SCHAUM'S outlines

全美经典 学习指导系列

# 数字信号处理

〔美〕 M. H. 海因斯 著

张建华 卓力 张延华 译

- 涵盖全部课程基础
- 300余道精选习题及其详解
- 迅速提高解题能力
- 考研的得力助手
- 自学的理想读物

科学出版社

McGraw Hill 麦格劳-希尔教育出版集团

## 内 容 简 介

本书主要介绍数字信号处理的基础理论，并给出300多道解答步骤完整的习题。因而，本书是相关教材的有益补充，是自学有效问题求解方法的理想读物。

全书共9章，涵盖了数字信号处理导论教程的核心内容，包括数字信号处理的基础知识，离散时间信号的频域表示，采样离散时间信号的重要问题，$z$变换，不同类型的滤波系统，离散傅里叶变换(DFT)，离散时间系统的设计与实现。每章均分为四部分：基本原理和方法精讲、习题与解答、补充习题以及补充习题答案。

本书是电气工程、控制理论与工程、计算机科学与工程、系统科学与工程、通信工程等专业师生的理想参考书，也可供涉及信号处理、信号与系统技术的科研人员参考。

**Monson H. Hayes: Schaum's Outlines Digital Signal Processing**
**ISBN: 0-07-027389-8**

**图字：01-2001-1560**

**图书在版编目(CIP)数据**

数字信号处理/〔美〕海因斯(Hayes, M. H.)著；张建华等译. -北京：科学出版社，2002
(全美经典学习指导系列)
ISBN 7-03-009550-2
Ⅰ. 数… Ⅱ. ①海… ②张… Ⅲ. 数字信号-信号处理-教学参考资料 Ⅳ. TN911.72
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第039755号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年1月第 一 版 开本：A4(890×1240)
2002年1月第一次印刷 印张：21 3/4
印数：1—5 000 字数：624 000

**定价：30.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

# 前　言

数字信号处理(DSP)涉及的是数字形式信号的表示、信号及其所携带信息的处理。正如我们所了解的那样,尽管 DSP 兴起于 20 世纪 60 年代,但我们今天所使用的一些重要而功能强大的处理技术可以追溯到数世纪以前提出和研究的数值算法。自从 20 世纪 70 年代采用第一块 DSP 芯片以来,数字信号处理领域已得到了长足的发展。随着 DSP 处理器速度的飞速提高及精密性和计算能力的相应增强,数字信号处理已成为许多商用产品和应用中不可或缺的一部分,并正逐渐成为一个常用术语。

本书是关于数字信号处理基础的教辅读物。读者使用本书学习 DSP 有两种方式:由于本书为读者提供了丰富的习题和例子,它可以用作任何一本教材的补充读物;另外,通过例题的学习,它可以作为一本自学 DSP 的指南。不管采用哪种方法,本书是以为读者提供大量不同难度的习题为目标而写成的。除了那些可视为训练的问题,读者会发现一些其求解需要创造性且富有挑战性的问题和一些实际应用问题,如计算家庭抵押金的付款。如有可能,一个问题会用不同的方法求解或提示几种解法。

本书共 9 章,涵盖了 DSP 基础教程的核心内容。第一章介绍了数字信号处理的基础知识,为后几章打基础。本章的主题包括离散信号和系统的描述与表征、卷积和线性常系数差分方程。第二章考虑离散时间信号的频域表示。具体地说,我们介绍离散时间傅里叶变换(DTFT),阐述 DTFT 的一些性质以及如何把 DTFT 用于解差分方程和求卷积。第三章包括与采样离散时间信号有关的重要问题。这一章最重要的是采样定理及混叠的概念。$z$ 变换是在第四章阐述的,它是连续时间信号的拉普拉斯变换在离散时间情况下的对等。第五章,考虑系统函数,它是线性移位不变系统单位采样响应的 $z$ 变换,并介绍一些不同类型的系统,如全通滤波器、线性相位滤波器和最小相位滤波器以及反馈系统。接下来的两章是关于离散傅里叶变换(DFT)。第六章介绍并阐述 DFT 的一些性质。本章的主要思想是两个序列 DFT 的乘积对应于时域的围线积分。第七章阐述一些计算有限长序列 DFT 的有效算法。这些算法通称为快速傅里叶变换(FFT)。最后两章考虑离散时间系统的设计与实现。第八章介绍实现线性移位不变离散时间系统的几种不同方法,并考察这些实现对于滤波器系数量化的灵敏度。另外,我们分析这些系统不动点实现时舍入噪声的影响。第九章介绍设计 FIR 和 IIR 线性移位不变滤波器的设计方法。尽管重点是设计低通滤波器,但也考虑到了其他选频滤波器,如高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器的设计方法。

