初中数学奥林匹克

同步教材

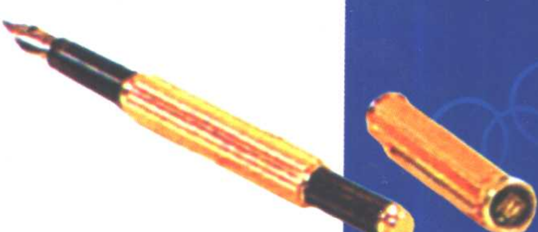
新版

- 获全国图书“金钥匙”奖
- 获全国优秀教育畅销书奖

初三卷

主审　陈传理

主编　刘凯年



初中数学 奥林匹克系列

西南师范大学出版社

初中数学奥林匹克同步教材

初三卷

主　审　陈传理
主　编　刘凯年
副主编　张　斌
编　者　(以姓氏笔画为序)
余　泓　孟小云　陈永奎
郑　黎　段世彬　胡能禹
梁学友　黄梦熊

西南师范大学出版社

特约编辑：梁　锋
责任编辑：胡小松
封面设计：王　煤

初中数学奥林匹克同步教材

初三卷

刘凯年　主编

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
重庆科情印务有限公司印刷
开本：787×1092　1/32　印张：7.75　字数：185千
1999年9月　第1版　2001年9月　第8次印刷
ISBN 7-5621-0731-9/G·530

定价：7.50元

序

初中是学生从儿童到少年的过渡阶段，体力、智力从量到质都有急剧发展，这个时期，他们的爱好不同，课外发展也就不尽相同，因此他们需要轻松、愉快、丰富多彩的课外活动。

数学奥林匹克是世界上深有影响的中学生学科竞赛活动，开展数学奥林匹克活动的根本目的，就在于吸引青少年对数学的兴趣，培养他们的数学探索能力，提高其数学素质以适应未来发展的需要。

每年一次的数学奥林匹克竞赛吸引了上百万的青少年学生参加，这项有意义的课外教育活动已成为中学数学教育的重要组成部分，为此，不但应培养学生的参与精神，还应尽量做好在普及基础上的提高。

《初中数学奥林匹克同步教材》就是为提高学生数学能力，为学生适应初中数学

奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助教材。其主要特点：一是“竞赛”，二是“同步”。所谓“竞赛”是指内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性，并特别注重了创新能力的培养。所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度一致。这二者的有机结合将使学生的数学能力得到切实提高。

虽然数学竞赛有一定难度，但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的，也许本书会给你摘取明珠作好铺垫。

中国数学会普及工作委员会副主任

陈传理

1999年4月于华中师大

前　言

近年来，在奥林匹克数学竞赛（IMO）中，我国选手频频取得优异成绩，在国外产生了极大反响，数学奥林匹克正吸引着越来越多的师生参加，全国各种层次的数学竞赛活动已空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要，我们组织编写了这套《初中数学奥林匹克同步教材》。

本套书以《九年义务教育的初中数学教学大纲》和《初中数学竞赛大纲》为指导，并与《九年义务教育初中数学》教材（人教版）同步，立足于大纲和教材的重点、难点，对教材的相应内容进行了必要的延伸和拓广。突出数学思想方法的渗透和分析、处理、解决问题的能力的培养。

本套书分初一卷、初二卷、初三卷、综合卷。其中初一、初二、初三卷均按知识、方法块为单元以课时形式进行编写，每课

内容及例题的安排均注重了由易到难、由浅入深，使不同层次的学生都能从中获得裨益。每课练习均分为A、B两组(并附有参考答案)，它们大多是国内外优秀的中考和数学竞赛试题，学生可根据不同需要选择使用。综合卷按年级编拟了32套竞赛模拟试题供广大师生强化训练时使用。

由于本套书在编写过程中既强调了与初中数学教材同步，又注意到了不同层次学生的需求，内容有梯度、有层次，因此，本书既可作为师生开展数学课外活动的教材，又可作为学生系统复习和进一步提高的参考读物。

