haidian mingti quanxi quanjie

修订版

北京市海淀区重点中学特级教师 编写

海淀名题

全析全解

高中几何

中国少年儿童出版社

修订版

北京市海淀区重点中学特级教师　编写

haidian mingti quanxi quanjie

海淀名题

全析全解

高中几何

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

海淀名题——全析全解:高中几何/《海淀名题——全析全解》编写组编.—北京:中国少年儿童出版社,1999.6
ISBN 7-5007-4885-X

Ⅰ.海… Ⅱ.海… Ⅲ.几何课-高中-解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 27400 号

书名:海淀名题——全析全解 高中几何(修订版)
作者:本社编
中国少年儿童出版社 出版发行
责任编辑:尚万春
封面设计:徐 欣
社址:北京东四十二条 21 号
邮政编码:100708
印刷:廊坊人民印刷厂
经销:新华书店
787×1092 1/16 28 印张 1012 千字
2000 年 2 月 第 2 版 2000 年 2 月 第 3 次印刷
印数:15000 册
ISBN7-5007—4885—X/G·3677
定价:27.30 元
凡有印装问题,可向本社发行二科或印装厂家调换

海淀名题
全析全解

再版前言

ZAI BAN QIAN YAN

QUAN XI QUAN JIE

任何一门学科，都是将概念作为分析、判断、推理、综合的依据和出发点，揭示学科内容，形成体现这一学科特点的体系和结构。反复应用概念才能有效地建立新旧知识间的联系，理解、巩固掌握概念的本质属性特征。教学就是为了达到这一目的，实现学生由知识到能力的转化过程，要完成这一转化，首先要具备相应的知识量的积累，其次要把握学科的特点与规律，第三要有科学方法作为导引。那么，如何依据“教学大纲”与“考试说明”的要求，在教学的基础上进一步拓宽提高学生能力的渠道，使知识教学与能力培养落到实处，是我们重点研究的问题。为此，我们经过审慎思考、研究、组织了部分颇有经验和影响的一线教师精心编写了这套《海淀名题.·全析全解》丛书。

本书的特点是按本学科自身的知识体系与能力培养的要求，切实体现学生思维发展的层次性与渐近性，覆盖面广，选题典型，并配之以相应解析，在解题思路与方法上给予科学指导，从而形成了以基础知识为依托，以试题训练为载体，以思维指导为途径，以提高解题能力与应用能力为宗旨，适合学生备考、青年自学、教师教学选题需要的新体例。

该丛书选题均分为A、B两个层次，A层次选题为基础题、B层次选题为能力提高题。按照会考、中高考要求，选题具有典型性、代表性。同时吸收了学科教学研究的成果，较好地反映了一线教师指导中、高考以及学生有效学习的匠心独运，蕴含着现代基础教育的精华。

在社会主义市场经济的条件下，目前所出版的中学生复习资料、参考资料浩如烟海，名目繁多，我们在策划编写过程中，进行了认真的分析、比较研究，着力避免与其重复。依据“两纲”，结合教材，着眼学生未来发展需要，力求开拓新思路，提高选题指导的针对性与实效性，以期为读者带来更大的裨益。

编委会

海淀名题
全析全解

目 录
MU LU

立体几何部分

第一章 直线与平面

第二章 多面体和旋转体

解析几何部分

第一章 直线

第二章 圆锥曲线

第三章 参数方程、极坐标

立体几何部分

第一章 直线与平面

海淀名题
全析全解

第一节 平 面

A 层次选题

一、选择题

1. 若点M在直线a上，a在平面α内，则M，a，α间的上述关系的集合表示可记做 （ ）。

A. $M\in a\in\alpha$ B. $M\in a\subset\alpha$ C. $M\subset a\subset\alpha$ D. $M\subset a\in\alpha$

答案：B

解析：A、B、C 都错在"$\in$""$\subset$"符号的使用上，点与直线关系只能用"$\in$"或"$\notin$"，直线与平面的关系只能用"$\subset$"或"$\not\subset$"。

