电力系统优化规划

优化规划

内 容 提 要

本书是阐述利用电子计算机进行电力系统发展优化规划及运行优化规划的专著。

作为基础部分，书中简要介绍了数学规划内容，系统地论述了电力系统可靠性计算和随机生产模拟方法。作为应用部分，着重讨论了发电设备检修计划，电源优化和电网规划的原理、模型以及算法。本书反映了目前国内外在这些领域的成就。为了便于读者理解和深入掌握所述原理和算法，书中附有大量的数字例题。

本书可作为电力系统规划、调度和科研人员或工程经济管理人员的参考书，亦可作为高等学校电力系统及其自动化专业高年级学生和研究生的教材。

电力系统优化规划

王锡凡　主编

*

水利电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号）

各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米　16开本　21印张　477千字

1990年3月第一版　1990年3月北京第一次印刷

印数0001—2370册

ISBN 7-120-00980-X/TM·287

定价：17.65元

序　　言

为了充分利用现代科学成就及电子计算机技术提高电力系统运行规划及发展规划的决策水平，国内外蓬勃开展了对电力系统优化规划的理论探讨和模型、算法的研究。目前，这一领域的研究取得了令人瞩目的成果，并在技术上与经济上获得了显著的效益。但是，迄今在这一方面的专著还很少。本书的目的在于系统地阐述这门新兴学科的基本理论及其应用，介绍国内外在电力系统优化规划方面的进展。

本书着重基础与实用，并兼顾了提高方面的内容。对于典型而有效的模型及算法进行了详尽的讨论与剖析，并附有大量数字例题，以便读者深入理解和掌握。书中同时还介绍和分析了当前的发展趋势和动向，并在每章都列出了有代表性的文献，以利读者进一步研究与开发。

本书作者近年来一直从事电力系统优化规划的研究与应用，书中也反映了他们的研究成果。由于这是一个新兴的和不断发展的研究领域，因此本书的内容也有待在研究与实践中进一步充实和完善。限于作者的水平，难免有不妥与错误之处，望读者不吝批评指正。

本书各章分别由以下作者执笔：

绪论		王锡凡
第一章	数学规划	肖　锡
第二章	电力系统可靠性计算	孙启宏
第三章	电力系统随机生产模拟	王锡凡
第四章	电力系统发电机组检修计划	杨莳百
第五章	电源优化	王锡凡
第六章	电网规划	王秀丽

全书由王锡凡组织并负责主编工作。

本书经高级工程师周孝信、王德生、金文龙审阅，提出了许多很好的意见。根据这些意见，作者认真对全书进行了修改。在此仅对以上各位表示衷心感谢。

作　者

1988年12月

于西安交通大学

目　　录

绪　论

电力工业是国民经济中一个非常重要的部门，它的发展水平不仅对其它行业部门会产生巨大的影响，还涉及大量一次能源消耗和巨额的投资。合理地进行电力系统规划可以获得很大的经济效益和社会效益。相反，电力系统规划的失误会给国家建设带来不可弥补的损失。因此，近年来电力系统规划工作在国内外都受到日益广泛的重视。

电力系统规划包括发展规划和运行规划两部分。

发展规划根据电力系统负荷增长情况，确定发电机组的扩建、退役和更新计划，确定电源的合理结构及未来输配电网络的电压等级、网络结构等。

电力系统运行规划依照其用途又可分为制定**现有系统**某一时期的运行计划和模拟**扩建系统**的运行情况两种。主要内容包括发电分配、检修计划、水库调度、燃料需求、售购电合同以及发电成本分析等。它是提高现有电力系统运行水平和分析电力系统扩建方案技术经济指标的有力武器。

传统的电力系统规划方法以方案比较为基础。这种方法从几个给定的可行方案中通过技术经济比较选择出推荐的方案。然而，参加比较的方案往往是规划人员凭经验提出的，并不一定包括客观上的最优方案，因此最终推荐方案就包含相当的主观因素和局限性。

随着科学技术的发展和迅速增长的电力需求，发电厂所采用的能源形式和类型愈来愈多样化，电力系统的电源结构日趋复杂。另一方面，大型电力工程项目不断涌现，促进了跨大区的纵横交织的大规模互联系统的形成。这些因素都给电力系统规划方案的技术经济定量评估带来一定困难。传统的规划手段也愈来愈难以适应这些严重的挑战。

