弹 性 力 学 专 题 教 材

弹性力学中的有限元法

卓 家 寿

高 等 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书是与徐芝伦教授撰写的《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材之一。本书不仅详细地讲述了有限元的基本理论、基本概念和实施的方法，而且介绍了有限元程序设计中最基本的常用处理方法和技巧。

本书可作为高等学校水利、土建类专业弹性力学有限元法课程的教材，也可供有关教师和工程技术人员参考。

弹性力学专题教材

弹性力学中的有限元法

卓 家 寿

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.875 插页 1 字数 190 000

1987 年 9 月第 1 版 1987 年 9 月第 1 次印刷

印数 00 001—5,135

书号 15010·0831 定价 1.65 元

前　言

本书是与徐芝纶教授撰写的《弹性力学简明教程》(第二版)配套使用的专题教材之一,它在基本理论、体例与符号等方面均与该教程相衔接,在内容方面作了一些加深和拓宽。本书有一定的相对独立性,可以作为高等学校水利、土建类专业本科生单独开设弹性力学有限元法课程的教材,也可供有关教师和工程技术人员参考。

本书内容以平面问题为主,其它问题只介绍一些要点,不作详细论述。全书共分五章,根据由浅入深、由易到难、循序渐进的原则编写。书中反复强调有限元的基本理论、基本概念和实施的方法。它先以常应变单元为例从物理角度全面地阐述了有限元的内容,再在精密的平面单元、空间单元和板壳单元的分析中作了一些补充,最后,引用能量变分原理从数学角度作了概括,使读者能逐步加深对有限元法基本原理的理解。

为了加强本书的实用性,特在第三章中介绍了有限元程序设计中最基本的常用处理方法和技巧,详细注释了主要程序段的功能和实施的方法,并在该章的后面附有源程序和算例,以供学生课外上机应用。此外,为了训练学生理论推导和实际运算的能力,本书的后面还附有习题。

根据我们的教学实践,讲授本书约需 36 学时。对于某些专业,本书最后两章的内容可以少讲,甚至不讲。

本书承主审人天津大学严宗达教授、北京工业大学赵超燮教授以及高等学校工科力学教材编审委员会结构力学编审小组参加审稿的同志提出十分宝贵的意见,特此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中,得到我校徐芝纶教授、姜弘道副教授和工程力学系弹性力学教研室全体同志的热情帮助,陈和群同志还为

本书提供了程序，也在此谨向他们致以深切的谢意。

由于编者水平有限，编写时间较紧，书中错误、缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九八六年二月于河海大学

目　　录

第一章　绪　　论

§1-1　弹性力学基本量及基本方程的矩阵表示

(1) 基本量的矩阵表示

物体被考察点的位置坐标 x, y, z 可用一个列阵 $\{x\}$ 来表示

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=[xyz]^T \tag{1-1}$$

这里用波纹括号{　}表示列阵，而方括号[　]表示普通的矩阵或行阵，上标 T 表示矩阵的转置。

在平面问题内，式(1-1)可简化为

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}=[x\ \ y]^T \tag{1-2}$$

物体内任一点的位移分量 u, v, w 可以用列阵表示为

$$\{f\}=[u\ \ v\ \ w]^T \tag{1-3}$$

在平面问题里，式(1-3)可简化为

$$\{f\}=[u\ \ v]^T \tag{1-4}$$

物体内任一点的应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 可以用列阵表示为

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\ \ \varepsilon_y\ \ \varepsilon_z\ \ \gamma_{xy}\ \ \gamma_{yz}\ \ \gamma_{zx}]^T \tag{1-5}$$

在平面问题里，只有 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 三个独立的应变分量，于是式(1-5)可简化为

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\ \ \varepsilon_y\ \ \gamma_{xy}]^T \tag{1-6}$$

物体内任一点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$, τ_{zx} 可以用列阵表示为

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \ \ \sigma_y \ \ \sigma_z \ \ \tau_{xy} \ \ \tau_{yz} \ \ \tau_{zx}]^T \tag{1-7}$$

在平面问题里，只有 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 三个独立的应力分量，于是式(1-7)可以简化为