说明：符号语言是数学对象的简缩表式方式，它可以使一些概念定理的论述变得简明扼要，符合《数学科考试说明》提到的"能掌握有关的术语和符号"的考试要求。

2. 已知：直线a上的两点A、B在平面α内，则下列四个结论中不正确的一个是 （ ）。

A. 直线a在平面α内 B. 平面α通过直线a

C. 直线a上只有这两个点在平面α内 D. 直线a上的所有点都在平面α内

答案：C

解析：C 违背了公理1

3. 下列说法中正确的是 （ ）。

A. 如果两个平面α、β有一条公共直线a，就说平面α、β相交，并记作$\alpha\cap\beta=a$。

B. 两平面α、β有一公共点A，就说α、β相交于过A 的任意一条直线

C. 两平面α、β有一个公共点，就说α、β相交于A 点，并记作$\alpha\cap\beta=A$

D. 两平面ABC与DBC相交于线段BC

答案：A

解析：B、C、D 皆违背了公理2，B 不能是过A的任意一条直线，C 不能相交于一点，D 不应该相交于线段，而都应该相交于唯一的一条直线。

4. 下列说法中不正确的是 （ ）。

A. 经过不共线的三点，有一个平面 B. 经过三点，可能有一个平面

C. 经过三点，确定一个平面 D. 经过不共线的三点，有且只有一个平面

答案：C

解析：C 错在题中条件并没有说明三点的位置，若三点共线，则经过三点的平面可有无数个，而"确定"的实际意义是有且只有。

5. 下列命题中正确的是 （ ）。

A. 一点和一条直线确定一个平面 B. 两条直线确定一个平面

C. 相交于同一点的三条直线一定在同一平面内　D. 两两相交的三条直线不一定在同一个平面内

答案：D

解析：A 是错误的，因为这点若在直线上，则不能确定平面。B 是错误的，因为这两条直线如果既不平行也不相交（异面）时，则不能确定平面。C 是错误的，因为当过同一点在一个平面内的三条直线中有一条在平面的上、下方向稍作运动，则这三条直线就不在同一平面内。

D. 是正确的，当三条直线的位置与上式相同时，就不共面了。

6. 三条直线两两相交，由这三条直线所确定平面的个数是　（　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 1 或 3

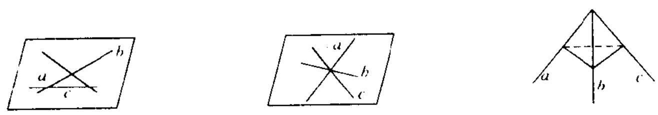


图 1—1

答案：D

解析：图 1—1 是三条直线在空间的所有不同位置的图形。

说明：本题启发我们考虑问题不要只局限平面图形，应养成在三维空间考虑问题的习惯。

7. 一条直线和直线外两点可确定平面的个数是　（　）。

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 1 个或 2 个

答案：D

解析：第一类，当两点确定的直线与已知直线相交或平行时，则确定一个平面；第二类，当两点确定的直线与已知直线，既不相交也不平行，则已知直线与每一个已知点可确定两个平面。

说明：求类似确定平面的个数，交点的个数，交线的条数问题，都应对相应的点，线、面位置关系进行分类讨论，分类讨论是中学数学中常用的重要的数学思想和方法。

8. 三条平行直线所确定的平面个数是　（　）。

A. 1 个　B. 2 个　C. 1 个　D. 1 个或 3 个

答案：D

解析：三条平行直线如果在一个平面内，则确定一个平面，否则确定三个平面（即分共面，不共面两类）。

9. 经过空间三点能确定　（　）。

A. 一个平面　B. 无数个平面　C. 一个或无数个平面　D. 一个平面或不能确定

答案：D

解析："确定"的实际意义是有且只有，"确定无数个平面"这句话本身是病句，显然B、C 不正确，而当三点共线时显然不能确定。

10. a、b、c 为三条两两互相平行的直线，则经过直线 a 的平面中　（　）。

A. 必有一个平面同时经过 b 和 c　　B. 必有一个平面经过 b 但不经过 c

C. 必有一个平面经过 c 而不一定经过 b　D. 没有一个平面同时经过 b 和 c

答案：C

解析：当三条直线共面时，显然有一个平面过 a 且同时过 b、c，而当三条直线不共面时，显然没有平面过 a 且同时过 b、c。

11. 已知四条不相同的直线，过其中每两条作平面，至少和至多确定平面　（　）。

A. 0 个和 1 个　B. 1 个和 4 个　C. 0 个和 6 个　D. 不同于 A、B、C 的答案

答案：C

解析：至多、至少问题一定产生在最特殊的几何位置。当四条直线中任何两条直线既不相交，也不平行

时，任何两条直线也不能确定平面。

当四条直线中任何两条都能确定一个平面（即过同一点而又任何三条不共面）时，个数等同于给四条直线标上1、2、3、4号，集合｛1，2，3，4｝有多少个两个元素的子集，有｛1，2｝，｛1，3｝，｛1，4｝，｛2，3｝，｛2，4｝，｛3，4｝

12. 已知平面$\alpha\cap\beta=l$，点$M\in\alpha$，$N\in\alpha$，$P\in\beta$，且$P\notin l$，又$MN\cap l=R$，点$M\in\alpha$，三点所确定的平面记为r，则$\beta\cap r$是（　　）。