在这种情况下，如何提高电力系统规划的水平就成为一个紧迫的任务。所幸的是，近年来电子计算机技术的飞速发展和在各部门的广泛应用，以及系统工程、运筹学等科学领域的璀璨成果，恰恰为改善电力系统规划技术提供了坚实的基础。**电力系统优化规划**也正是在这种背景下诞生和成长壮大的。70年代以来，发达国家在电力系统优化规划的理论与实践方面都取得了长足进展，并出现了一批商业化的规划软件包，其明显的效益得到了世界各国电力工业界的肯定。

电力系统优化规划的目标是从整体和长远观点上来确定什么方案对电力系统最有利。这就要求我们从所有可能的方案中选择最优方案。在这种情况下，参加优选的方案不应人为给出，而要在规划过程中按照一定条件自动形成。

电力系统优化规划理论及电子计算机的应用不仅使规划方案的技术经济评价更加准确全面，使其推荐方案的优越性更加可信，同时还能对各种不确定因素的影响进行快速的灵敏度分析，使规划成果具有更高的参考价值。此外，计算机及其辅助设备的应用也大大减轻了规划人员的繁琐工作，加快了规划工作的进程。因此，规划和决策人员就有可能对各种潜在的问题进行较深入的分析研究，为制定各种应变规划、滚动规划创造了条件。

电力系统优化规划是一个比较新的课题，目前仍是一个很活跃的学术领域，有不少问题值得探讨，主要有以下几个方面。

（1）数学模型方面。迄今国内外已发表了不少电力系统优化规划的数学模型。它们虽各有所长，但还没有一个公认的完美模型。事实上，电力系统规划涉及问题很广，要建立一个统一的无所不包的数学模型是不现实的。另外，一些社会、政治因素很难用数学表达式归纳到数学模型里去。因此，如何针对要解决的问题建立恰当的数学模型或选择适合的数学模型是推广和应用电力系统优化规划首先要解决的问题。

（2）算法方面。电力系统优化规划属于运筹学问题。但是，由于电力系统规划涉及的决策变量非常多，且大多数属于离散型的变量，因此用典型的运筹学算法无论在内存上还是在计算量上都会遇到困难。此外，电力系统优化模型的目标函数和约束条件往往是非线性的，甚至带有随机的因素，更增加了算法上的难度。为了解决这些问题，除了对算法进行研究外，有时还要求对数学模型进行适当的简化。

（3）原始数据方面。没有足够可靠的原始资料用任何优秀的数学模型也不可能得到满意的规划结果。因此，一个好的电力系统规划必然要以坚实的前期工作为基础，包括搜集整理系统负荷数据、电源点的原始资料以及输电线路方面的原始资料等等。

此外，还应研究确定有关规划中一些判据性的数据，例如可靠性指标、停电损失费以及贴现率等等。要确定这些数据不仅要搜集大量资料，还要进行细致的科学分析。这些数据在有些发达国家已经给出，我国目前尚未确定这方面的数据。由于这些判据对整个电力系统规划结果有重大影响，因此今后必须加强这方面的研究工作。

（4）应用方面。为了充分发挥电力系统优化规划的效益和便于推广应用，应注意以下两方面的工作。

首先，在研究开发规划软件时，除了应满足功能和算法方面的要求外，还要尽可能注意软件应用的灵活性、方便性和直观性方面的问题。

其次，必须在规划人员中普及电力系统优化规划的基本理论，使他们掌握模型的原理和特点。只有这样，才能更好地利用这个工具，为规划决策提供更全面、更准确的定量依据。

应该指出，开发电力系统规划软件不仅是研究人员的任务，也是使用这些软件的规划人员的任务。规划软件的形成也不是在开发阶段一蹴而就的事，只有研究人员和规划人员共同配合，在软件使用过程中不断改进、维护，才能逐步形成优秀的电力系统优化规划软件。