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \ \ \sigma_y \ \ \tau_{xy}]^T \tag{1-8}$$

物体所受的体力分量 X、Y、Z 可以用一个列阵$\{p\}$来表示:

$$\{p\}=[X \ \ Y \ \ Z]^T \tag{1-9}$$

在平面问题里，$Z=0$，因此式(1-9)可以简化为:

$$\{p\}=[X \ \ Y]^T \tag{1-10}$$

同样，物体所受的面力分量 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$ 可以用列阵表示为

$$\{\bar{p}\}=[\bar{X}、\bar{Y}、\bar{Z}]^T \tag{1-11}$$

在平面问题里 $\bar{Z}=0$，因此式(1-11)可以简化为

$$\{\bar{p}\}=[\bar{X} \ \ \bar{Y}]^T \tag{1-12}$$

一般地讲，以上(1-3)、(1-5)、(1-7)、(1-9)与(1-11)各式中的分量都是 x、y、z 三个坐标的函数，而(1-4)、(1-6)、(1-8)、(1-10)与(1-12)各式中的分量都只是 x、y 两个坐标的函数。

(2) 基本方程的矩阵表示

弹性体的基本方程有平衡方程、几何方程与物理方程，此外还有边界条件。这里将只介绍平面问题基本方程和边界条件的矩阵表示。

平衡方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{cases}$$

可以用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0$$

或

$$[L]^T\{\sigma\} + \{p\} = 0 \tag{1-13}$$

其中

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

可以用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

或

$$\{\varepsilon\} = [L]\{f\} \tag{1-14}$$

平面应力问题的物理方程

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases}$$

可以用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

或

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{1-15}$$

其中

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{1-16}$$

这里$[D]$称为平面应力问题的弹性矩阵，它只包含弹性常数E与μ。对于平面应变问题的物理方程也可以用矩阵表示为式(1-15)，但须将式(1-16)中的E换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，μ换为$\frac{\mu}{1-\mu}$。

应力边界条件

$$\begin{cases}l(\sigma_x)_s+m(\tau_{xy})_s=\bar{X}\\ m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s=\bar{Y}\end{cases}$$

可以用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}l & 0 & m\\ 0 & m & l\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_s=\begin{Bmatrix}\bar{X}\\ \bar{Y}\end{Bmatrix}$$

或

$$[n]\{\sigma\}_s=\{\bar{p}\} \tag{1-17}$$

其中

$$[n]=\begin{bmatrix}l & 0 & m\\ 0 & m & l\end{bmatrix}$$

位移边界条件

$$u_s=\bar{u},\quad v_s=\bar{v}$$

可以用矩阵表示为

$$\{f\}_s=\{\bar{f}\} \tag{1-18}$$

其中

$$\{\bar{f}\}=[\bar{u}\ \ \bar{v}]^T,\quad \{f\}_s=[u_s\ \ v_s]^T.$$

（3）能量方程的矩阵表示

位移(应力)变分方程，能量原理的表达式和虚功原理表达式都是能量方程，即用能量形式表示的弹性力学基本方程。位移变分方程，或最小势能原理，或虚功方程等价于平衡微分方程和应力边界条件，反映了物体处处满足静力平衡的要求。而应力变分方程，或最小余能原理，或虚余功方程则等价于几何微分方程和位移边界条件，它反映了物体处处满足位移连续的要求。限于篇幅，这里只介绍有限元的劲度法中要用到的虚功方程的矩阵表示。平面问题的虚功方程的一般表示式为

$$\iint_\Omega (X\delta u+Y\delta v)\,dx\,dy+\int_{s\sigma}(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v)\,ds$$

$$=\iint_\Omega(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\,dx\,dy$$

其中，Ω 为弹性体的内部区域，s_σ 为面力已知的 Ω 边界。

如用 u^*,v^* 表示虚位移，亦即位移的变分 $\delta u,\delta v$，那么有

$$\{f^*\}=\begin{Bmatrix}u^*\\v^*\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta u\\\delta v\end{Bmatrix}$$