A. 直线MP　B. 直线NP　C. 直线PR　D. 直线MR

答案：C

解析：由已知条件可画出图形，如图1—2

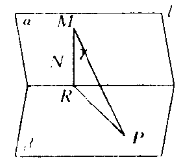


图1—2

说明：立体几何重点考查空间想象能力，而多以文字语言和符号语言给出，由学生自己设计模型进行解答，是学习的难点。

13. 两个平面重合的条件是它们的公共部分有（　　）。

A. 两个公共点　B. 三个公共点　C. 四个公共点　D. 两条平行直线

答案：D

解析：两个、三个、四个公共点都可能在一条直线上，两个平面的公共部分是一条直线，只能说明两平面相交，而两条平行线确定一个平面。

14. 空间有四个点，如果其中任意三个点都不在同一条直线上，那么经过其中三个点的平面（　　）。

A. 可能有3个，也可能有2个　B. 可能有4个，也可能有3个

C. 可能有3个，也可能有1个　D. 可能有4个，也可能有1个

答案：D

解析：分类，第一类，四点共面，则有一个平面，第二类，四点不共面，因为没有任何三点共线，则任何三点都确定一个平面，共有4个。

15. 下列命题中正确的命题个数是（　　）。

①三角形是平面图形　②四边形是平面图形

③四边相等的四边形是平面图形　④矩形一定是平面图形

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

答案：B

解析：命题①是正确的，因为三角形的三个顶点不共线，所以这三点确定平面。

命题②是错误，因平面四边形中的一个顶点在平面的上、下方向稍作运动，就形成了空间四边形。

命题③也是错误，它是上一个命题中比较特殊的四边形。

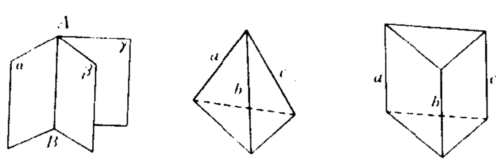
命题④是正确的，因为矩形必须是平行四边形，有一组对边平行，则确定了一个平面。

16. 空间三个平面如果每两个都相交，那么它们的交线的条数是（　　）。

A. 一条　B. 两条　C. 三条　D. 一条或三条

答案：D

解析：如图1—3甲交线为一条，如图乙、丙两图都为三条情况。



甲　　乙　　丙

图1—3

说明：图形是直观的语言，图形的直观性、准确性、直接影响数学思维和数学推理，将符号语言翻译成文字语言，并转化为图形语言是立体几何的第一道难关。

17. 直线$l_1 \cap l_2=M$，l_1上取异于M点4个点，l_2上取异于M点的5个点，由这9个点能确定平面 （　）。

A. 1个　　B. 3个　　C. 6个　　D. 9个

答案：A

解析：这九个点中每三个点确定的平面都是l_1与l_2所确定的平面，主要原因是l_1与l_2相交，若改为$l_1 /\!/ l_2$也如此。

18. 与不共线的三点距离都相等的点的个数是 （　）。

A. 一个　　B. 二个　　C. 三个　　D. 无数个

答案：D

解析：过这三点为顶点的三角形的外心与此三角形所在平面垂直的直线上所有点都满足条件。

19. 已知正$\triangle ABC$的边长为a，那么$\triangle ABC$的平面直观图$\triangle A'B'C'$的面积为 （　）。

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$

答案：D

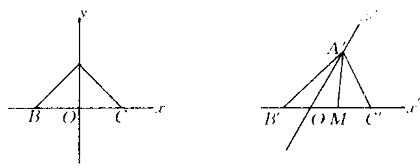


图1—4

解析：如图，取BC边所在直线为x轴，过BC边中点且垂直于x轴的直线为y轴，$BC=a$，则$OA=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，在x'轴上以原点为中心取$OC'=OC$，$OB'=OB$，在y'轴上方取$OA'=\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，由$A'$点向$Ox'$轴作垂线，垂足$M$点，则$\mathrm{Rt}\triangle A'MO'$中，$OA'=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，$\angle A'O'C'=45°$，

所以$A'M=\frac{\sqrt{6}}{8}a$，$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$。

说明：用斜二测法画水平放置的平面图形的关键是选择“水平方向”与“垂直方向”，合理地定点，定线作图。

二、填空题

20. 直线是向两端________延伸的，平面是________延展的。

答案：无限；无限。

解析：根据定义、直线、平面的概念是描述性概念，它们 具有无限的延伸性和无限的延展性。

21. 如果一条直线上有一个点不在平面上，则这条直线与这个平面的公共点最多有________个。

答案：一个。

解析：如果有两个，则直线就在平面内，那么直线上的所有点都在这个平面内，这就与已知有一个点不在平面上矛盾，所以这条直线与这个平面的公共点最多有一个。

22. 两两相交的三条直线，仅当交点数等于________时，这三条直线才可能不共面。

答案：一个

解析：仅当三条直线交于一点且不在同一平面内，才能满足题设条件，三条直线两两相交不可能产生两个交点，如果产生三个交点，则这三条直线不难证明是共面的。

23. 四条线段顺次首尾相接，它们最多可能确定________个平面。

答案：四个

解析：最多一定产生在特殊位置，即四条线段不共面其中每相邻两条确定一个平面。

24. 三个平面最多可将空间分成________个部分，最少分成________个部分。

答案：八个；四个

解析：图1—5 甲、乙依次为分成八个和四个的情况

25. 空间有五个点，若五点共线，可确定________个平面；若其中四点共线，可确定________个平面；若其中有三点共线其它任何三点不共线，可确定________个平面；若任何三点都不共线；可确定________个平面。