国外在电力系统优化规划方面的研究起步较早，迄今已有将近20年的历史，在这期间发表了大量论文，开发了一批商业化的程序。这些都为我们发展自己的电力系统优化规划理论和软件提供了很好的条件。但是，我国电力工业有自己的特点。例如，我国是发展中国家，建设资金紧缺，输电系统比较薄弱且分地地域辽阔，有些电力系统水电比重较大等。因此，在学习借鉴国外经验的同时还必须根据我国的特点，结合我国电力系统规划人员多年的成功经验，发展适合我们国情的电力系统优化规划理论，开发具有我国特色的规划软件。

本书是一本电力系统优化规划的专著，主要阐述有关的基本理论、数学模型及计算方法方面的问题。作者力图总结国内外在这一领域的最新成就，并重点结合作者的研究成果，给读者展现电力系统优化规划理论及应用方面的情况。为了使读者能深入牢固地掌握重要概念和原理，每章都给出了计算流程图和相应的数字例。此外，每章末都列举了相应领域的主要参考文献，以便读者进一步研究。

第一章介绍运筹学方面的基本知识。运筹学是电力系统优化规划的一个重要基础，它的各个分支在电力系统中都有广泛的应用。了解运筹学有关分支的特点及算法能启发我们处理问题的思路，并为后续章节打好基础。对于熟悉这方面内容的读者和想更快接触实际问题的读者可以先略过这一章内容，在阅读后面内容发现问题时再返回本章，选读有关内容。

第二章讨论电力系统可靠性分析和计算方法。电力系统可靠性是评价规划的一个重要技术指标。目前，论述电力系统可靠性的专著和论文很多，但其中的概念和方法极不统一，大多失之于繁琐。本章企图以最简捷的方式为读者提供一个分析计算电力系统可靠性的途径。本章内容包括发电系统可靠性计算及互联系统可靠性计算，其理论与算法均为作者近年来的研究成果。

第三章介绍电力系统随机生产模拟的理论及算法。随机生产模拟是评价电力系统运行技术经济指标和分析发电成本，制定燃料计划的主要工具，它是电力系统优化规划的重要组成部分。本章首先以等效持续负荷曲线的卷积及反卷积计算引出了随机生产模拟的基本原理和概念。然后重点介绍了目前国际上广泛应用的半不变量法（又称累积量法），分析了它的计算特点、误差及其改善的途径。最后阐述了作者开发的等效电量函数法及对水电机组的模拟方法，并以数字例对这些算法的特点进行了分析比较。

第四章讨论发电系统检修计划的制定原理和方法，详细介绍了等备用法和等风险度法，并介绍了作者用动态规划原理为基础提出的优化检修计划模型。本章还结合实际电力系统的数字例说明了各种方法在制定检修计划时的应用情况。

第五章论述电源规划的基本原理、数学模型和计算方法。首先介绍了工业投资项目的经济分析方法，然后讨论了两个电源优化软件的数学模型及算法。第一个模型是国际上应用较广的WASP-III，第二个是作者开发的JASP1。由前者的介绍，读者可以了解目前国外电源优化技术的基本思路和成就。通过后者的介绍，希图使读者了解适合我国情况的电源优化的特点以及解决问题的一些方法，从而为共同完善我国电源优化模型作出贡献。

第六章介绍电力系统的电网规划。这是一个难度很大的问题，到目前国内外尚无一个电网优化模型能完全代替常规的方案比较方法。电网优化模型一般包括两部分：网络结构方案的形成和电网方案的校验。在网络结构方案的形成方面介绍了水平年规划的静态优化模型和考虑网络接线方案逐步过渡的动态优化模型。在电网方案校验方面阐述了快速断线分析和随机潮流分析的原理及算法。这两种算法均为作者最近研究的成果。

电力系统规划是一个涉及范围很广且正在发展的领域，本书论述的内容还是不够完整的，例如负荷预测，环境保护等问题尚未包括进来，有待于今后进一步在实践中充实完善。

第一章

数学规划

1.1 概 述

数学规划是运筹学的一个分支．数学规划可以定义为一种数学方法，用它可以对各种生产活动进行规划，在可供利用的资源（资源泛指矿藏、水能、人力、设备、原料、运输条件、生态环境、资金、时间、空间等等）的限制条件下，使生产活动得到最大的效益，或用最少的资源完成指定的生产活动。当数学规划问题只局限于线性函数时，我们得到了线性规划模型；当数学规划问题包含非线性函数时，就构成了非线性规划模型。

