 50
2.3 連續弦的一般運動與傅里葉分析 …… 60
2.4 N度自由度不連續系統的模式 …… 72

第三章 受迫振動 …… 102

3.1 引 言 …… 102
3.2 一度諧和振盪器之阻尼受迫運動 …… 102
3.3 二度自由度系統的共振 …… 117
3.4 濾 器 …… 122
3.5 多度自由度密閉系統的受迫振動 …… 130

第四章 行波 …… 156

4.1 引 言 …… 156
4.2 一度空間的諧和行波和相速度 …… 157
4.3 折射率及色散 …… 176
4.4 阻抗及能通量 …… 191

第五章　反射 …… 226

5.1　引　言 …… 226
5.2　完全的終止 …… 226
5.3　反射與透射 …… 236
5.4　兩個透明介質之阻抗匹配 …… 248
5.5　薄膜之反射 …… 253

第六章　調制・脈衝及波包 …… 272

6.1　引　言 …… 272
6.2　波群速度 …… 272
6.3　脈　衝 …… 283
6.4　脈衝之傅里葉分析 …… 298
6.5　行進波包之傅里葉分析 …… 312

第七章　兩度及三度空間的波 …… 337

7.1　引　言 …… 337
7.2　諧和平面波與傳播向量 …… 337
7.3　水　波 …… 352
7.4　電磁波 …… 361
7.5　點電荷之輻射 …… 373

第八章　偏振 …… 403

8.1　導論 …… 403
8.2　偏振態之描述 …… 404
8.3　横偏振波的產生 …… 416
8.4　雙折射 …… 427
8.5　帶寬，相干時間及偏振 …… 434

第九章　干涉與繞射 …… 456

9.1　導論 …… 456
9.2　兩相干點光源間的干涉 …… 457
9.3　兩獨立源的干涉 …… 469

9.4 “點”光源可以大到什麼程度？…… 473
9.5 行波“束”的角寬度…… 477
9.6 繞射及惠更斯原理…… 480
9.7 幾何光學…… 499
補充教材…… 546
附錄…… 587
補充讀物…… 593
索引…… 599

第一章　簡單系統的自由振動

1.1 引　言

這個世界充滿太多能移動的東西。它們的運動可以粗略地分成兩類，一類是運動物體只在一個地點附近移動，另一類是能由一個地點到另一個地點的移動（移行）第一類的例子有振動擺，振動的提琴弦，杯內盪來盪去的水，原子內振動的電子，雷射內鏡片間射來射去的光，第二類有滑行的曲棍球橡皮圓盤，伸長繩子一端振起的一個脈波，奔向沙灘的海洋波浪，電視管內的電子束，由你的眼睛所察覺來自星球的一束光綫。有時候同一個現象却表現出第一類或第二類的運動（亦即平均而言是靜止的，或是移行的）。這完全由你的觀點確定：海浪奔向海灘，但海水（以及棲息其上的鴨子）却不移行而只是或上或下。位移脈波沿著繩子移行，但是組成繩的物質却不移行而只是振動。

首先我們學習在一個區域內振動的情形，東西在其平均位置上下或左右振動。在第一章及第二章裏，我們給予封閉系統一個激動（由外面加入的干擾），然後就讓它自由振動而不再加擾動，我們研究這個系統的運動情況。這種運動叫自由或自然振動。在第一章裏，我們只學習有一個或兩個運動部份的簡單系統，以做爲瞭解第二章有多個運動部份的自由振動系統的基礎，在那裏，我們會發現一個有許多運動部份的複雜系統，通常都可以認爲是由許多較簡單的運動——叫模式（mode）—同時振動所組成。不管這個系統如何複雜，它的每一個模式都具有和簡諧振盪子的模式相類似的性質，因此對於任何系統，只要它在做它的一種模式運動，那麼它每一個運動部份都會經驗到相同的每單位質量及單位位移的回復力，同時每一部份振動與時間的關係皆爲$\cos(\omega t+\varphi)$，也就是說有相同的頻率ω及相同的相角常數φ。

每一個我們所要學習的系統都由某個物理量來描述，此量和位移平衡點的距離隨著它在系統內的位置及時間而變。對某些力學上的例子來說，（其運動部份是受有回復力的質點）所謂物理量就是在x,y,z位置的質點相對於