答案：0；　1；　1或5；　1或7或10

解析：五点共线时，经过五个点的平面有无数个，但不能"确定"；四点共线时，符合推论1，直线和直线外一点确定一个平面；三点共线，而其它任何三点不共线分两类，一类是直线外两点确定的直线与已知直线平行或相交，则确定一个平面，另一类此两点确定直线与已知直线既不相交也不平行，即不共面时，已知直线与直线外每一点都确定一个平面，共有三个，此类共计五个；任何三点都不共线分五点共面、四点共面、三点共面，四点共面即在三点共面中去掉四点共面中任三点共面重合多的部分，可产生1个或7个或10个。

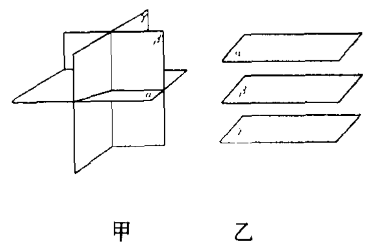


图1－5

26. 空间一条直线及不在这条直线上的两个点，如果连结这两点的直线与已知直线________，则它们在同一平面内。

答案：相交或平行

解析：根据推论2，推论3确定平面的条件。

27. 三角形、四边形、正六边形、圆，其中一定是平面图形的有________个。

答案：三个

解析：三角形的三个顶点不在一条直线上，故可确定一个平面，三角形在这个平面内；圆上任取三点一定不在一条直线上，这三点即确定一个平面，也确定了这个圆所在的平面，所以圆是平面图形；而正六边形内接于圆，故正六边形也是平面图形；而四边形就不一定是平面图形了，它的四个顶点可以不在同一平面内。

28. 三条平行直线可以确定平面________个。

答案：1个或3个

解析：分类、一类三线共面，即确定一个平面，另一类三线不共面，每两条确定一个，可确定3个。

29. 在空间四边形$ABCD$各边上分别取E、F、G、H四点，如果EF与GH交于一点P，则　(　　)。

A. P一定在直线BD上　　B. P一定在直线AC上

C. P在直线AC或BD上　　D. P既不在AC上；又不在BD上

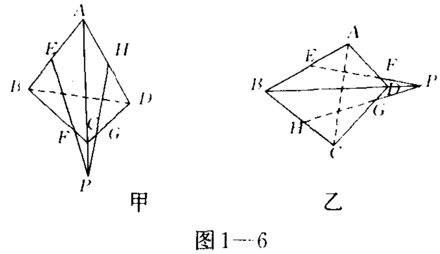


图1—6

答案：C

解析：本题没明确指出E、F、G、H四点按顺时针还是逆时针排列。若顺时针排列，EF、GH直线分别在平面ABC，平面ADC上，如图1—6甲，又因两面交线为AC，所以EF与GH交点一定在直线AC上。同理可知，当按逆时针排列时，P点在直线BD上，如图1—6乙

30. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，G、H、F、E分别为AB、BC、CC_1、C_1D_1的中点，K是直线DC上的点，则E、F、H、G、K五点最少能确定________个平面，最多能确定________个平面。

答案：1个；7个

解析：如图1—7易证$EG \underset{=}{/\!/} 2HF$，连结$EF$、$GH$并延长交$DC$延长线于$M$点，故当$K$点与$M$点重合时，五点确定一个平面，当$K$点与$M$点不重合时，则$K$点与$E$、$F$、$G$、$H$中任意两点都能确定一个平面，共计7个。即平面$KEG$、平面$KEF$，平面$KEB$，平面$KFH$，平面$KFG$，平面$KGH$，平面$EFGH$。

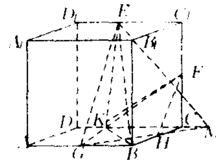


图1—7

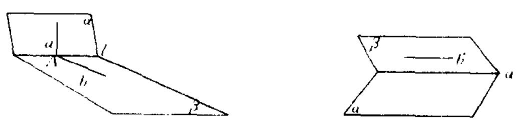
三、解答题

31. 画出满足下列条件的图形。

(1) $\alpha \cap \beta = l$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a \cap b = A$

(2) $\alpha \cap \beta = a$，$b \subset \beta$，$b /\!/ a$

解析：如图1—8—甲，1—8—乙



甲　　　　　　乙

图1—8

32. 经过两条相交直线，有且只有一个平面。

证明：设直线a，b相交于点M，如图1—9。

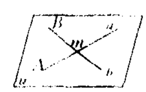


图1—9

(1) 存在性。

在a、b上各取异于M的点A和B，

因此过A、B、M可以有一个平面，设为α，

∵A、M同在a上，也同在α内，由公理1，$a \subset \alpha$，

同理，$b \subset \alpha$，因此过a、b存在一个平面α。

(2) 唯一性。

假设过a、b还有一平面β，则不共线的三点A、B、M都在β内，这与公理3矛盾，因此假设不真，即相交二直线a、b确定一平面。

说明：(1)"有且只有"等价于"确定"也等价于"存在且唯一"，这类问题的证明，通常要证存在性和唯一性两方面。

(2) 证明唯一性的问题，一般采用反证法。

33. 如图1—10，已知$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$l \cap l_1 = A$，$l \cap l_2 = B$，$l \cap l_3 = C$，