希望本书能成为学习 DSP 的有用工具。欢迎通过本书的站点提出反馈意见,这个站点在:

http://www.ee.gatech.edu/users/mhayes/schaum

从这个站点还可以得到如本书问题的纠正和详述、补充阅读材料和问题及读者意见等重要信息。

(O-1514.0101)
责任编辑：陈玉琢

SCHAUM'S ouTlines

全球销量超越3000万的“全美经典学习指导系列”是您的最佳学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列

全美著名高校资深教授倾力之作

国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译

省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答

迄今为止国内最全面的教辅系列

覆盖大学理工科专业

## 全美经典学习指导系列

| | | |
|---|---|---|
| 概率和统计 | 2000工程力学习题精解 | 电气工程基础 |
| 统计学 | 工程力学 | 工程电磁场基础 |
| 离散数学 | 3000物理习题精解 | 数字信号处理 |
| Mathematica使用指南 | 流体动力学 | 数字系统导论 |
| 数理金融引论 | 物理学基础 | 数字原理 |
| 机械振动 | 材料力学 | 电机与机电学 |
| 微分方程 | 2000离散数学习题精解 | 基本电路分析 |
| 统计学原理（上） | 工程热力学 | 信号与系统 |
| 统计学原理（下） | 数值分析 | 微生物学 |
| 微积分 | 量子力学 | 生物化学 |
| 静力学与材料力学 | 有机化学习题精解 | 生物学 |
| 有限元分析 | 3000化学习题精解 | 分子和细胞生物学 |
| 传热学 | 大学化学习题精解 | 人体解剖与生理学 |
| 近代物理学 | 电路 | |

http://www.sciencep.com http://www.mheducation.com

ISBN 7-03-009619-3

9 787030 096197 >

Mc Graw Hill

ISBN 7-03-009619-3/O・1514
定 价：36.00 元

# 目　录

# 第一章　信号与系统

## 1.1　引言

在本章，我们通过阐述离散时间信号和离散时间系统的概念，开始研究数字信号处理。我们将集中解决有关信号表示、信号运算、信号性质、系统分类和系统性质的问题。首先，在 1.2 节我们严格定义离散时间信号的含义，然后提出几种重要的基本运算，这些运算可能会用于这些信号。其次，我们在 1.3 节考虑离散时间系统。在这一节中的线性、移位不变性、因果性、稳定性和可逆性这几个概念具有特殊的重要性。对于线性移位不变系统，我们将会证明输入与输出是卷积和的关系。然后，我们在 1.4 节讨论卷积和的性质及求卷积的方法。最后在 1.5 节，我们考虑由差分方程描述的离散时间系统。

## 1.2　离散时间信号

离散时间信号是一个附标的实数或复数序列。一个离散时间信号是一个整数值变量 $n$ 的函数，表示为 $x(n)$。尽管独立变量 $n$ 不一定表示"时间"(例如，$n$ 可以表示空间坐标或距离)，但 $x(n)$ 一般被认为是时间的函数。因为离散时间信号对于非整数值 $n$ 是没有定义的，所以一个实值信号 $x(n)$ 可以表示成 lollipop 图的形式，如图 1－1 所示。在某些问题和应用中，将 $x(n)$ 视为一个矢量是非常方便的，于是，序列 $x(0)$ 到 $x(N-1)$ 常被看作是下面矢量的元素：

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \cdots, x(N-1)]^T$$

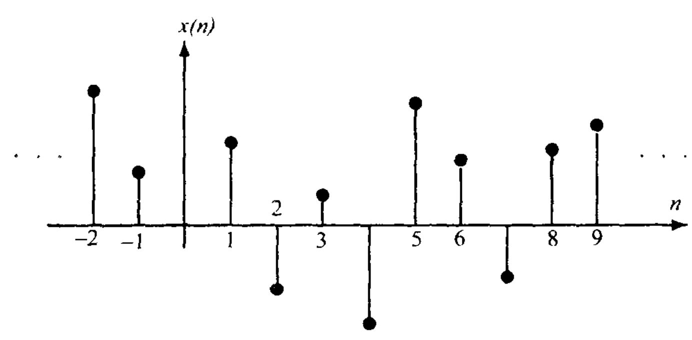



图 1－1　离散时间信号 $x(n)$ 的图形表示

离散时间信号常常可以用一个模-数转换器①(A/D)采样连续时间信号如语音得到。例如，对于一个连续时间信号 $x_a(t)$，以每秒 $f_s=1/T_s$ 个采样的速率采样而产生采样信号 $x(n)$，它与 $x_a(t)$ 的关系如下：

$$x(n) = x_a(nT_s)$$

然而，并不是所有的离散时间信号都是这样获得的。一些信号可以认为是自然产生的离散时间序列，因为没有物理的模-数转换器把模拟信号转换为数字信号。这类信号的例子有每日股票市场价格、人口统计数、仓库存量和 Wolfer 太阳黑子数②。