平衡位置的位移大小。此位移由一個向量$\psi(x, y, z, t)$來描述，有時候把這個x, y, z, t的向量函數叫做波動函數。(當我們能夠用連續的近似時，也就是說，當相鄰近的區域有本質相同的運動時，它只是x, y, t 的一個連續函數)。另外對某些個電學上的例子來說，所謂物理量可以是綫圈內的電流，或是電容器上的電荷，在其他的電學例子，它可以是電場$\mathbf{E}(x, y, z, t)$或磁場$\mathbf{B}(x, y, z, t)$，這時的波就叫做電磁波。

1.2 一度自由度系統的自由振動

首先我們考慮的東西是在平均位置鄰近振動或擺動的情形。例如在一個平面上擺動的擺子，在彈簧上的物體以及LC 電路。它們在任何時間的組態都可以用一個單獨的量完全表明，因此就叫做一度自由度系統—粗略地講，只有一個運動部份(參閱圖1.1)，比方說，擺動的擺可以用弦和鉛直綫夾角來描述，LC 電路可以用電容器上的電荷(一個任意方向擺動的自由擺，就像繩子掛一個稱錘是有兩度自由度的，因爲要描述稱錘的位置需要有兩個坐標。古老的鐘，其擺子只限在一個平面內擺動，因此只有一度自由度)。

對所有這些一度自由度系統的情形，我們都會發現其運動部份的位移(由平衡位置算起)都具有下列時間相關性(叫做諧和擺動)：

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

對於擺動的質點，ψ可以代表它對平衡位置的位移。對於LC 電路，ψ代表綫圈上的電流或是電容器上的電荷。更精密地說，我們將會發現對於運動部份不太遠離平衡位置的系統方程式(1)正代表其時間相關性。(擺角太大時，方程式(1)只代表運動的一個粗略近似；當實際彈簧伸張太大時，其回復力不與伸張量成比例，因而方程式(1)不能代表它的運動；如果電容器上的電荷太多，會使它損壞而在兩板間發生火花放電，因此電荷量變化情形不會像方程式(1)所描述的一樣)

§命名法 我們把方程式(1)中的各項命名如下：A是一個正値常數，叫做振幅；ω爲角頻率，其單位是每秒多小弳；$\nu = \omega/2\pi$ 爲頻率，其單位是每秒幾次，或叫赫(英文縮寫爲cps 或Hz)，ν的倒數叫週期T，代表每次幾秒：

$$T = \frac{1}{\nu}. \tag{2}$$

相角常數 φ 隨零點時間的選擇而定，通常我們對相角常數的值不大有興趣，因爲我們可以把時間零點弄得剛好使 φ 爲零，那麼不需一般的方程式（1），我們可以寫爲 $\psi = A\cos\omega t$ 或 $\psi = A\sin\omega t$

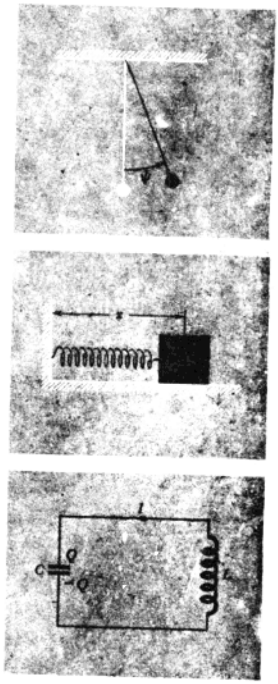

圖1.1　具有一度自由度的系統（擺只限在一個平面上擺動）

§回復力及慣性　方程式（1）所代表的振動行徑，通常是由物理系統內具有相反趨向的兩個內禀性質：回復力及慣性相互作用而造成。回復力加給運動部份一個適當的速度 $d\psi/dt$ 而想要使 ψ 變成零。ψ 愈大，回復力愈大。對 LC 電路而言，回復力是由於電子間斥力而產生，這個力驅使電子不要擁擠在一個板上，而要使它們平均分配在每一個板上，因此造成沒電荷。第二種性質—慣性反對 $d\psi/dt$ 中的任何改變。在 LC 電路上，慣性是由於有電感 L、它阻止電流 $d\psi/dt$（令 ψ 代表電容器上的電荷）的任何改變。