在建立数学模型时，第一步是确定问题的决策变量。决策变量是决策者可以控制的因素，如发电机的出力，新建电站的装机台数等等。第二步是确定评价问题解答优劣的准则，这就是目标函数。目标函数是决策变量的函数，它可以是效益函数或费用函数。用效益函数作为目标函数时，最优化问题要求得到目标函数的极大值；用费用函数作为目标函数时，最优化问题需要求得目标函数的极小值。在有些情况下常常将效益与费用函数统一起来，以单位费用的效益，或单位效益的费用作为目标函数。以上指的效益与费用都是广义的，费用是所需要的资源，效益可以是利润、产量、产值、性能指标等等。第三步是确定约束条件。约束条件是指在求目标函数的极值（极大值或极小值）时的某些限制，如资源的限额，产量应满足一定的数量，质量必须达到一定的要求，以及决策变量之间的关系应满足物理系统的方程式等。

对于电力系统规划而言，我们主要根据需要解决的问题与具备的条件，致力于数学模型的建立并寻求这个模型的较好解法。本章将介绍一些在电力系统规划中应用较广泛的算法，其中包括线性规划、整数规划、网络流方法、非线性规划以及动态规划。

通常，电力系统规划的决策变量很多，而且在某些情况下，要求决策变量为整数（如电源规划的发电机台数、电网规划的出线数等）。当要求决策变量为整数时，问题就成为组合型问题。对于高维最优组合问题，目前还没有有效的算法[12]，而且预期的将来也不一定会出现。所谓有效算法是指在求解n维问题时，运算时间正比于n^p（$p\leqslant 4$）的多项式，故又称多项式时间算法。当运算时间正比于e^n时，称为指数时间算法，这类算法属非有效算法。目前严格的整数规划的典型算法都属于指数时间算法，不能用来求解高维问题（$n\geqslant 100$）。对于不存在有效算法的问题，往往需要用所谓的启发式方法进行求解[12]。启发式方法是一种不能证明其收敛性的迭代算法。在每次迭代时，对于待选择的解不做全部考察，而是根据‘工程设计的’或‘经验的’甚至是‘直觉的’判断，有选择地考察其中的一部分，舍弃其它待选者，直到得到一个满意的遵守约束条件的解。在第四章到第六章中，我们会看到不少构成和应用启发式方法的例子，充分说明了这种方法在电力系统规划中有广泛的应用。尽管如此，严格的数学规划方法是设计和建立启发式方法的基础。在有些情况下，启

发式方法和严格的数学方法相互配合能构成准确、有效的算法。

数学规划是近代应用数学非常活跃的一个分支，发展很快。本章将介绍一些常用的算法，为读者在进行电力系统规划研究时应用这些算法打下基础，并为阅读这方面的最新文献创造条件。

1.2 线 性 规 划

从理论、应用和计算观点来说，线性规则（简称LP）是最优化技术中发展得最成熟的一个领域。实际上，LP的成就直接推动了其它数学规划如整数规划、非线性规划等算法的研究。

1.2.1 单纯形法

单纯形法是从一个线性规划模型求得最优解的方法。为了便于理解，先从一个算例开始。

【例 1-1】 某厂在计划期内，安排生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品，生产这三种产品均需要A、B、C三类不同的资源，每种产品的资源消耗量，它们的利润，以及在计划期内该厂的资源限额，如表1-1所示。问在计划期内如何安排这三种产品的产量，以得到最大利润？

表 1-1　　某厂生产情况的原始数据

产品		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	资源限额(单位)
利润系数(单位/单位产量)		5	4	3	
资源消耗系数(单位/单位产量)	资源 A	2	3	1	5
	资源 B	4	1	2	11
	资源 C	3	4	2	8