由于编写时间仓促及编者水平所限，书中难免还存在一些疏漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　录

初三年级上期

初三年级下期

第一课　二次方程与方程组

一元二次方程的一般形式为：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其解为：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant0)$．其主要解法有：直接开方法、配方法、公式法、因式分解法、换元法．

例1　解方程：$x^2+\sqrt{2}(x+1)=4x+1$．

分析：解一元二次方程之前，通常需要将原方程整理为一元二次方程的一般形式．

解：原方程整理为 $x^2+(\sqrt{2}-4)x+\sqrt{2}-1=0$，

$$\because b^2-4ac=(\sqrt{2}-4)^2-4(\sqrt{2}-1)$$

$$=22-12\sqrt{2}=(2-3\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore x=\frac{-(\sqrt{2}-4)\pm(3\sqrt{2}-2)}{2}.$$

$$\therefore x_1=3-2\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2}.$$

例2　解关于 x 的方程：

$m^2(x^2-x+1)-m(x^2-1)=(m^2-1)x$．

分析：含字母系数的方程，要注意方程有解还是无解；若有解，解如何表示；若二次项系数含有字母，则首先要讨论二次项系数是否为零．

解：原方程整理为：

$(m^2-m)x^2-(2m^2-1)x+(m^2+m)=0$．

若 $m^2-m=0$，即 $m=0$ 或 1，则原方程化为一次方程．

当 $m=0$ 时，$x=0$；当 $m=1$ 时，$x=2$．

若 $m^2-m\neq0$，即 $m\neq0$ 且 $m\neq1$，则原方程为二次方程，分解因式可得：$[mx-(m+1)][(m-1)x-m]=0$，

$\therefore x_1=\dfrac{m+1}{m}, x_2=\dfrac{m}{m-1}$.

例3 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x^2+2y^2-2x+y-3=0, & ① \\ 2x^2+5y^2-4x+y-6=0. & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=81, & ① \\ x^2+2xy=72. & ② \end{cases}$

分析：解二元二次方程组的基本思想是"消元"和"降次".

解：(1) 因含 x 的项的系数成比例，则可消去 x，得 $y^2-y=0$，$\therefore y=0$ 或 1，分别代入其中一个方程，则对应的 x 值是 3，-1 和 0，2. 故原方程组的解为：

$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=0, \\ y_3=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=2, \\ y_4=1. \end{cases}$

(2) 因方程缺一次项，可考虑"降次".

①＋②×2 得：$(2x+y)^2=225, 2x+y=\pm15$. ③

①－②得：$(x-y)^2=9, x-y=\pm3$. ④

由③、④可组成四个二元一次方程组

$\begin{cases} 2x+y=15, \\ x-y=3, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=15, \\ x-y=-3, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=-15, \\ x-y=3, \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=-15, \\ x-y=-3. \end{cases}$ 分别解之得：$\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=7, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-4, \\ y_3=-7, \end{cases}$

$\begin{cases} x_4=-6, \\ y_4=-3. \end{cases}$

例4 已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，求代数式

$\frac{2a^4-5a^3-5a+1}{a^2+1}$的值.

解:利用带余除法可得

$2a^4-5a^3-5a+1=(a^2-3a+1)(2a^2+a+1)-3a$.

$\because a$ 是方程$x^2-3x+1=0$ 的根, $\therefore a^2-3a+1=0$.

$\therefore \frac{2a^4-5a^3-5a+1}{a^2+1}=\frac{-3a}{a^2+1}=\frac{-(a^2+1)}{a^2+1}=-1$.

例5 如果方程$(1998x)^2-1997\times1999x-1=0$ 较大的根为 M,方程 $x^2+1998x-1999=0$ 较小的根为 m,那么 $M-m$ $=$______.

解:原方程$(1998x)^2-1997\times1999x-1=0$ 可化为 $(1998x)^2-(1998^2-1)x-1=0$, $(1998^2x+1)(x-1)=0$,

$\therefore M=1$. 用因式分解法解 $x^2+1998x-1999=0$,

$\therefore m=-1999$. 这样 $M-m=1-(-1999)=2000$.