§振動行徑　首先假設 ψ 爲正 $d\psi/dt$ 爲零，回復力產生一個加速度，因而引起負的速度，當 ψ 回到零時，負速度達到最大值，在 $\psi = 0$ 時回復力爲零，但是負速度却引起了負的位移，然後回復力變成正的，但它現在必須克服負速度的慣性。最後速度 $d\psi/dt$ 變爲零，但此時位移最大且爲負值，因此整個程序逆轉過來。這樣週而復始：回復力想使 ψ 趨向零，因而引起一個速度，但慣性要使速度不變，但這種速度慣性却使 ψ 超過零點，整個系統就這樣振動著。

§ ω^2 的物理意義　在每一個情況下，角頻率 ω 和系統的物理性質間有如下的這種關係（我們即將証明）：

$$\omega^2 = \text{每單位質量及單位位移的回復力} \qquad (3)$$

有時候，例如電的例子（LC 電路），「慣性質量」並不一定是眞的質量。

§阻尼振動 如果使振動系統不受干擾，那麼它會繼續按方程式(1)振動下去，然而在實際的物理情況中，通常總有摩擦或阻抗過程來阻尼運動，因此一個振動系統較爲實際的描述應該是一種「阻尼振動」，如果在 $t=0$ 時系統受激而發生振動（把開關關上或打它一下或其他方法），由第一冊第七章可以發現 $t\geq 0$ 時

$$\psi(t)=Ae^{-t/2\tau}\cos(\omega t+\varphi), \tag{4}$$

在 $t<0$ 時 $\psi(t)=0$。爲了簡單起見，我們不採用較符合實際的方程式(4)，而用方程式(1)，也就是令衰變時間 τ 趨近無限大，因此忽略摩擦（或 LC 電路中的電阻）。

例1：擺、

一個單擺是由一條長 l 無質量的繩子及一個質點 M 連在繩子的一端組成，繩子的另一端繫在一個固定支點上。（參閱圖1.2）

令 ψ 代表繩子和鉛直線間的夾角（以弳爲單位），擺只在一個平面上擺動，它的組態可以用 ψ 單獨描述，沿著質點所走的圓弧軌跡測量它的位移，可得 $l\psi$，在此點的瞬時切線速度爲 $l\,d\psi/dt$，相對應的加速度爲 $l\,d^2\psi/dt^2$，回復力爲作用力在切線的分量，繩子張力對回復力沒有貢獻，只有重力 Mg 才有切線分量 $-Mg\sin\psi$，因此按牛頓第二定律（質量乘加速度等於力）：

$$\frac{Ml\,d^2\psi}{dt^2}=-Mg\sin\psi(t). \tag{5}$$

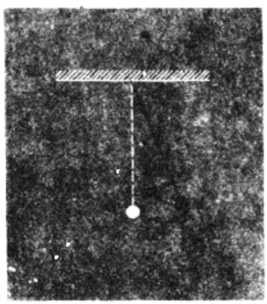

圖1.2 單擺

利用泰勒展開式（參閱附錄方程式(4)）：

$$\sin\psi=\psi-\frac{\psi^3}{3!}+\frac{\psi^5}{5!}-\cdots, \tag{6}$$

此式中的 $\cdots$ 代表其他沒寫出來的無窮多項，當 ψ（記住是以弳爲單位）

很小時，我們在方程式 (6) 中可以只取 ψ ，而忽略所有其他的項，你會問：“怎麼小才是很小？”這個問題並沒有統一的答案一它要看你心目中實驗對 ψ 所需精確程度而定（這是物理，記著沒有一件東西是完完全全可測量的），同時也要看你的仔細程度而定。比方說，$\psi=0.10$ 弳時（ 5.7度），$\sin\psi$ 爲 0.0998,在某些問題上，0.0998＝0.1000是一個粗略的近似。當 $\psi=1.0$ 徑時（ 57.3度），$\sin\psi=0.841$，在某些問題上，0.8＝1.0 是一個適當的近似。

如果我們只保留方程式 (6) 中的第一項，那麼方程式 (5) 變成下列這種形式：

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi, \tag{7}$$

其中

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \tag{8}$$

方程式 (7) 的一般解是一種諧和振動，亦即

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

注意方程式 (8) 中振動的角頻率可以寫成

$$\omega^2 = \text{每單位質量單位位移的回復力}$$

$$\omega^2 = \frac{Mg\psi}{(l\psi)M} = \frac{g}{l},$$

只是用到 $\sin\psi$ 等於 ψ 的近似值。

A 及 φ 這兩個常數是由起始條件所決定，也就是由 $t=0$ 時的位移及速度而決定（因爲 ψ 是角位移，所以相對應的速度就是角速度 $d\psi/dt$ ），因此