【解】 设x_1、x_2、x_3分别为计划期内产品Ⅰ、、Ⅱ、Ⅲ的产量，也就是本问题的决策变量。该厂的目标是在计划期内获得最大利润，因之，本问题的目标函数是

$$\max \quad Z=5x_1+4x_2+3x_3 \tag{1-1}$$

由于资源的限额，生产受到下列条件的约束

$$2x_1+3x_2+x_3\leqslant 5 \tag{1-2}$$

$$4x_1+x_2+2x_3\leqslant 11 \tag{1-3}$$

$$3x_1+4x_2+2x_3\leqslant 8 \tag{1-4}$$

还有一组重要的约束条件，产品的产量不能是负数，即

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \tag{1-5}$$

式（1-1）～（1-5）构成一个线性规划的数学模型。从中可以看出，线性规划模型有

如下特征：

（1）问题用一组决策变量（x_1，x_2，…，x_n）来表示某个（生产）活动方案，这组变量的一组特定值代表了一个具体方案。

（2）存在一系列约束条件，这些约束条件用一组线性等式或不等式表示。这些方程式称为约束方程式。

（3）问题有一个需要达到的目标，这个目标为决策变量的线性函数，即目标函数。根据问题的性质，要求目标函数实现极大化或极小化。

为了便于计算，在约束方程式的左端加入非负的松弛变量x_4、x_5、x_6，使约束方程式（1-2）～（1-4）变换为等式

$$\left.\begin{aligned} &2x_1+3x_2+x_3+x_4=5\\ &4x_1+x_2+2x_3+\quad x_5=11\\ &3x_1+4x_2+2x_3+\quad x_6=8\\ &x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geqslant 0 \end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}6)$$

由式（1-1）、式（1-6）表示的问题与原来由式（1-1）～（1-5）表示的问题完全等价。在式（1-6）的3个方程式中，如令6个变量中的3个变量为零，就可以对其余3个变量求解，这3个解出的变量称为基变量，3个取值为零的变量称为非基变量，这个解称为基本可行解。先将式（1-6）改写成

$$\left.\begin{aligned} &x_4=5-2x_1-3x_2-x_3\\ &x_5=11-4x_1-x_2-2x_3\\ &x_6=8-3x_1-4x_2-2x_3\\ &x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geqslant 0 \end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}7)$$

如取x_1、x_2、x_3为非基变量，即令$x_1=x_2=x_3=0$，则由式（1-7）得到$x_4=5$，$x_5=11$，$x_6=8$，这三个变量为基变量。将这些变量值代入式（1-1）得到目标函数$Z=0$，这是一个可行解，但显然不是最优解。

如保持$x_2=x_3=0$不变，增大x_1，使它从零增大为正值，则由式（1-1）可得，$Z=5x_1$，因此目标函数得到改善。为了使目标函数得到最大限度的改善。显然x_1取值愈大愈好。但是x_1的值要受式（1-7）的限制，即

非负条件$x_4\geqslant 0$，要求$x_1\leqslant\frac{5}{2}$；

非负条件$x_5\geqslant 0$，要求$x_1\leqslant\frac{11}{4}$；

非负条件$x_6\geqslant 0$，要求$x_1\leqslant\frac{8}{3}$。

在以上三个限制中，以$x_1\leqslant\frac{5}{2}$最为严格。在这种情况下，我们取$x_1=\frac{5}{2}$，这时$x_4=0$，目标函数增大为$\frac{25}{2}$。在以上计算过程中，x_1由取值为零的非基变量转换为取正值的基变

量，我们称x_1为入基变量；而x_4则由取值为正数的基变量转换为取值为零的非基变量，我们称x_4为出基变量。

在本例中，可以任选x_1、x_2、x_3作为入基变量，但是取序号小的变量作为入基变量可以减少查找时间，故取x_1作为入基变量。出基变量的确定是按最小比值规则进行的，即首先算出入基变量中大于零的系数与相应的右端常数项的比值，本例中为$\left\{\frac{5}{2},\ \frac{11}{4},\ \frac{8}{3}\right\}$，然后取与最小比值相对应的变量为出基变量，在本例中，最小比值为$\frac{5}{2}$，相对应的变量为x_4，故取x_4为出基变量。

如果式（1-7）中入基变量的对应列的系数都小于或等于零，则x_1无限增大，也能满足$x_4 \geqslant 0$，$x_5 \geqslant 0$，$x_6 \geqslant 0$。在这种情况下我们遇到了一个无界的问题，无最优解。

现已确定x_1为入基变量，x_4为出基变量，就需要进行换基，即从x_4、x_5、x_6为基变量，x_1、x_2、x_3为非基变量，换为x_1、x_5、x_6为基变量，x_4、x_2、x_3为非基变量。这就需要对式（1-7）、式（1-1）进行一次高斯-乔丹求解运算，将基变量化为非基变量的函数，将目标函数化为非基变量的函数，得