### 1.2.1　复序列

一般来说，离散时间信号是复值的。事实上，在许多重要的应用中，如数字通信，复数信号

---

① 模-数转换将在第三章讨论。

② Wolfer 太阳黑子数 $R$ 是 1848 年由 Rudolf Wolf 引入来作为太阳黑子活动的一种度量。可以得到从 1818 年以来的每日记录，并且从 1749 年以来对每月平均值的估计一直在进行。人们对研究太阳黑子活动与地球上的现象如气象数据和气候变化有着浓厚的兴趣。

出现得很普遍。一个复信号可以用其实部和虚部来表示为

$$z(n) = a(n) + jb(n) = \mathrm{Re}\{z(n)\} + j\mathrm{Im}\{z(n)\}$$

或用其幅值和相位表示为极坐标形式

$$z(n) = |z(n)| \exp[j\arg\{z(n)\}]$$

其中，幅值可以由实部和虚部按如下公式得到：

$$|z(n)|^2 = \mathrm{Re}^2\{z(n)\} + \mathrm{Im}^2\{z(n)\}$$

而相位可以用

$$\arg\{z(n)\} = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{z(n)\}}{\mathrm{Re}\{z(n)\}}$$

求得。

如果 $z(n)$是个复序列，其复共轭表示为 $z^*(n)$，可以通过改变其虚部的符号得到：

$$z^*(n) = \mathrm{Re}\{z(n)\} - j\mathrm{Im}\{z(n)\} = |z(n)| \exp[-j\arg\{z(n)\}]$$

### 1.2.2　一些基本序列

尽管大多有实际意义的携带信息的信号是时间的复杂函数，但是有三种简单而重要的离散时间信号，它们常常用于表示与描述一些更复杂的信号。它们是单位采样信号、单位阶跃信号与指数信号。单位采样表示为 $\delta(n)$，定义如下：

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

它在离散信号处理中起着与单位采样在连续时间信号处理中相同的作用。单位阶跃表示为 $u(n)$，定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

它与单位采样的关系表示为

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

类似地，一个单位采样可以记为两个步长信号之差：

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

最后，指数序列定义为

$$x(n) = a^n$$

其中 $a$ 可以是一个实数或复数，特别重要的是当 $a=e^{j\omega_0}$ 时形成的指数序列，其中 $\omega_0$ 是一个实数。在此情况下，$x(n)$是一个复指数，即

$$e^{jn\omega_0} = \cos(n\,\omega_0) + j\sin(n\,\omega_0)$$

我们将在下一章中看到，复指数在信号的傅里叶分解中是有用的。

### 1.2.3　信号持续时间

离散时间信号可以用其持续时间或范围方便地进行分类。例如，一个离散序列称为是一个有限长序列，如果对于超出某个有限区间$[N_1, N_2]$的所有 $n$ 值，它等于零。像单位阶跃和复指数这样的序列，其长度不是有限的，称为无限长序列。无限长序列可进一步分为右边的、左边的和双边的。任何无限长序列，如果对于所有 $n<n_0$($n$ 为某个整数值)，其值为零，就是一个右边序列。单位阶跃是右边序列的一个例子。类似地，一个无限长序列称为是左边的，如果对于所有 $n>n_0$($n$ 为某个整数值)，$x(n)=0$。左边序列的一个例子是

$$x(n) = u(n_0 - n) = \begin{cases} 1 & n \leqslant n_0 \\ 0 & n > n_0 \end{cases}$$

它是一个逆时间、带时延的单位阶跃，一个既非左边又非右边的无限长序列，如复指数，称为双

边序列。

### 1.2.4　周期与非周期序列

任何离散时间信号总可以分为周期的或非周期的。我们称信号 $x(n)$是周期的，如果对于某个正实整数 $N$ 和所有 $n$，有

$$x(n) = x(n+N) \tag{1.1}$$

这即是说此序列每 $N$ 个采样重复出现。如果一个信号是以 $N$ 为周期的，那么它对于 $2N$，$3N$ 以及所有其他 $N$ 的整数倍都是周期的。其基本周期，我们用 $N$ 表示，是满足式(1.1)的最小正整数。如果式(1.1)对于任何整数 $N$ 都不能满足，那么 $x(n)$称为一个非周期信号。

**例 1.2.1**　信号

$$x_1(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

和 $x_2(n)=\cos(n^2)$ 是非周期的，而信号

$$x_3(n) = e^{j\pi n/8}$$

是周期的，并有一个基本周期 $N=16$。

如果 $x_1(n)$是一个周期为 $N_1$ 的序列，$x_1(n)$是另一个周期为 $N_2$ 序列，其和

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

将恒是周期的，且其基本周期为

$$N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)} \tag{1.2}$$

其中，$\gcd(N_1, N_2)$表示 $N_1$ 与 $N_2$ 的最大公约数。这种情况对于乘积也成立，即

$$x(n) = x_1(n)x_2(n)$$

是周期的，其周期为式(1.2)中给出的 $N$。不过，其基本周期可能更小。给定任何序列$x(n)$，用以下方式复制 $x(n)$总可以构成一周期信号：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-kN)$$