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

$$\dot\psi(t) \equiv \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi),$$

因此

$$\psi(0) = A\cos\varphi,$$

$$\dot\psi(0) = -\omega A\sin\varphi.$$

這兩個方程式剛好可以解正值常數 A 及 $\sin\varphi$、$\cos\varphi$（因而決定 φ 大小）

例2：物體及彈簧——縱向振動

物體M在一個無摩擦力的面上滑動，它藉藉著兩個相同彈簧和固定牆相連接，每一個彈簧的質量爲零，彈力常數爲K，鬆弛長度爲a_0。在平衡的時候，每個彈簧都伸長到a，因此在平衡時，每一個彈簧之張力皆爲$K(a-a_0)$(參閱圖1.3a及1.3b)，令z代表M和左邊牆的距離，則($2a-z$)爲它和右邊牆的距離(參閱圖1.3c)，左手彈簧對物體產生一個$-z$方向$K(z-a_0)$的力，而右手彈簧在$+z$方向產生一力$K(2a-z-a_0)$在正z方向的總力爲這兩個力疊加而成：

$$F_z = -K(z-a_0) + K(2a-z-a_0)$$
$$= -2K(z-a).$$

牛頓第二定律爲

$$\frac{M\,d^2z}{dt^2} = F_z = -2K(z-a). \qquad (9)$$

由平衡位置算起的位移爲$z-a$，把它用$\psi(t)$來表示，則

$$\psi(t) \equiv z(t) - a.$$

因此

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

方程式(9)也就成爲

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi, \qquad (10)$$

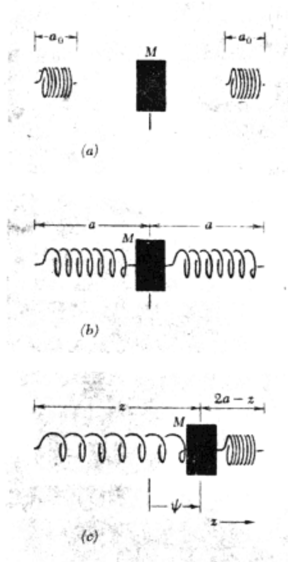

圖1.3 縱向振動。(a)彈簧鬆弛，沒有固定任何東西。(b)彈簧固定在物體及牆上，M在平衡位置。(c)一般組態。

其中

$$\omega^2 = \frac{2K}{M}. \qquad (11)$$

方程式(10)的一般解也是諧和振動$\psi(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$，注意方程式(11)的$\omega^2$=每單位質量單位位移的力，因爲對位移爲$\psi$的回復力爲$2K\psi$。

例3：物體及彈簧——橫向振動

圖 1.4 表示系統的圖形，質量為M的東西經由兩個相同彈簧掛在固定支點上。彈簧之質量為零，其彈力常數為K，鬆弛長度為a_0，當M在平衡位置時，每個彈簧的長度為a。目前把重力省略（在這個問題中，重力不會產生任何回復力，而只是使整個系統下降，但這對於我們所要的近似程度並沒有影響）。現在質塊M有三度自由度，它可以在z方向移動（沿著彈簧的軸）而產生「縱向」振動，這是我們在上面所處理過的問題，在這裏不再考慮這種運動。它同時可以在x或y方向移動而產生所謂「橫向」振動，為了簡單起見，只考慮沿x方向的運動，這時就得想像有一個無摩擦力的東西限制它可以在x方向完全自由運動而不允許它在y或z軸運動（比方說，在質塊M中穿一個洞，然後用一個無摩擦力的鋼條穿過，並把鋼條取x軸方向固定在牆上。但是你可以很容易就想到這是太麻煩了，因為由圖 1.4 的對稱就可以看出如果在某一段時間裏系統是沿x振動，那麼它絕不會有一個趨勢想要在y或z方向做任何運動。這個情形對首先是在y或z軸運動的系統也是一樣；不會因為z的方向的振動而產生x或y的不平衡力，而y方向的振動也不會在