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) \\ x_5 &= 1 - (-5x_2 - 2x_4) \\ x_6 &= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4\right) \\ Z &= \frac{1}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

同样原理，可以从式（1-8）中，选取在目标函数Z中系数为正的x_3为入基变量，再由最小比值规则确定x_6为出基变量，进行换基，再作高斯-乔丹运算，得

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 - (-x_2 - 3x_4 + 2x_6) \\ x_1 &= 2 - (2x_2 + 2x_4 - x_6) \\ x_5 &= 1 - (-5x_2 - 2x_4) \\ Z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

从式（1-9）看到，目标函数的表达式中各非基变量的系数均为负值，再次进行换基已不能增大目标函数，故现在得到的解已是最优解。因此本题的最优解为：基变量$x_3 = 1$，$x_1 = 2$，$x_5 = 1$，非基变量$x_2 = x_4 = x_6 = 0$，目标函数$Z = 13$。求得最优解表明，在计划期内，该厂的生产计划应这样安排：第I种产品的产量为2（单位），不生产第II种产品，第III种产品的产量为1（单位）。松弛变量$x_5 = 1$，表明相对应的约束条件式（1-3）是宽松的，减少资源B一个单位也可以获得同样的最高利润。

总结以上计算步骤，单纯形法的计算流程图如图1-1所示。

对图1-1所示的单纯形法计算流程图，用一般形式进行讨论。

问题

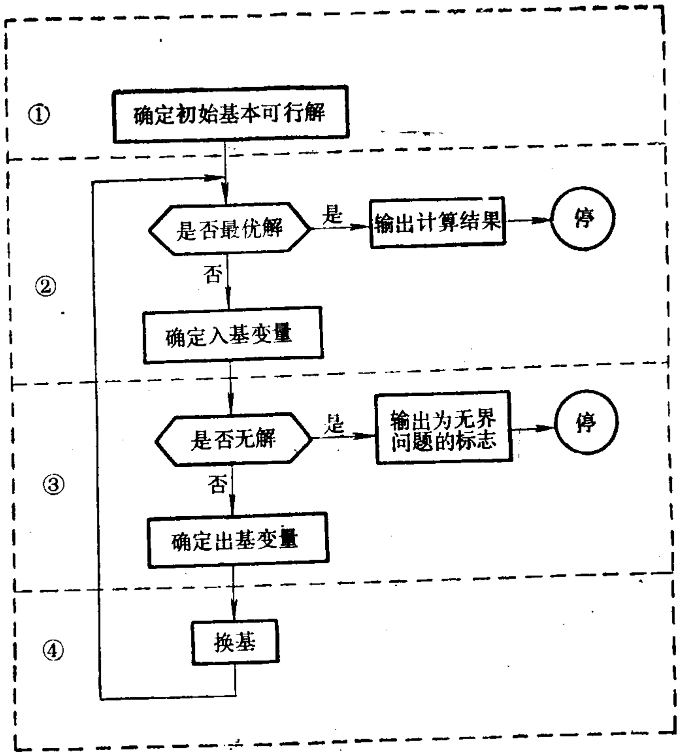

图 1-1 单纯形法计算流程图

$$\text{obj}^{❶} \qquad \max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-10}$$

$$\text{s.t.}^{❷} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i;\ \ b_i \geqslant 0\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1-11}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-12}$$

第①框 确定初始基本可行解。

为了得到初始基本可行解，在式（1-11）中设置非负的松弛变量x_{n+i}（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）首先令这些松弛变量为基变量，并将它们写成非基变量的函数

$$x_{n+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1-13}$$

初始解为可行解只有在式（1-13）的右端非负的条件下才成立。已知$b_i \geqslant 0$，故令$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，即可由式（1-13）得到问题的初始基本可行解。

第②框 最优检验及确定入基变量。

将基变量写成非基变量的函数

$$x_i=b'_i-\sum_{x_j \in X_N} a'_{ij}x_j \quad (x_i \in \mathbf{X}_B) \tag{1-14}$$