同样地，若用 $\varepsilon_x^*,\varepsilon_y^*,\gamma_{xy}^*$ 表示与该虚位移相应的虚应变 亦即应变的变分 $\delta\varepsilon_x,\delta\varepsilon_y,\delta\gamma_{xy}$，则有

$$\{\varepsilon^*\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^*\\\varepsilon_y^*\\\gamma_{xy}^*\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\\delta\varepsilon_y\\\delta\gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

于是上述虚功方程可以用矩阵表示为

$$\iint_{\Omega}\{f^*\}^T\{p\}\,dx\,dy+\int_{s\sigma}\{f^*\}^T\{\bar{p}\}ds$$
$$=\iint_{\Omega}\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}\,dx\,dy \tag{1-19}$$

在有限元中，常以虚功相等为条件找出一组作用在若干个结点上的等效集中荷载$\{F\}$去代替体力$\{p\}$和面力$\{\bar{p}\}$的作用，即

$$\{\delta^*\}^T\{F\}=\iint_{\Omega}\{f^*\}^T\{p\}\,dx\,dy+\int_{s\sigma}\{f^*\}^T\{\bar{p}\}ds$$

其中

$$\{F\}=[U_1\ V_1\ U_2\ V_2\ \cdots\ U_i\ V_i\ \cdots]^T$$
$$\{\delta^*\}=[u_1^*\ v_1^*\ u_2^*\ v_2^*\ \cdots\ u_i^*\ v_i^*\ \cdots]^T$$

则公式(1-19)可改写为

$$\{\delta^*\}^T\{F\}=\iint_{\Omega}\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}\,dx\,dy \tag{1-20}$$

§1-2 弹性力学问题解法概述

弹性力学问题的基本解法有三种，即按位移求解、按应力求解和混合求解，简称为位移法、力法和混合法。统观这些解法分析问题的全过程，可以概括地列出一般求解弹性力学问题的几个要点。

(1) 解题的一般顺序总是先从求解基本未知量入手，然后利用它再去求得其余的未知量；

(2) 求解基本未知量的基本方程，都是综合运用力学、几何学和物理学以及边界条件得到的；

(3) 基本方程的解法均可分为解析法和数值法两类算法。

显然，深入地全面讨论并灵活应用上述这些要点，对于理解和探讨弹性力学问题解法是很有益处的，但为节省篇幅起见，这里仅对有关基本未知量和算法的选择两个方面进行分析。

一般地说，基本未知量在解析法中指的是基本未知量函数，如位移函数或应力函数等，而在数值法中往往指的是若干结点上的未知函数值，如结点位移或结点力等。这些未知函数值必须满足：

(a) 求出这些未知函数值后，能够通过这些未知函数值求得其它的未知量。

这就是说，能够建立一套用基本未知量表示其它未知量的关系式。

(b) 这些未知函数值是能够被求出的。这就要求建立一组专门求解基本未知量的基本方程，且这个基本方程必须有唯一解。

基本方程算法的选择指的是对解析法和数值法之间的选择。在弹性力学问题中有解析解的是不多的，而且仅限于一些简单的典型结构。而实际工程中遇到的结构大多是没有解析解的，因此数值法在应用弹性力学中占有重要的地位。

弹性力学中的数值法主要有差分法、变分法以及电子计算机问世以后出现的有限单元法等。

数值法求解弹性力学问题得到的是近似解或逼近解。它的直接计算对象(即基本未知量)是结构中有限个结点上的待求未知函数值(如差分法、有限单元法等)或者是人为构造的某一逼近函数中的有限个待定系数(如变分法等)，其求解基本未知量的基本方程是普通的代数方程组。

鉴于数值法的基本方程是代数方程组，远比求解偏微分方程组容易，所以它比解析法具有更广泛的应用范围，就这一点而言，数值法优于解析法。当然，解析法也有它的优点，它得到的是未知函数解，可以直接运用解答去求得该函数在结构中任意一点的精确值；而数值法则只能由求得的上述有限个结点上的近似函数值或有限个待定系数值再去确定该函数在结构中任意一点的近似