例6 若 $x^2+4x+1=0$, 并且$\frac{x^4+3ax^2+1}{2x^3+ax^2+2x}=5$, 试确定 a 的值.

分析:如果先求出 $x^2+4x+1=0$ 的解$-2\pm\sqrt{3}$, 再代入另一已知等式中求 a 的值, 则运算量较大, 观察题目的特点及系数之间的规律, 易求出 $x+\frac{1}{x}$的值, 在此基础之上求 a 的值就简便得多了.

解:$\because x^2+4x+1=0$, 易知 $x\neq0$, $\therefore x+\frac{1}{x}=-4$.

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=16-2=14$.

由$\frac{x^4+3ax^2+1}{2x^3+ax^2+2x}=5$, 左边分子、分母同除以 x^2, 可得:

$$\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+3a}{2(x+\frac{1}{x})+a}=5.\text{即}:\frac{14+3a}{2\times(-4)+a}=5.$$

整理得　$2a=54$.　$\therefore\ a=27$.

例 7　当 k 为何值时，方程 $x^2+kx-1=0$ 和方程 $x^2+x+(k-2)=0$ 有公共根？并求出此公共根.

分析：有公共根的问题，一般都是利用方程根的概念，设出公共根.分别代入两方程进行恒等变形求解.

解：设公共根为 m，则有

$$m^2+km-1=0, \quad ①$$

$$m^2+m+(k-2)=0. \quad ②$$

由①－②得，$km-1-m-k+2=0$.

即 $(k-1)(m-1)=0$.　$\therefore k=1$ 或 $m=1$.

当 $k=1$ 时，两个方程有两个公共根 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

当 $m=1$ 时，代入方程①或②均可得 $k=0$，所以 $k=0$ 时，两个方程有一个公共根 $x=1$.

例 8　首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0, \quad ①$$

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0. \quad ②$$

（其中 a,b 是自然数）有一个公共根，试求 $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

解法 1：设 m 是两方程的公共根，则有

$$(a-1)m^2-(a^2+2)m+(a^2+2a)=0, \quad ③$$

$$(b-1)m^2-(b^2+2)m+(b^2+2b)=0. \quad ④$$

消平方项，③×$(b-1)$－④×$(a-1)$，整理得

$$(a-b)(ab-a-b-2)(m-1)=0.$$

$\because a-1\neq b-1,\quad \therefore a\neq b.\quad \therefore a-b\neq 0.$

则 $m=1$ 或 $ab-a-b-2=0$.

若 $m=1$，代入原方程得 $a=1$ 或 $b=1$，矛盾，$\quad\therefore m\neq 1$.

$\therefore ab-a-b-2=0$，即 $(a-1)(b-1)=3$. 由 a,b 为自然数得 $\begin{cases}a-1=3,\\ b-1=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=1,\\ b-1=3.\end{cases}$

$\therefore a=4, b=2$ 或 $a=2, b=4$.

$$\therefore \frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=\frac{a^b+b^a}{\dfrac{a^b+b^a}{a^b\cdot b^a}}=a^b\cdot b^a=256.$$

解法 2：由已知条件可知 $a>1, b>1$，且 $a\neq b$，解方程① 得两根为 $a, \dfrac{a+2}{a-1}$，解方程②得两根为 $b, \dfrac{b+2}{b-1}$.

$\because a\neq b$，根据有公共根可得

$$a=\frac{b+2}{b-1},\quad 或\quad b=\frac{a+2}{a-1}.$$

经化简均可得 $ab-a-b-2=0$. 以下同解法 1.

注意：分别求出两个方程含字母系数的根，再研究它们之间关系，是解公共根问题的另一种方法，此方法易想到，但它仅限于根的表达式较简单的情形.

例 9　$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，令 $\{x\}=x-[x]$.

(1) 找出一个实数 x，满足 $\{x\}+\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=1$；

(2) 证明满足上述等式的 x 都不是有理数.