其中，$\mathbf{X}_B$代表基变量的集合，$\mathbf{X}_N$代表非基变量的集合。这时目标函数转换为

❶ obj 为英文目标函数的缩写。

❷ s.t.为英文约束条件的缩写。

$$Z=\nu+\sum_{x_j \in X_N}\sigma_j x_j \tag{1-15}$$

式中 ν 为一常数

当所有的非基变量的系数$\sigma_j\leqslant 0$，表明x_j从非基变量变换为基变量，不能改善目标函数，因此，当前解就是最优解，否则进行入基变量的选定。

选定满足条件$\sigma_j>0$，而脚码 j 最小的非基变量x_j为入基变量，这种原则有助于减少计算量。

第③框　无界检验及确定出基变量。

设x_k为选定的入基变量，现将x_k由零增大到θ_k，其它非基变量仍为零，由式（1-14）得到

$$x_i=b'_i-a'_{ik}\theta_k \quad (x_i\in \mathbf{X}_B) \tag{1-16}$$

由式（1-16）得到

$$\theta_k=b'_i/a'_{ik} \quad (x_i\in \mathbf{X}_B) \tag{1-17}$$

为了保持所有变量都为负，要求

$$\theta_k=\min_{x_i\in \mathbf{X}_B}\left\{\frac{b'_i}{a'_{ik}}\middle| a'_{ik}>0\right\} \tag{1-18}$$

即对应于式（1-16）中的$\frac{b'_i}{a'_{ik}}$比值最小的原基变量选为出基变量，这就是最小比值规则，或称 θ 规则。

当$a'_{ik}\leqslant 0$（$x_i\in \mathbf{X}_B$），从式（1-14）可以看出，入基变量x_k的值θ_k无限制地增大仍能满足约束条件，这表示原问题无界，无最优解，计算终止。

在本框中，首先对入基变量的对应系数a'_{ik}进行检查，如$a'_{ik}\leqslant 0$（$i=1$，2，……，m），则本问题无界，否则对于具有正值的a'_{ik}进行比值θ_k的计算，取比值最小行的对应原基变量为出基变量。

第④框　换基。

从第②框与第③框得到x_k为入基变量，x_l为出基变量，重新将基变量化为非基变量的函数。这需要进行一次高斯-乔丹消去运算，得到更新后的式（1-14）与式（1-15）。这个过程的运算量在整个计算中占很大的比重。

1.2.2　直接求解的单纯形法

从上面所讨论的单纯形法可以看到，单纯形法的每次迭代，是从一个基本可行解变更为另一个基本可行解，当入基变量与出基变量确定后，需要进行一次高斯-乔丹消去运算。如问题有 n 个决策变量，m个松弛变量，m个约束方程式，消去运算的系数矩阵的规模为$(m+1)\times(n+m)$，而每次迭代都是在前一次运算所得到的系数矩阵的基础上进行的，当问题的规模较大时，多次迭代将导致舍入误差的积累与扩大，有可能将解引入歧途。为了解决这个问题，对单纯形法需要进行改进。下面介绍直接求解的改进单纯形法。这个方法在每次迭代时都直接从原始数据取数，避免了舍入误差的积累与扩大。而且这个方法每

次迭代只需解两个$m\times m$的线性方程组，由于大多数线性规划问题决策变量数远大于约束方程式数m，因而显著减少了求解的计算量。线性规划问题可写成如下标准形式

$$\left.\begin{aligned}&\text{obj}\quad \max Z=\boldsymbol{cX}\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\&\qquad\ \ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{1-19}$$

对于非标准形式的问题，可以通过以下方法化为标准形式。

（1）极小化问题$\min\boldsymbol{cX}$，等效于求$\max(-\boldsymbol{cX})$。

（2）有不等式约束方程式，可以在不等式约束方程式的左端加或减非负松弛变量，使之成为等式约束。

（3）对于没有非负约束的决策变量x_i，可以令$x_i=x_i'-x_i''$，而$x_i'\geqslant 0$，$x_i''\geqslant 0$，使所有的决策变量都具有非负约束。

一、计算方法

设式（1-19）有m个约束方程式，n个变量。根据其系数与基变量、非基变量的对应关系，我们将$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{X}$分块为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N}],\ \boldsymbol{c}=[\boldsymbol{c}_B,\ \boldsymbol{c}_N],\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_B\\\boldsymbol{X}_N\end{bmatrix}$$