求证：l_1，l_2，l_3，l共面。

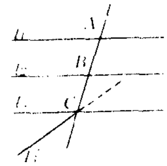


图1—10

证法1：（重合法）由$l_1 /\!/ l_2$，知l_1与l_2确定，

一个平面α，同理l_2，l_3确定一个平面β，

由$A \in l_1$，$l_1 \subset \alpha$，知$A \in \alpha$，同理$B \in \alpha$，又A、$B \in l$，故$l \subset \alpha$，

同理$l \subset \beta$（确定两平面α、β且四线分别在α或β内），

由上知$l \cap l_2 = B$，且l，$l_2 \subset \alpha$、l，$l_2 \subset \beta$，因两相交直线l、l_2确定一个平面，故α与β重合，所以l_1，l_2，l_3，l共面。

证法2：（归一法）由$l_1 /\!/ l_2$，知l_1、l_2确定一个平面α，再证l_3、l在α内。

由$A \in l_1$，$l_1 \subset \alpha$，知$A \in \alpha$，同理$B \in \alpha$，又A、$B \in l$，

故$l \subset \alpha$。

由$C \in l$，$l \subset \alpha$，知$C \in \alpha$，过C在α内作$l_3' /\!/ l_2$，又l_3过C也平行l_2，因为过直线外一点只能有一条直线与此直线平行，所以l_3与l'重合，由$l_3' \subset \alpha$，知$l_3 \subset \alpha$，即l_1，l_2，l_3，l共面。

说明：归一法：(1) 先根据题设确定一个平面；(2) 再证其余的点、线在这个平面内（证点在平面内，常转证这个点所在直线在这个平面内，而证直线在平面内，又往往证这条直线上有两点在这个平面内，即转化的思想方法）

重合法：(1) 先根据题设条件确定两个或两个以上的平面（这些平面必须包括要证共面的所有点线）；(2) 再证以上平面重合。

34. 如图1－11，E、F、G、H分别为正方体AC_1棱的中点，求证：E、F、G、H共面。

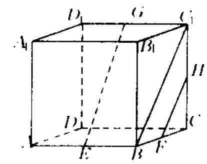


图1—11

证明：连结HF、GE、C_1B，由AC_1是正方体，

知$GC_1 /\!/ DC /\!/ BE$，

故$GC_1 /\!/ BE$，又

$GC_1 = \frac{1}{2} D_1C_1 = \frac{1}{2} AB = BE$，故$GEBC_1$是平行四边形，所以$GE /\!/ C_1B$，又$HF$是$\triangle CBC_1$的中位线，故$HF /\!/ BC_1$，所以$HF /\!/ GE$。从而$HF$、$GE$共面，于是$E$、$F$、$G$、$H$共面。

此题也可过G、H和过E、F作两直线证其相交。

说明：这是证共面问题的特例（证四点共面）除可用“重合法”，“归一法”证外，还常常分别过两个不同的点作直线，证两直线平行或相交。

35. 已知四边形$ABCD$中，四个角$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$、$\angle DAB$都是直角，求证：四边形$ABCD$必是矩形。

证明：分类讨论

(1) 当$ABCD$是平面四边形时，它确是矩形（证明略）

(2) 若$ABCD$是空间四边形，不失一般可设点C在平面ABD之外（如图1—12）

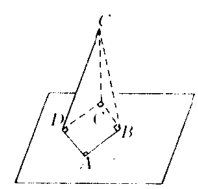


图1—12

设C'是点C在平面ABD内的射影，因为$AD \subset$面ABD，

$CC' \perp$面ABD，$CD \perp AD$，所以$C'D \perp AD$（后面讲的三垂线定理）

同理$C'B \perp AB$

$\begin{cases} CD > C'D \\ CB > C'B \end{cases} \Rightarrow CD^2 + CB^2 > C'D^2 + C'B^2$ ①

连BD，在$\triangle BCD$中，因为$\angle BCD = 90°$，故$CD^2 + CB^2 = BD^2$ ②

在平面四边形$ABC'D$中，因为$\angle DAB = \angle ABC' = \angle ADC' = 90°$，

所以$\angle BC'D = 90°$，所以$C'D^2 + C'B^2 = BD^2$ ③将②③代入①得$BD^2 > BD^2$，自相矛盾，故$ABCD$不可能是空间四边形，只能是平面四边形，所以四边形$ABCD$是矩形。