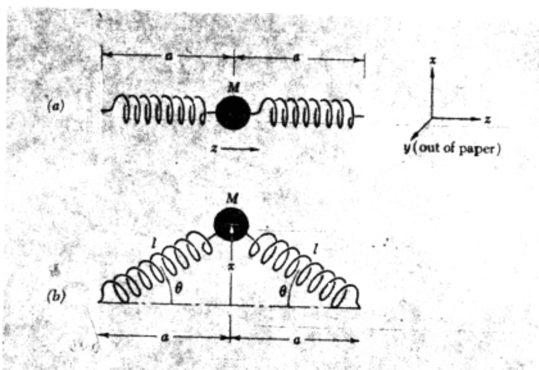

圖 1.4 橫向振動 (a) 平衡時的組態
(b) 一般組態（沿x軸運動）

x 或 z 產生不平衡力）。

在平衡時（圖 1.4 a），每個彈簧的長度爲 a ，產生張力 T_0，即

$$T_0 = K(a - a_0). \tag{12}$$

在一般組態時（圖 1.4 b），每個彈簧長度爲 l ，其張力爲：

$$T = K(l - a_0). \tag{13}$$

這個張力是沿彈簧軸的，取其 x 軸分量，可以得到張力所貢獻的回復力 $T\sin\theta$，方向是負 x 方向，利用牛頓第二定律及 $\sin\theta$ 等於 x/l ，可得

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x = -2T\sin\theta \\ &= -2K(l-a_0)\frac{x}{l} = -2Kx\left(1-\frac{a_0}{l}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

方程式（14）沒有用到任何近似，在我們的假設下（包括方程式(13)所表示的假設，即彈簧是一個「線性」或虎克定律下的彈簧），此式是精確的。此式的右邊出現的 l 是 x 的函數，因此方程式(14)和產生諧和振動的方程式在形式上是不同的．因爲在 M 上的回復力並不精確地綫性正比於位移 x

§ **軟彈簧近似法** (Slinky approximation) 要得到線性回復力的近似方程式有兩種方法，第一種我們把它叫做軟彈簧近似法，這時 a_0/a 對 1 比較時可以省略。又因爲 l 比 a 要長，所以在方程式(14)中可省略 a_0/l ，（所謂軟彈簧是一種螺旋綫彈簧，其鬆弛長度 a_0 約爲三英吋，它可以被拉長到十五英尺而不會超過其彈性界限，因此在方程式(14)中 $a_0/a < 1/60$）。利用這種近似法，方程式(14)變成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{15}$$

其中

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} = \frac{2T_0}{Ma} \qquad (\text{當 } a_0 = 0) \tag{16}$$

此方程式之解爲 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$，即爲諧和振動，這兒的 A 並沒有限制．換句話說可以使這種彈簧產生大振動而仍然具有完全線性的回復力。方程式(16)所代表的橫向振動頻率和方程式(11)所代表的縱向振動頻率相同。在一般情況下，並不一定相同，它只在軟彈簧近似法中才相同，在這裡我們把 a_0 有效地令爲零。

§小振動近似法　如果 a_0 比起 a 來不能被省略（就像在普通講堂中表演用的橡皮筋），那麼就不能用軟彈簧近似法，方程式(14)中的 F_x 不是 x 之綫性函數，但是我們可以証明，當位移 x 比起 a 來很小時，那麼 l 和 a 之差約爲 $a(x/a)^2$ 的數量級，在這種小振動近似法中，我們省略 F_x 中不爲 x/a 綫性的項，現在開始計算。我們要把(14)式中的 l 表示爲 $l=a+$ 某樣東西，當 $x=0$ 時此某樣東西要等於零。因爲不管 x 正負 l 比 a 大，所以某樣東西爲 x 的偶函數，由圖 1.4 可知

$$l^2 = a^2 + x^2 = a^2(1+\epsilon), \qquad \epsilon \equiv \frac{x^2}{a^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{l} &= \frac{1}{a}(1+\epsilon)^{-(1/2)} \\ &= \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\epsilon\right) + \left(\frac{3}{8}\epsilon^2\right) - \cdots\right].\end{aligned} \tag{17}$$

這個式子是把 $(1+x)^n$ 的泰勒展開式（附錄中方程式(20)取 $n=-\frac{1}{2}$，$x=\epsilon$ 而得。現在開始加入小振動近似，即令 $\epsilon \ll 1$ 而且把無限級數(17)式中的高次項略去（最後我們要把所有的項略去而只剩下第一項 $1/a$）。因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{l} &\approx \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\epsilon\right)\right] \\ &= \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{18}$$