值，为了获得较高的精度，常需耗费较大的计算工作量。但在具有现代电子计算机的这一强大工具的今天，数值法存在的这个缺陷是可以得到一定程度弥补的。

在数值法中，差分法算是最古老的方法，它是把解析法列出的基本微分方程改造为有限差分方程（代数方程）后而进行数值运算。差分法对于具有规则的几何形状和均匀的材料特性的结构应力分析特别有效，其程序设计简单，收敛性好，但对于不规则几何形状和不均匀的材料特性的结构应力分析，用差分法求解就不甚简便了。

弹性力学中的变分法是把等价于基本微分方程的变分方程（即能量泛函极小条件）改造为求解人为构造的逼近函数中有限个待定系数的代数方程后而进行数值运算的。变分法避开了求解微分方程的困难，找到一些复杂结构的近似解，但是由于整体构造逼近函数难以满足复杂的边界条件，使它的应用受到了一定的限制。

有限单元法是近年来出现的并得到迅猛发展的现代数值法，若从力学角度去认识，它可以看作是在力学模型上进行近似数值分析的方法。具体地讲，它是用若干个尺寸有限的在结点处相连接的单元组合而成的离散化模型去逼近处处连续的实际结构（在有限元中称之为建立结构的离散化模型）；它所采用的基本未知量是离散化模型中结点上的某种未知函数值（量），它象解析法分析微小单元内各种量之间的关系那样，分析单元内各种量和结点未知量之间的关系（称之为单元分析）；然后根据所有单元间的集合关系去建立求解结点基本未知量的基本方程（称之为整体分析）；最后由求出的结点基本未知量去求得任一单元任一点的各种未知量（称之为成果计算）。

由于有限单元法选用的单元形状可以是多种多样的，就使得它具有很大的灵活性和通用性，遇到各种复杂的因素，如复杂的几

何形状，任意的边界条件，不均匀的材料特性，各种类型构件（杆、板、壳、块体等）及其组合而成的复杂结构等均能加以考虑，而不会发生处理上的困难。因此，有限单元法虽然历史很短，但却具有旺盛的生命力。今天，它已成为结构分析中最强有力、最普遍应用的方法了。

实际上，有限单元法可以归属于变分法的范畴，这是因为弹性力学中有限元法的基本算式是可以由变分法推导出来的。从变分观点看，弹性力学中的有限元法和古典变分法一样都是根据（能量）泛函极小条件导出基本方程的。所不同的是：古典变分法是用整体构造的逼近函数（含有若干个待定系数）去计算能量泛函的，由能量泛函极小条件导出的是求解待定系数的变分方程；而有限单元法是用分片（单元）构造单元的逼近函数（含有若干个结点基本未知量）去计算每个单元的能量泛函而后通过集合得到整体结构能量泛函的，由能量泛函极小条件导出的是求解结点基本未知量的代数方程。鉴于分片（单元）构造逼近函数远比整体构造逼近函数方便，有限元法的实用性便大大超过了古典的变分法。

有限单元法所取的结点基本未知量可以是结点的位移，也可以是结点力或结点应力函数值，也可以是混合的，因此，它也有位移法（又称劲度法），力法（又称柔度法），混合法三种基本解法，其中劲度法的应用范围最广。

§1-3　有限单元法的概念

本节将以平面问题为例，阐述有限元劲度法的计算模型、基本未知量、基本方程和分析步骤。

在§1-2中已提到，有限单元法可以通俗地看作是在力学模型上进行近似的一种计算方法。而这个近似的计算模型就是原结构的离散化模型，它是由若干个尺寸有限的单元在有限个结点上相