其中，$N$ 是一个正整数。在这种情况下，$y(n)$将是以 $N$ 为周期的。

### 1.2.5　对称序列

离散时间信号常常具有某种可能用于解决一些问题的对称形式。我们关心的两种对称如下：

**定义**：我们称一个实值信号是偶的，如果对于所有 $n$，有

$$x(n) = x(-n)$$

而称一个信号是奇的，如果对于所有的 $n$，有

$$x(n) = -x(-n)$$

任何信号 $x(n)$都可以被分解为其偶部 $x_e(n)$、奇部 $x_o(n)$的和，即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \tag{1.3}$$

为了求得 $x(n)$的偶部，我们构造和

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\{x(n) + x(-n)\}$$

而为了求 $x(n)$的奇部，我们取差

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\{x(n) - x(-n)\}$$

复序列的对称形式略有不同。

**定义**：我们称一个复信号是共轭对称的[①]，如果对于所有 $n$，有

$$x(n) = x^*(-n)$$

我们称一个复信号是共轭反对称的，如果对于所有 $n$，有

$$x(n) = -x^*(-n)$$

任何复信号都可以被分解为一个共轭对称信号和一个共轭反对称信号之和。

### 1.2.6 信号运算

在我们研究离散时间信号与系统时，我们将考虑各种信号的运算。这些运算通常是几种基本信号变换的组合。这些变换可分为关于独立变量的变换和关于 $x(n)$ 的幅度（即因变量）的变换。在以后的两小节中，我们将主要考虑这两类变换并列出应用中常见的几种变换。

**独立变量的变换**

我们常常通过按如下方式改变附标来实现序列的变换：

$$y(n) = x(f(n))$$

其中，$f(n)$ 是 $n$ 的某个函数。如果对于某个 $n$ 值，$f(n)$ 不是整数，$y(n)=x(f(n))$ 是没定义的。确定改变附标 $n$ 的结果总可以使用简单的表格法列出对于每个 $n$ 值 $f(n)$ 的值，然后设 $y(n) = x(f(n))$ 来完成。不过，对于许多附标转换这是不必要的，这个序列可以直接求得或画出。最常见的变换包括移位、翻转和标度，其定义如下：

**移位**：这是一种定义 $f(n)=n-n_0$ 的变换。如果 $y(n)=x(n-n_0)$，则 $x(n)$ 被移到右边 $n_0$ 个采样，如果 $n$ 是正值（这称为延迟）；如果 $n_0$ 是负的，则 $x(n)$ 被移到左边 $n_0$ 个采样（称为超前）。

**翻转**：这种变换由 $f(n)=-n$ 给出，它只是关于指标 $n$“翻转”信号 $x(n)$。

**时间标度**：这种变换定义为 $f(n)=Mn$ 或 $f(n)=n/N$，其中 $M$ 和 $N$ 都是正整数。当 $f(n)=Mn$ 时，序列 $x(Mn)$ 是通过取 $x(n)$ 的每第 $M$ 个采样形成（这种运算称下采样）；对于 $f(n)=n/N$，序列 $y(n)= x(f(n))$ 定义如下：

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{N}\right) & n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

（这种运算称为上采样。）移位、翻转和时间标度的例子如图 1-2 所示。

移位、翻转和时间标度运算是与次序相关的，所以在计算这些运算的合成时需要小心。举个例子，图 1-3 给出两个系统，一个由一个延迟加上一个翻转组成，一个由一个翻转加上一个延迟组成，这两个系统的输出不同。