说明：分类讨论和反证法是中学数学常用的重要的数学思想和方法。

36. 过空间一点O作不在同一平面内的三条射线OX、OY、OZ

求证：$\angle XOY$，$\angle YOZ$的角平分线和$\angle XOZ$的邻补角的角平分线三直线共面。

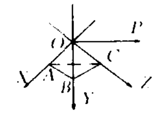


图1—13

证明：如图1—13，在OX、OY、OZ，上取A、B、C，

设$OA = OB = OC$设$\angle AOB$，$\angle BOC$的角分线和AB、BC的点为M、N，

$\angle AOC$的邻补角的平分线为OP，连MN

$\because OM$，ON为等腰三角形AOB，BOC的顶角平分线，

$\therefore M$、N分别为AB、BC的中点。

$\therefore MN /\!/ AC$

$\because OP$ 为等腰三角形 AOC 的邻补角分线。

$\therefore OP /\!/ XZ$（$\because \angle OAC = \angle OCA = \frac{1}{2}\angle AOC$ 的邻补角度 $= \angle POC$）

于是 $OP /\!/ MN$，即 OP 与 MN 共面，故 OM，ON，OP 三直线共面。

说明：证明两直线共面，常从证明两直线平行或相交入手。

37. 若有两两不共面的三条直线，则存在无穷多条直线与此三直线都相交且其中任两条直线不共面。

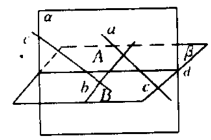


图 1—14

证明：如图 1—14，设三条不共面直线为 a，b，c，在直线 c 上任取一点，过 a、A，b、A，分别作平面 α 和 β，则由 α、β 有公共点 A，必有过点 A 的交线 d，$\because d \not/\!/ a$，b，则 d 必于 a，b 相交，设交 C、B，故 d 为所求直线。

由于点 A 可在直线 C 上任意选取，故此种与三直线都相交的直线必有无数条。

按同法在 C 上取另一点 A_1，作出过 A_1 且与 b，a 均相交的直线 d_1，设分别交 b，a 于 B_1，C_1，若 d 与 d_1 共面，因直线 a，b 上各有两点 C、C_1，B，B_1 在此平面内，则 a，b 均在此平面内，这与题设矛盾，故 d 与 d_1 不共面，即和两两不共面的三条直线都相交的直线，其中任意两条都不共面。

38. 若一平面与两平行线之一相交，则该平面必与另一直线相交。

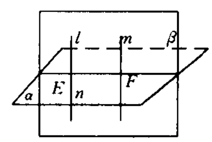


图 1—15

证明：如图 1—15，设 l，m 为已知两条平行直线，

则 l，m 共面，设为 β，

平面 α 与直线 l 交于 E 点；由平面公理 2，

α 与 β 必相交于过点 E 的直线 n，

在平面 β 内，直线 n 与两行平线 l，m

之一的 l 相交，则 n 必与直线 m 相交，设其交点为 F，

则 F 即是平面 α 内的点，又是直线 m 上的点，故平面 α 与直线 m 相交。

39. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD$——$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 AA_1，D_1C_1 的中点，过 D，M，N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l。

(1) 画出 l 的位置；

(2) 设 $l \cap A_1B_1 = P$，求线段 PB_1 的长

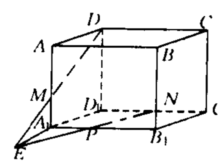


图 1—16

解析：(1) 延长 DM 交 D_1A_1 的延长线于 E，连结 NE 交 A_1B_1 于 P，

EN 即为直线 l 的位置，(如图 (1—16)

(2) $\because M$ 是 AA_1 的中点，$AD /\!/ ED_1$，

$\therefore AD = A_1E = A_1D_1 = a$，

$\because A_1P /\!/ D_1N$，且 $D_1N = \frac{1}{2}a$，

$\therefore A_1P = \frac{1}{2}D_1N = \frac{1}{4}a$，

则 $PB_1 = A_1B_1 - A_1P = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$。

说明：此题中点 $N \in$ 底面 A_1C_1，且 $N \in$ 截面 DMN，关键是寻找第二个具有与点 N 相同特点的点，即点 E，两平面相交于两点，则交线确定。

40. 如图 1—17，已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三边所在直线分别交平面 α 于 P、Q、R

求证：P、Q、R 共线

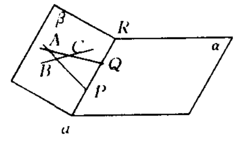


图 1—17

证明：设 $\triangle ABC$ 所在平面为 β。

由 β 内有直线与 α 相交，知平面 α 与平 β 相交，设交线为直线 a。

由 $P \in AB$，$AB \subset \beta$，知 $P \in \beta$，又 $P \in \alpha$，

故 P 是 α、β 的公共点，从而 $P \in a$，

同理Q、$R\in a$，故P、Q、R共线。

说明：证明三点共线的基本方法是：

(1) 证明这些点是某两个平面的公共点，依据公理2，两个平面的公共点都在它们的交线上；

(2) 把所要证的共线三点归结到某一平面图形中，逐个分析每个点的特性，如分别是三角形一边上的中点、重心和顶点时，此三点共线，见下题

41. 如图1—18，O_1是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的上底面$A_1B_1C_1D_1$的中心，M是对角线A_1C和截面B_1D_1A的交点，