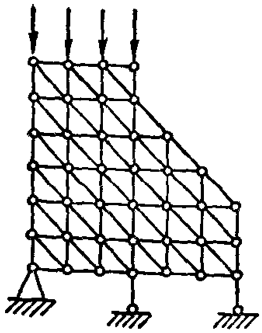

图 1-1

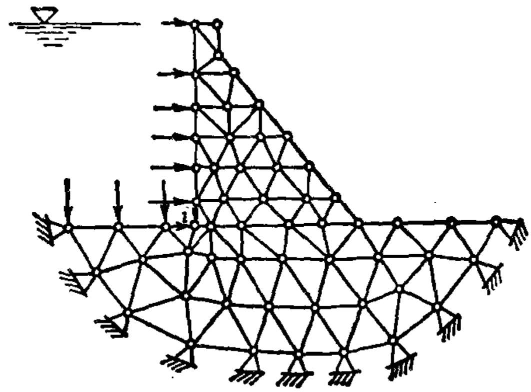

图 1-2

互连接而成的。这个离化结构的型式与单元的数目、形状、大小、布局及结点的连接条件等因素有关，其中最简单的离散化模型是由许多三结点三角形单元在结点处铰接相连组成的，其实例可见图 1-1 所示深梁的离散化模型和图 1-2 所示水坝的离散化模型。显然，这些离散化模型与原结构之间是存在差异的，按位移求解时，两者的自由度就不同。对原结构来说，这是个无限自由度体系，而对其离散化模型而言，则只是个有限自由度体系。当然，这种差异不是不可以缩小的，最简单的方法便是增加离散化模型的总自由度个数。因此，加密离散网格，增加结点个数或者增加单个结点的自由度都可以达到促使离散化模型进一步逼近原结构的目的。

有限元劲度法是按位移求解的一种数值法，它的解题思路和一般方法一样，也是先从求解基本未知量入手。作为位移法，这个基本未知量必然是位移，作为按位移求解的数值法，则它可以是某些结点上的位移。简言之，这个基本未知量就是离散化模型上结点的位移(更一般地讲，叫做结点的广义位移)，若用矩阵表示，可写为

$$\{\delta\}=[u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ \cdots]^T.$$

至于这些结点的位移能否作为基本未知量，这就要看知道了

结点位移，能否求出其它未知量(包括任一点的位移、应变和应力等)。由弹性力学知识可知，位移函数是可以作为基本未知函数的，因为通过几何微分方程，由它直接可求出应变函数，再用物理方程便可求出应力函数。那么，如果我们能够由有限个结点位移去确定结构的位移场，建立求解任一点位移的函数，便可肯定结点的位移也是可以作为基本未知量的。而从数学知识可知，以有限个结点位移为参数，引入适当的插值函数(最简单的是多项式)是可以构造出求解任意点位移的函数。因此，有限元劲度法取结点位移为基本未知量是可行的。

众所周知，插值的方法有两种：一种是整体插值法，整体构造结构的位移函数，另一种是分片(段)插值法，分片构造结构的位移函数。图1-3表示对一维函数的两组插值曲线，它们都是根据已知的那些点(0,1,2,…,5)上的函数值($u(x_0)$，$u(x_1)$，$u(x_2)$，…，$u(x_5)$)构造而成的。不同的是，$\tilde{u}(x)$是整体插值形成的；而$u_0(\xi)$则是分段插值形成的，如2—3段内的$u_0(\xi)$是以$u(x_2)$和$u(x_3)$作为

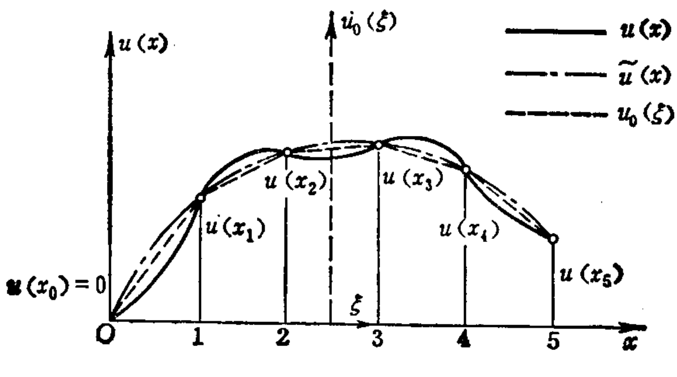

图 1-3

参数进行分段插值形成的(这里的ξ是每段的局部坐标变量，采用它是为了使这个逼近函数$u_0(\xi)$的形式适用于各段)。为了比较，图上用一条复杂曲线表示实际的函数$u(x)$。