**加法、乘法与标度**

最常见的幅度变换种类有加法、乘法与标度，这些运算比较简单，只是逐点对信号进行运算。

**加法**：两个信号之和

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty$$

由对信号值的逐点相加得到。

**乘法**：两个信号之积

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty$$

由对信号值的逐点相乘得到。

**标度**：信号 $x(n)$ 的幅值标度是通过把每个信号值乘以常数 $c$ 得到：

$$y(n) = cx(n) \qquad -\infty < n < \infty$$

① 一个共轭对称的序列有时称为埃尔米特序列。

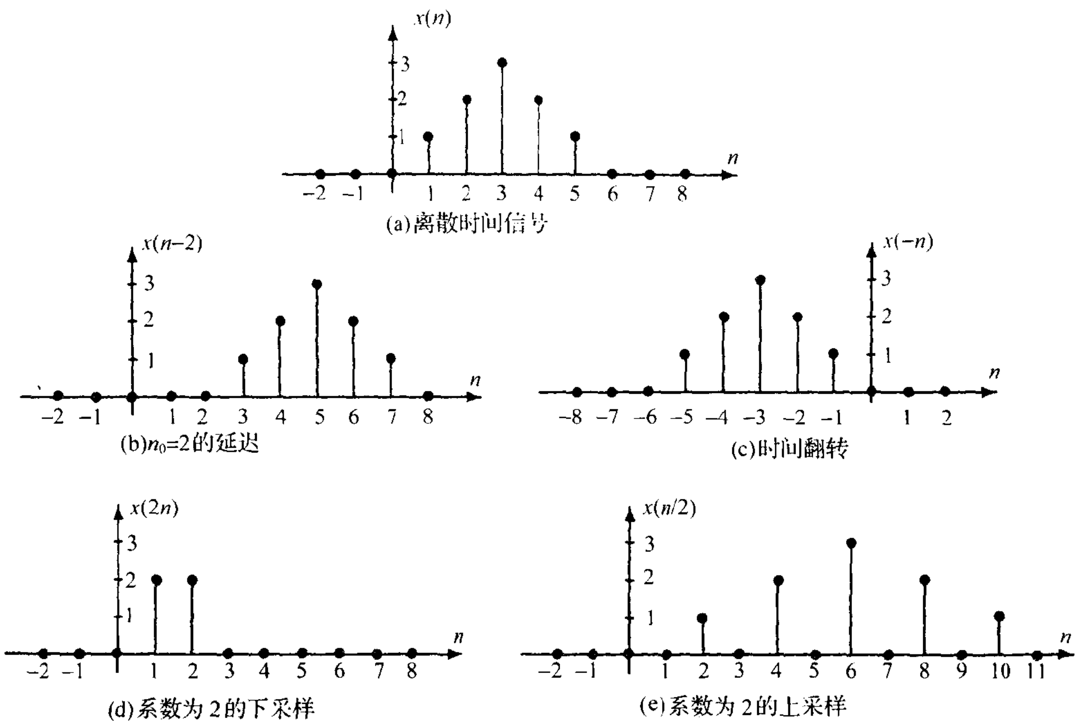



图 1-2　关于独立变量 $n$ 的移位、翻转和标度示意图

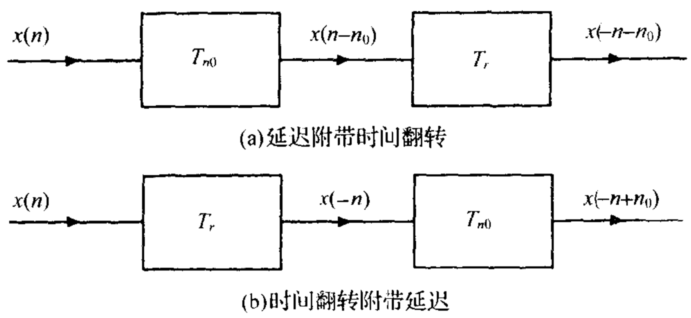



图 1-3　图解延迟与翻转不能对易的例子

这个运算也可以看作是两个信号 $x(n)$和 $f(n)=c$ 的乘积。

### 1.2.7　信号分解

可以用单位采样把任何一个信号 $x(n)$分解为如下的加权移位的单位采样的和：

$$x(n)=\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+x(2)\delta(n-2)+\cdots$$

这个分解可以简记为

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k) \tag{1.4}$$

式中每一项 $x(k)\delta(n-k)$是一个在时刻 $n=k$ 幅值为 $x(k)$、对于其他 $n$ 值为零的信号，这个分解是连续时间信号的筛分性质的离散形式，用在求卷积和中。

## 1.3　离散时间系统

离散时间系统是一个数学算子或映射，这个算子(映射)通过一组已定法则或运算把一个信号(输入)变换为另一个信号(输出)。记号 $T[\cdot]$用来表示一般的系统，如图 1-4 所示，图中输入信号 $x(n)$通过 $T[\cdot]$被变换为输出信号 $y(n)$。一个系统的输入-输出性质可以用几种方法中的任何一种来确定。例如，输入输出之间的关系可以用一个简洁的数学法则或函数表

示为 $y(n)=x^2(n)$，或

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

然而，也可以用一个算法描述一个系统。这个算法规定施加于输入信号的一系列指令或运算，如：

$$y_1(n) = 0.5y_1(n-1) + 0.25x(n)$$
$$y_2(n) = 0.25y_2(n-1) + 0.5x(n)$$
$$y_3(n) = 0.4y_3(n-1) + 0.5x(n)$$
$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n)$$