这样，式（1-19）可写成

$$\left.\begin{aligned}&\max Z=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{c}_N\boldsymbol{X}_N\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}\\&\boldsymbol{X}_B\geqslant 0,\ \boldsymbol{X}_N\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{1-20}$$

$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{N}$可以用它们的列向量来表示

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m],\ \boldsymbol{N}=[\boldsymbol{a}_s,\ \boldsymbol{a}_t,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_p]$$

$\boldsymbol{B}$为$m\times m$矩阵，N为$m\times(n-m)$矩阵，只需记录$\boldsymbol{B}$中各列对应于原始系数矩阵$\boldsymbol{A}$的列号，就可以得$\boldsymbol{B}$。同样，对于$\boldsymbol{N}$也只需记录相应的列号。

由式（1-20）得

$$\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{NX}_N$$

用$\boldsymbol{B}^{-1}$左乘上式，得到

$$\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N\tag{1-21}$$

将式（1-21）代入式（1-20）中的目标函数得

$$Z=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}N)\boldsymbol{X}_N\tag{1-22}$$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\tag{1-23}$$

用$\boldsymbol{B}$右乘式（1-23）后，进行转置可得

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y}^T=\boldsymbol{c}_B^T\tag{1-24}$$

将式（1-23）代入式（1-22）得

$$Z=\boldsymbol{Yb}+(\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{Y}N)\boldsymbol{X}_N\tag{1-25}$$

根据以上公式，我们可以对线性规划问题按直接求解的改进单纯形法进行计算。其计

算步骤如下：

1.最优检验及确定入基变量

由式（1-25）可以看出，向量c_N-YN可作为检验向量，当$c_N\leqslant YN$，则现行的X_B为最优解。因此，我们可对

$$YN=Y[a_s,\ a_t,\ \cdots,\ a_p]$$

逐个元素计算YN，一旦发现$Ya_k<c_k$，则选定x_k为入基变量，而a_k则称为入基列。

2.无界检验及确定出基变量

将原非基变量x_k从零加大到t_k，而其它非基变量仍保持为零，即 $X_N=[0,\ 0,\ \cdots,\ t_k,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T$，代入式（1-21）得到

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}N[0,\ 0,\ \cdots,\ t_k,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T$$

$B^{-}b$为现行的基变量的值。令$\widehat{X}_B=B^{-1}b$，N用它的列向量来表示，得到

$$X_B=\widehat{X}_B-B^{-1}[a_s,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots,\ a_p][0,\ \cdots,\ t_k,\ \cdots,\ 0]^T$$

即
$$X_B=\widehat{X}_B-B^{-1}a_kt_k$$

令
$$d_k=B^{-1}a_k,\ \text{得到}$$

$$Bd_k=a_k \tag{1-26}$$

$$X_B=\widehat{X}_B-d_kt_k \tag{1-27}$$

a_k为已知的入基列，解线性方程组（1-26），求得d_k。

如$d_k\leqslant 0$，从式（1-27）不难看出，不论t_k增大到任何数值，问题都是可行的，是一个无界的问题，计算终止。

如果d_k有大于零的元素，根据$X_B\geqslant 0$的约束，要求$\widehat{X}_B-t_kd_k\geqslant 0$，可求得$t_k$可能的最大值与其对应的行号$l$，$x_l$即为出基变量，$t_k$的可能最大值为

$$t_k=\min_{d_l\in d_k}\left\{\frac{\widehat{x_l}}{d_k}\middle|d_l>0\right\}$$

这个值即是入基变量的值。

3.基变量的修正

在求得$x_k=t_k$后，将t_k代入式（1-27），就得到了修正后其它基变量的值。

4.换基

根据入基变量x_k的列号k与出基变量的列号l，可以得到新的的基矩阵B，新的非基矩阵N以及新的c_B，c_N等。

再重复以上过程，直到得到最优解。

二、计算框图

根据以上原理，在图1-2给出了直接求解的改进单纯形法的计算框图。

第①框为初始化。对于式（1-10）～式（1-12）所示的一般形式问题，可加入松弛变量，使之成为单纯形法的标准形式，并令$B^{(0)}=I$（单位矩阵），$X_B^{(0)}=b$，从这个初始基本可行解开始进行迭代。关于如何得到初始基本可行解的详细情况可参看参考文献[2]。