把方程式(18)代入方程式(14)，立刻得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2Kx}{M}\left(1 - \frac{a_0}{l}\right) \\ &= -\frac{2Kx}{M}\left\{1 - \frac{a_0}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) + \cdots\right]\right\} \\ &= -\frac{2K}{Ma}(a-a_0)x + \frac{K}{M}a_0\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots.\end{aligned} \tag{19}$$

把立方項及更高次項省略，可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{2K}{Ma}(a-a_0)x = -\frac{2T_0x}{Ma}. \tag{20}$$

（在(20)式的第二個等號中我們用了方程式(12)的T_0），此方程式的形式可以寫爲

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x,$$

其中的

$$\omega^2=\frac{2T_0}{Ma}. \tag{21}$$

解 t 的函數 x ，可得到諧和振動

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$

(21)式中的ω^2即爲每單位位移及單位質量的回復力，在小振動時，回復力爲張力T_0乘以$\sin\theta$，即乘以x/a，再乘以2（有兩條彈簧），而位移爲x，質量爲M，因此每單位位移及單位質量的回復力爲$2T_0(x/a)/xM$。

在橫向振動中，不管是在軟彈簧近似（$a_0=a$）或是在小振動近似（$x/a\ll 1$），頻率都是$\omega^2=2T_0/Ma$，如方程式(16)及(21)，在軟彈簧近似法中，縱向振動也有同樣的頻率，這可比較方程式(11)及(16)。如果軟彈簧近似不可用（亦即a_0/a不能忽略），那麼縱向振動及（小）橫向振動的頻率不會相同，比較方程式(11),(12)及(21)立刻可以看出來。在這種情況下

$$(\omega^2)_{縱向}=\frac{2Ka}{Ma}, \tag{22}$$

$$(\omega^2)_{橫向}=\frac{2T_0}{Ma},\qquad T_0=K(a-a_0). \tag{23}$$

因此在橡皮圈的小振動中（其中的a_0/a不能省略），縱向振動比橫向振動更快

$$\frac{\omega_{縱向}}{\omega_{橫向}}=\frac{1}{\left[1-\frac{a_0}{a}\right]^{1/2}},$$

例4：LC電路

（LC電路的詳細討論，可參閱第二冊第八章）圖1.5是一個LC電路，左邊電容器的下板移了Q_1的電荷到上板，右邊的電容器移了Q_2電荷。電感的電動勢（emf）等於「反電動勢」$L\,dI/dt$，Q_1電荷產生一個$C^{-1}Q_1$的電動勢，因此使正Q_1電荷驅使電流在如圖1.5的箭頭方向流動，因此正Q_1產生正

$L\,dI/dt$，同理由圖 1.5 可知正Q_2產生負$L\,dI/dt$，所以

$$L\frac{dI}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2. \tag{24}$$

在平衡狀況時，兩個電容器上都沒有電荷。電流 I 一面從Q_1中取走電荷，一面送給Q_2電荷，因此，利用電荷守恒律以及圖 1.5 的符號，可得

$$Q_1=-Q_2, \tag{25}$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=I. \tag{26}$$

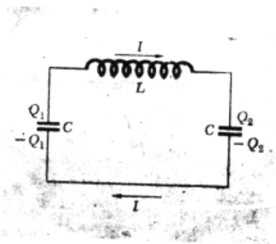

圖 1.5　LC 電路，Q 及 I 的符號如圖所示。如果上板對下板而言是正的話，那麼 Q_1（或 Q_2）爲正，如果電流方向如圖上 I 的箭頭方向，那麼 I 就是正。

由方程式(25)及(26)可知這個問題只有一度自由度，爲了描述整個系統，我們只需要用一個參數Q_1或Q_2或 I 即可，對於我們以後的工作較方便的參數是採用電流 I，因爲這樣對於解多度自由度的問題比較容易。利用(24)式及(25)式消去Q_1，然後對 t 微分，把(26)式代入以消去Q_2：

$$L\frac{dI}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2=-2C^{-1}Q_2;$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}=-2C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}=-2C^{-1}I.$$

因此，電流的方程式爲

$$\frac{d^2I}{dt^2}=-\omega^2I,$$

其中

$$\omega^2=\frac{2C^{-1}}{L}, \tag{27}$$

電流也是做諧和振動

$$I(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$