在某些情况下，可以方便地用一个表格来确定一个系统，这个表格定义了包括所有可能相关的输入-输出信号对的集合。

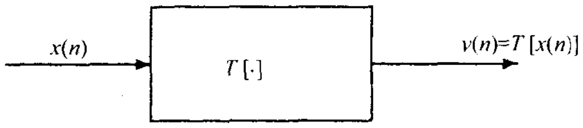



图 1-4　把一个离散时间系统表为把输入信号映射成输出信号的变换 $T[\cdot]$

离散时间系统可按它们所具有的性质分类。最常用的性质包括线性、移位不变性、因果性、稳定性和可逆性。这些性质以及其他一些性质将在下一节叙述。

### 1.3.1　系统性质

**无记忆系统**

第一个性质关心的是系统有无记忆。

**定义**：一个系统称为是无记忆的，如果在任意时刻 $n=n_0$ 输出仅取决于在时刻 $n=n_0$ 的输入。

换句话说，一个系统称为是无记忆的，如果对于任意 $n_0$，只要已知 $x(n_0)$的值，我们就能确定 $y(n_0)$的值。

**例 1.3.1**　系统

$$y(n) = x^2(n)$$

是无记忆的，因为 $y(n_0)$仅取决于在 $n_0$ 时刻 $x(n_0)$的值，而系统

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

是有记忆的，因为在时刻 $n_0$ 输出既取决于时刻 $n_0$ 输入的值又取决于时刻 $n_0-1$ 输入的值。

**加性**：一个加性系统是这样一个系统，即其输入之和的响应等于单个输入响应之和，于是有：

**定义**：我们称一个系统是加性的，如果对于任意信号 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，有

$$T[x_1(n)+x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$$

**齐性**：我们称一个系统是齐性的，如果输入量化产生同样倍数的输出量化。具体地，

**定义**：我们称一个系统是齐性的，如果对任意复常数 $c$ 和任意输入序列 $x(n)$，有

$$T[cx(n)] = cT[x(n)]$$

**例 1.3.2**　由

$$y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}$$

定义的系统不是加性的，因为 $T[x_1(n)+x_2(n)]=\dfrac{(x_1(n)+x_2(n))^2}{x_1(n-1)+x_2(n-1)}$，它与

$$T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}$$

不相同。但是，这个系统却是齐性的，因为对于一个输入 $cx(n)$，其输出是

$$T[cx(n)] = \frac{(cx(n))^2}{cx(n-1)} = c\frac{x^2(n)}{x(n-1)} = cT[x(n)]$$

相反，由

$$y(n) = x(n) + x^*(n-1)$$

定义的系统是加性的，因为

$$[x_1(n) + x_2(n)] + [x_1(n-1) + x_2(n-1)]^*$$
$$= [x_1(n) + x_1^*(n-1)] + [x_2(n) + x_2^*(n-1)]$$

但是这个系统不是齐性的，因为它对 $cx(n)$的响应

$$T[cx(n)] = cx(n) + c^* x^*(n-1)$$

与 $cT[x(n)]=cx(n)+cx^*(n-1)$不同。

**线性系统**

一个既是加性又是齐性的系统称为线性系统。

**定义**：我们称一个系统是线性的，如果对任意两个输入 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，以及任意复常数 $a_1$ 和 $a_2$，有

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

线性极大地简化了计算一个给定输入系统的响应。例如，利用式(1.4)中给出的 $x(n)$的分解与加性性质，可以得出输出 $y(n)$为

$$y(n) = T[x(n)] = T\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\Big] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)]$$

因为系统 $x(k)$是常数，利用齐性性质得

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \tag{1.5}$$

如果我们定义 $h_k(n)$为系统对单位采样在时刻 $n=k$ 时的响应，即

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)]$$

式(1.5)变为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \tag{1.6}$$

称为叠加和。

**移位不变性**

如果一个系统具有这样的性质，即输入中 $n_0$ 个移位(延迟)会引起输出中 $n_0$ 个移位，我们称这个系统是移位不变的。形式化地定义如下：

**定义**：设 $y(n)$为一个系统对任意输入 $x(n)$的响应，我们称这个系统是移位不变的。如果对于任意延迟 $n_0$，它对 $x(n-n_0)$的响应是 $y(n-n_0)$，一个非移位不变的系统称为是移位变化的①。

事实上，如果一个系统其性质或特征不随时间变化，它就是移位不变的。为了验证时不变性，需要比较 $y(n-n_0)$与 $T[x(n-n_0)]$。如果它们对任意输入 $x(n)$和所有移位 $n_0$ 都是相同的，这个系统就是移位不变的。