解：(1) 设 $x=m+\alpha, \dfrac{1}{x}=n+\beta$（$m,n$ 是整数，$0\leqslant\alpha<1$，$0\leqslant\beta<1$）. 若 $\{x\}+\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=\alpha+\beta=1$，

而$x+\frac{1}{x}=m+\alpha+n+\beta=m+n+1$是整数. 令$x+\frac{1}{x}=k$($k$是整数),则$x^2-kx+1=0$, $\therefore x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$.

当$|k|=2$时,$x=\pm1$,不满足所给条件.

当$|k|\geqslant3$时,$x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$是满足等式的全体实数.

(2) 关键是证k^2-4不是完全平方数.

当$|k|\geqslant3$时,设$k^2-4=h^2(h\neq0)$,这样$k^2-h^2=4$, $\therefore(k+h)(k-h)=4=4\times1$,即不存在整数$k,h$使得$k^2-h^2=4$. $\therefore k^2-4$不是完全平方数.

所以x是无理数,即满足条件的x都不是有理数.

练习一

A组

1.方程$x^2+1999^2x+1998\times2000=0$的两个根中较大根是________.

2.若关于x的二次方程$2x^2+mx-m=0$的一个根是-1,则$m=$______,另一根是______.

3.已知$x^2+px-12$能分解成两个整系数的一次因式的乘积,则符合条件的整数p的个数是(　)

(A)3个.　(B)4个.　(C)6个.　(D)8个.

4.解方程$x^2-|2x-1|-4=0$.

5.解关于x的方程$(x+1)^2=b(x^2-1)$.

6.已知a是方程$3x^2=x+1$的根,试求$\frac{6a^3-5a^2-4a+1}{3a^2-1}$的值.

7. 已知 $6x^2 + xy - y^2 = 0$，且 $xy < 0$，求 $\frac{x^3}{y^3}$ 的值.

8. 解方程组 $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$

B 组

1. 方程 $2xy + 5x = y + 995$ 的正整数解是______.

2. 若关于 x 的方程 $a(x+1)(x+2) + b(x+2)(x+3) + c(x+3)(x+1) = 0$ 有一个根为 0，另一个根为 1，求 $a:b:c$.

3. 解关于 x 的方程 $x^4 - 10x^3 - 2(a-11)x^2 + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0 \quad (a \geqslant -6)$.

4. 设方程(1) $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ 与方程(2) $x^2 + 2cx - b^2 = 0$，有一个相同的根，且 a, b, c 均为正数. 求证：a, b, c 可以是一个直角三角形三边的长.

第二课　判别式与韦达定理

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$, a, b, c 为常数）的二根为 x_1, x_2, 判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

1. 当 $\Delta>0$ 时, 方程有二个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$ 时, 方程有二个相等的实数根; 当 $\Delta<0$ 时, 方程没有实数根. 反之亦成立.

2. $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$. 反之, 若二数 x_1, x_2 满足 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$, 则此二数是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根. 这就是韦达定理, 即根与系数的关系.

例 1　已知方程 $x^2-2x-a=0$ 无实数根, 试判断方程 $x^2+2ax+1+2(a^2-1)(x^2+1)=0$ 的根的情况.

分析: 考察两个方程的判别式即可.

解: $\because$ 方程 $x^2-2x-a=0$ 无实根,

$\therefore\Delta_1=4-4(-a)<0$.　$\therefore a<-1$.

第二个方程整理为:

$(2a^2-1)x^2+2ax+(2a^2-1)=0$, 当 $a<-1$ 时, $2a^2-1\neq0$.

又 $\Delta_2=4a^2-4(2a^2-1)^2=-4[(2a^2-1)^2-a^2]$

$\quad\quad=-4(2a-1)(a+1)(2a+1)(a-1)$.

当 $a<-1$ 时, $2a-1<0$, $a+1<0$, $2a+1<0$, $a-1<0$,

$\therefore\Delta_2<0$.

所以方程 $x^2+2ax+1+2(a^2-1)(x^2+1)=0$ 没有实数