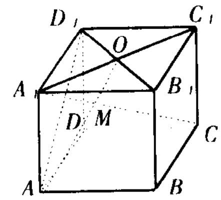


图1－18

求证：O_1、M、A三点共线。

证法 (1)：$\because$在上底面$A_1B_1C_1D_1$中，

$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，$B_1D_1\subset$平面$B_1D_1A_1$，

$A_1C_1\subset$平面AA_1C_1C，

$\therefore O_1$是平面B_1D_1A和平面AA_1C_1C的公共点。

$\because A_1C\cap$平面$B_1D_1A=M$，$A_1C\subset$平面AA_1C_1C，

$\therefore M$是平面B_1D_1A和平面AA_1C_1C的公共点。

$\because A\in$平面B_1D_1A，$A\in$平面AA_1C_1C，

$\therefore A$是平面B_1D_1A和平面AA_1C_1C的公共点。

$\therefore O_1$、M、A在两个平面B_1D_1A和AA_1C_1C的交线上。

由公理2知，O_1、M、A三点共线。

证法 (2)：$\because$在正方形$A_1B_1C_1D_1$中，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，O_1是B_1D_1的中点，

$\therefore CC_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$\therefore A_1C_1$是A_1C射影且$A_1C_1\perp B_1D_1$。

从而得$B_1D_1\perp A_1C$，同理$AB_1\perp A_1C$，$AB_1\cap B_1D_1=B_1$

$\because A_1C\perp$平面B_1D_1A，M是垂足，斜线$A_1A=A_1B_1=A_1D_1$，

$\therefore$射影$MA=MB_1=MD_1$，$\triangle AB_1D_1$是等边三角形。

得M是$\triangle AB_1D_1$的中心，O_1是$\triangle AB_1D_1$底边B_1D_1中点。

则O_1、M、A三点共线。

42. 已知E、F、G、H分别是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AB、BC、CC_1、C_1D_1的中点，证明EF、HG、DC三线共点