**例 1.3.3** 由

$$y(n) = x^2(n)$$

定义的系统是移位不变的，这一点可以证明如下：如果 $y(n)=x^2(n)$是系统对 $x(n)$的响应，那么系统对 $x'(n)=x(n-n_0)$的响应是

$$y'(n) = [x'(n)]^2 = x^2(n-n_0)$$

因为 $y'(n)=y(n-n_0)$，所以这个系统是移位不变的。然而，下式描述的系统是移位变化的：

① 有的作者把这个性质称为时不变性。然而，由于 $n$ 并不一定表示“时间”，所以移位不变性更具一般性。

$$y(n)=x(n)+x(-n)$$

为了看出这一点，注意到系统对输入 $x(n)=\delta(n)$ 的响应是

$$y(n)=\delta(n)+\delta(-n)=2\delta(n)$$

而对 $x(n-1)=\delta(n-1)$ 的响应是

$$y'(n)=\delta(n-1)+\delta(-n-1)$$

因为这与 $y(n-1)=2\delta(n-1)$ 不同，所以这个系统是移位变化的。

**线性移位不变系统**

一个既是线性又是移位不变的系统称为线性移位(LSI)不变系统。如果 $h(n)$ 是一个 LSI 系统对单位采样 $\delta(n)$ 的响应，它对 $\delta(n-k)$ 的响应将是 $h(n-k)$。所以，在式(1.6)中给出的叠加和中，

$$h_k(n)=h(n-k)$$

于是可得

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) \tag{1.7}$$

式(1.7)称为卷积和，记为

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

其中 * 表示卷积算符。序列 $h(n)$ 称为单位采样响应，它包含了一个 LSI 系统的全部特征，换言之，一旦 $h(n)$ 已知，这个系统对于任何输入 $x(n)$ 的响应都可以求得。

**因果性**

对于实时应用重要的一个系统性质是因果性，其定义如下：

**定义**：我们称一个系统是因果性的，如果对于任意 $n_0$，系统在时刻 $n_0$ 的响应仅取决于在时刻 $n=n_0$ 以前的输入。

对于一个因果系统，输出的变化不能发生在输入的变化之前。于是，对于 $n\leqslant n_0$，如果 $x_1(n)=x_2(n)$，$y_1(n)$ 必定等于 $y_2(n)$。所以称因果系统是非超前的。一个 LSI 系统将是因果性的，当且仅当对于 $n<0$，$h(n)$ 等于零。

**例 1.3.4** 由 $y(n)=x(n)+x(n-1)$ 描述的系统是因果性的，因为在任意 $n=n_0$ 时刻输出值仅取决于输入 $x(n)$ 在时刻 $n_0$ 和 $n_0-1$ 的值。相反，由 $y(n)=x(n)+x(n+1)$ 所描述的系统是非因果的，因为在 $n=n_0$ 时刻的输出依赖于输入在 $n_0+1$ 时刻的值。

**稳定性**

在许多应用中，一个系统有这样的响应 $y(n)$ 是很重要的，即只要输入是有界的，响应 $y(n)$ 的幅度就是有界的。我们称具有这种性质的系统在有界输入-有界输出(BIBO)的意义上是稳定的。具体意义如下：

**定义**：我们称一个系统在有界输入-有界输出的意义上是有界的，如果对于任何有界输入 $|x(n)|\leqslant A<\infty$，输出将是有界的，

$$|y(n)|\leqslant B<\infty$$

对于一个线性移位不变系统，如果单位采样响应是绝对可加的，那么稳定性是可以得到保证的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \tag{1.8}$$

**例 1.3.5** 一个具有单位采样响应 $h(n)=a^n u(n)$ 的 LSI 系统只要 $|a|<1$，将是稳定的，因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n=\frac{1}{1-|a|} \qquad |a|<1$$

相反，由式 $y(n)=nx(n)$ 描述的系统是不稳定的。因为其对单位阶跃 $x(n)=u(n)$ 的响应 $y(n)=nu(n)$ 是无界的。

**可逆性**

在信道均衡和去卷等应用中，一个重要的系统性质是可逆性。我们称一个系统是可逆的，如果一个系统的输入可以惟一地从其输入求出。为了保证一个系统是可逆的，对不同的输入需产生不同的输出。换句话说，给定任何两个输入 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$，且 $x_1(n)\neq x_2(n)$，必有 $y_1(n)\neq y_2(n)$ 成立。

**例 1.3.6**　由

$$y(n)=x(n)g(n)$$

定义的系统是可逆的，当且仅当 $g(n)\neq 0$。特别地，给定 $y(n)$ 和对于所有 $n$ 非零 $g(n)$，$x(n)$ 可以按下式从 $y(n)$ 中恢复：

$$x(n)=\frac{y(n)}{g(n)}$$

## 1.4　卷积

一个线性移位不变系统的输入 $x(n)$ 与其输出 $y(n)$ 的关系由如下卷积和给出：

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

因为卷积是分析和描述 LSI 系统的基础，在这一节我们着眼于求卷积的方法。首先列出卷积的几个性质，这几个性质在简化求解卷积和时可能会用到。

### 1.4.1　卷积性质

卷积是一个线性算子，因而有许多重要性质，包括互易性质、相关性质和分布性质。其定义和说明概括如下。

**交换性**

交换性是指两个序列进行卷积的次序无关紧要。在数学上，交换性为

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

从系统的观点来看，这个性质表明一个具有采样响应 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ 的系统与一个具有单位采样响应 $x(n)$ 和输入 $h(n)$ 的系统行为完全相同，如图 1-5(a)所示。

**结合性**

卷积算子满足结合性，即

$$\{x(n)*h_1(n)\}*h_2(n)=x(n)*\{h_1(n)*h_2(n)\}$$

从系统的观点来看，结合性表明如果两个具有单位采样响应 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 的系统级联，如图 1-5(b)所示，则存在一个这样的等效系统，即它有一个与 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 的卷积相等的单位采样响应：

$$h_{eq}(n)=h_1(n)*h_2(n)$$

**分配性**

卷积算子的分配性是指

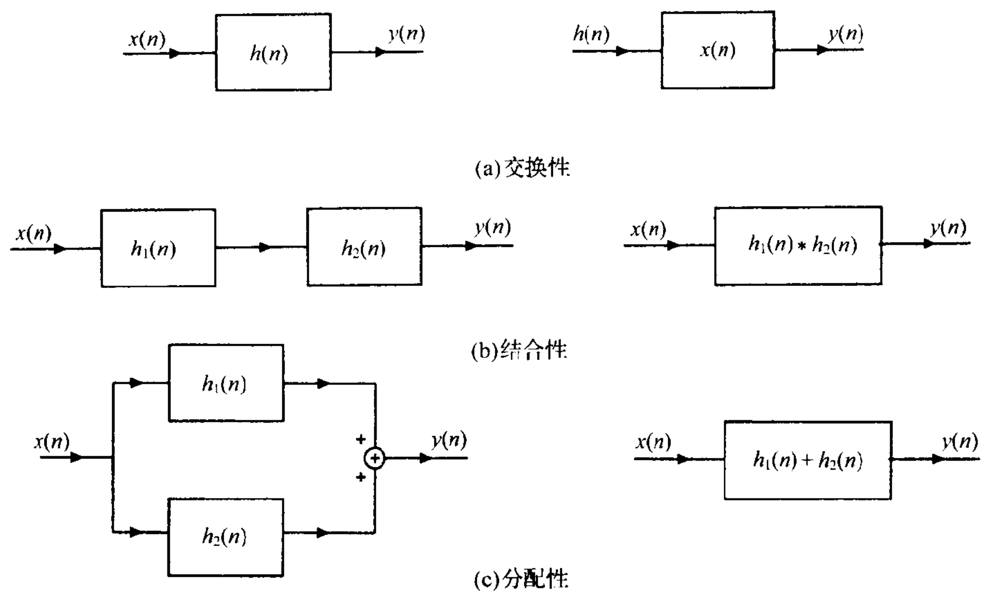
$$x(n)*\{h_1(n)+h_2(n)\}=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

从系统的观点来看，这个性质表明如果两个具有单位采样响应 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 的系统并联，如图 1-5 所示，则存在一个这样的等效系统，即它有一个与 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 之和相等的单位采样响应：

$$h_{eq}(n)=h_1(n)+h_2(n)$$

### 1.4.2　求卷积

我们已经考虑了卷积算子的几个性质，现在考虑求卷积的方法。有几种不同的方法可以用来求卷积，哪一种最简便将取决于待卷积序列的形式和类型。




(a)交换性

(b)结合性

(c)分配性

图 1-5　用系统的观点解释卷积性质

**直接计算法**

当被卷积的序列可以用简单的闭合形式数学式表示时，常常可以很容易地通过直接计算式(1.7)中给出的和求卷积。在直接求卷积时，通常必须计算有限个或无限个和，其中包括形式如 $\alpha^n$ 或 $n\alpha^n$ 的项。表 1-1 中列出的是一些较常见的级数闭合形式的表达式。

**例 1.4.1**　求信号

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

与

$$h(n) = u(n)$$

的卷积。

**表 1-1　一些常见级数的闭合表达式**

| | |
|---|---|
| $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \lvert a \rvert < 1$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \lvert a \rvert < 1$ |
| $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$ | $\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$ |

**解**　用卷积和的直接法得

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(n-k)$$

因为对于 $k<0$，$u(k)$ 等于零；对于 $k>n$，$u(n-k)$ 等于零。当 $n<0$ 时，和中无非零项，于是 $y(n)=0$。另一方面，如果 $n \geqslant 0$，有

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

所以

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

**图解法**

除了直接法外，可以用图解法求卷积。使用图解法涉及的步骤如下：