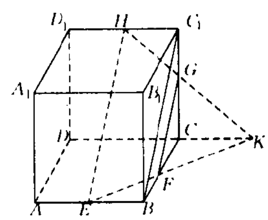


图1—19

证法 (1)：如图1—19，由E、F、G、H是棱的中点得$FG/\!/BC_1$

又$EH/\!/BC_1$，$\therefore FG/\!/EH$

$\therefore E$、F、G、H四点共面于α。

$\because EF$、HG不平行，设$EF\cap HG=K$，

$\therefore K\in HG$，又$HG\subset$平面CC_1D_1D，故$K\in$平面CC_1D_1D

又$\because K\in EF$，$EF\subset$平面$ABCD$，故$K\in$平面$ABCD$，

则K是平面$ABCD$和CC_1D_1D公共点。

$\because$平面$ABCD\cap$平面$CC_1D_1D=DC$，

$\therefore K\in DC$，即EF、HG、DC三线共点。

证法 (2)：设$EF\cap DC=K$

$\because E$、F是中点，$\therefore BF=CF$，$\angle EFB=\angle CFK$

推得 $\text{Rt}\triangle BEF\cong\text{Rt}\triangle CFK$，

$\therefore CK=EB=\frac{1}{2}AB$，

设$HG\cap DC=K'$，由H、G是中点得：

$GC_1=GC$，$\angle C_1GH=\angle CGK'$，

$\therefore \text{Rt}\triangle K'GC\cong\text{Rt}\triangle HGC_1$

$\therefore CK'=C_1H=\frac{1}{2}AB$，

即$CK'=CK$，K与K'重合。

$\therefore EF$、DC、HG三线共点。

43. 空间四边形$ABCD$中，E、F是AB、BC的中点，$G\in CD$，$H\in AD$，

且$DG:GC=1:3$，$DH:HA=1:3$，

求证：FG、EH、BD三线交于一点。

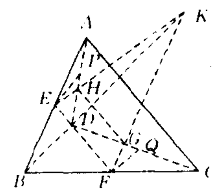


图1－20

证法（1）：如图1－20$\because G\in CD$，$H\in AD$，

且$\frac{DG}{GC}=\frac{1}{3}$，$\frac{DH}{HA}=\frac{1}{3}$，

$\therefore HG\parallel AC$，$EF\parallel AC$。

又$\therefore HG\parallel EF$，$EH\not\parallel FC$，从而得$EH\cap FG=K$，

又$K\in EH$，$EH\subset$平面ABD，故$K\in$平面ABD，

又$\because K\in FG$，$FG\subset$平面BDC，故$K\in$平面BDC，

则K是平面ABD和平面BDC的公共点，

而平面$ABD\cap$平面$BDC=BD$，故$K\in BD$。

$\therefore EH$、EG、BD三线交于一点K。

证法（2）：在平面ABD内，$EH\cap BD=K$，

在平面ABD内，作$EP\parallel BD$交AD于P，

$\because E$是AB中点，P是AD中点及$DH:HA=1:3$，

$\therefore PH=HD$，$\angle EHP=\angle DHK$，$\angle EPH=\angle HDK$。

从而得$\triangle PEH\cong\triangle HDK$

$\therefore DK=EP=\frac{1}{2}BD$。

在平面BDC中，设$FG\cap BD=K'$，

在平面BDC内，作$FQ\parallel BD$交DC于Q，

$\because$F是BC中点，Q是DC中点，$DG:GC=1:3$，

$\therefore DG=GQ$，$\angle FQG=\angle GDK'$，$\angle FGQ=\angle DGK'$，

从而得$\triangle FGQ\cong\triangle DGK'$。

$\because DK'=FQ=\frac{1}{2}BD$，$DK=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore DK'=DK$，即K'与K重合。

$\therefore EH$、FG、BD三线公点。

说明：证明三线共点问题的基本方法是：

（1）先确定待证的三线中的两条相交于一点，再证明此点是二直线所在平面的公共点，第三条直线是两个平面的交线，由公理2知，二平面的公共点在它们的交线上，从而证明了三线共点。

（2）用同一法证明，以二平面的交线为主线，使它和另二直线分别交于不同的两点，由三角形全等导出线段相等，证明两点重合，得出三线共点。

44. A、B、C、D四点不在同一平面内，但$AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$。

求证：$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=180°$

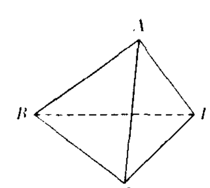


图1—21

证明：如图1—21在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中

$\because AB=CD$，$AC=BD$，BC边公有

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DCB$

则$\angle BAC=\angle BDC$

同理，$\triangle ACD\cong\triangle BDC$，$\angle CAD=\angle CBD$

$\triangle ABD\cong\triangle BCD$，$\angle BAD=\angle BCD$

$\therefore \angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=\angle BDC+\angle CBD+\angle BCD=180°$

说明：两个三角形全等的判定及性质，在空间仍然成立，不需两个三角形在同一平面这个条件。

B层次选题

一、选择题

45. 公理1用符号表示，正确的是 （　　）。

A. $M\in a$，$N\in a$，且$M\in\alpha$，$M\in\beta$，则$a\in\alpha$　　B. $M\in a$，$N\in a$，且$M\in\alpha$，$N\in\beta$，则$a\subset\alpha$

C. $M\in\alpha$，$N\in\alpha$，则$a\subset\alpha$　　D. $M\in a$，$N\in a$，则$a\subset\alpha$

答案：B

解析：A错在$a\in\alpha$不能用"$\in$"符号，而用"$\subset$"符号。C、D都错在条件不够充分。

46. 已知线段AB和平面α，$A\in\alpha$，$B\notin\alpha$，那么 （　　）。

A. 线段AB与平面α至少有一个公共点　　B. 线段AB与平面α必然有两个公共点。

C. 线段AB与平面α只有一个公共点　　D. 线段AB与平面α至多有一个公共点。

答案：C

解析：A、B显然违背了公理1，因为线段AB上有两点在平面α内，则直线AB就在平面α内，则B点在α内，产生矛盾。D错在线段AB不可能与α无公共点，因为A点就在α内。

47. 下列四个命题中，正确的一个是 （　　）。

A. 四边形一定是平面图形　　B. 空间的三个点确定一个平面

C. 梯形一定是平面图形　　D. 六边形一定是平面图形

答案：C

解析：C是正确的。因为梯形有一组对边平行，则这两边所在的直线确定一个平面，则四条边都在平面内，即是平面图形。

A、B、D是错误的，确定平面的条件不够充分。

说明：这种判断题都可以从平面图形入手，首先想象平面内的四边形、六边形，再将某条边在平面的上下两方向做运动，则不难想象出它们不是平面图形，即用"运动"的观点来观察空间的几何图形。

48. 设α、β是不重合的两个平面，$\alpha\cap\beta=a$，下面四个命题：

①如果点$P\in\alpha$，且$P\in\beta$，那么$P\in a$；

②如果点$A\in\alpha$，点$B\in\beta$，那么$AB\subset\alpha$；

③如果点$A\in\alpha$，那么点$B\in\beta$；

④如果线段$AB\subset\alpha$，且$AB\subset\beta$，那么$AB\subset a$

其中正确命题的个数是： （　　）。

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

答案：C

解析：①、④是正确的　②、③错在条件不充分

49. 下列命题中正确的命题个数是 （　　）。

①经过一点的两条直线确定一个平面；

②如果一条直线与两条直线都相交，那么这三条直线确定一个平面；

③经过一点的三条直线确定一个平面；

④点A在平面α内，也在直线a上，则直线a在平面α内；

⑤平面α和平面β相交于不在同一条直线上的三个点A、B、C。

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

答案：A

解析：①是正确的，因为两条相交直线确定一个平面。