XIANXINDAISHU

线性代数

叶家琛　黄临文　范麟馨　许新福　编

同济大学出版社

线 性 代 数

叶家琛 黄临文 范麟馨 许新福 编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/叶家琛等编著．—上海：同济大学出版社，2000.8

ISBN 7-5608-2158-8

Ⅰ．线…　Ⅱ．叶…　Ⅲ．线性代数　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 24913 号

线性代数

叶家琛　黄临文　范麟馨　许新福　编

责任编辑　吴凤萍　责任校对　谢卫奋　装帧设计　潘向蓁

出版发行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)
经销	全国各地新华书店
印刷	江苏大丰市印刷二厂印刷
开本	850mm × 1168mm　1/32
印张	9.125
字数	264600
版次	2000 年 8 月第 1 版　2001 年 3 月第 2 次印刷
书号	ISBN 7-5608-2158-8/O·147
定价	12.90 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换

前　言

长期以来,我们因为没有一本专门为周学时3的《线性代数》课程编写的教材,给相应的教学工作带来了诸多不便。现在,开设周学时3的《线性代数》课程的专业越来越多,编写一本合适教材的任务就摆到了议事日程。根据有关的《线性代数》教学大纲的要求,结合多年来的教学实践,在应用数学系的领导和同事们的热情支持下,我们在1997年暑假,编写了这本教材的第一稿。经过一年的教学实践,我们又作了进一步的修订,编印了这本教材的第二稿。现在经过我们又一次的修改补充,这份教材终于与大家见面了。限于我们的水平,错误不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

本书强调了用列向量的形式来表示向量,突出了矩阵的作用,尤其把矩阵的行初等变换放在十分重要的地位。这样做,对工科各专业学生掌握线性代数的基本方法去解决一系列基本问题,例如求矩阵的逆、确定矩阵的秩和解线性方程组等等,都有好处。我们也十分注意线性代数这门课程深刻的几何背景,对向量的线性相关性、线性空间和线性变换都用较多的篇幅加以介绍,并且把解析几何的基本内容:直角坐标系,向量的内积、外积和混合积,平面与直线,二次曲面及其分类等,使用线性代数的语言加以介绍。这样的处理方法将有利于把代数和几何有机地结合起来。

章亮教授仔细地校阅了本书的初稿,提出了许多宝贵的修改意见,谨表示衷心的感谢。没有同济大学教务处和应用教学系的支持,这本教材的出版是根本不可能的,对此,也谨表示我们衷心的谢意。

本书由范麟馨编写0~7节的初稿,黄临文编写8~10和13~

18 节的初稿，许新福编写 19～21 节的初稿，叶家琛编写 11～12 和 22～25 节的初稿。最后由叶家琛在技术上作了统一处理。

编者

1999 年 12 月

目　录

§0 预备知识

一、集合

定义 0.1 若干个(有限或无限)确定事物的总体称为**集合**,简称为**集**.构成集合的每一事物称为集合的**元素**.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合,而用小写字母 $a,b,c,\cdots$表示集合中的元素.若 a 是集合 A 的元素,则记为 $a\in A$,若 a 不是集合 A 中的元素,则记为 $a\notin A$.

按集合中所含元素的个数为有限或无限,集合可分为**有限集**和**无限集**两大类.表示集合的方式有两种,一种叫**列举法**,即列举出这个集合的全部元素,这种方式适用于表示有限集,另一种叫**描述法**,即写出这个集合的元素所具有的特征性质,这种方法既可以用来表示有限集,也可以用来表示无限集.

例 1 $A=\{2,3\}$表示一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的集合,用的是列举法. $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 是用描述法表示平面直角坐标系里单位圆上全体点的集合.

定义 0.2 不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$.

例 2 $A=\{x\mid x^2+x+1=0,x\in \boldsymbol{R}\}$ 就是空集$\varnothing$.

设 A,B 是两个集合,如果 A 的每个元素皆为 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$(或者 $B\supseteq A$),集合 A 总是它自身的子集.如果 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 为 B 的真子集,记为 $A\subset B$.

我们约定:空集是任何集合的子集.

定义 0.3 如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么称 A,B 两集合相等,记为 $A=B$.

经常用到的数集有:

自然数集: $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

整数集: $\boldsymbol{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\}$

有理数集: $\boldsymbol{Q}=\{\frac{q}{p} \mid p \neq 0,p,q \in \boldsymbol{Z}\}$

实数集: $\boldsymbol{R}$

复数集: $\boldsymbol{C}=\{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{R}\}$

显然 $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$.

设 A,B 是两个集合,由集合 A 与 B 的公共元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的**交**,记为 $A\cap B$.由 A 的一切元素与 B 的一切元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的**并**,记为 $A\cup B$.即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

显然有

$$A\cap B\subseteq A,\qquad A\cap B\subseteq B$$

$$A\cup B\supseteq A,\qquad A\cup B\supseteq B$$

关于集合的这两种运算,我们有分配律:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{0-1}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \tag{0-2}$$

证明:我们只证明(0-1).设 $x\in A\cap(B\cup C)$,则 $x\in B\cup C$ 且 $x\in A$,即 $x\in A$ 且 x 至少属于 B 与 C 中的一个.若 $x\in B$,则由 $x\in A$,可得 $x\in A\cap B$.同样,若 $x\in C$,可得 $x\in A\cap C$.不论何种情形,皆有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,即有

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

反之,若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$,由于 $B\subset B\cup C$, $C\subset B\cup C$,不论何种情形,皆有 $x\in A\cap(B\cup C)$,即有

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

因此(0-1)成立.(0-2)的证明留作习题.

两个集合的交与并的概念可以推广到任意 n 个集合上去.

定义 0.4 设 A,B 是两个集合,称

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

为 A 与 B 的**积**.

由定义可知,$A\times B$ 是由元素对(a,b)组成的集合,其中第一个位置的元素 a 取自 A,第二个位置的元素 b 取自 B.例如取定一个坐标系后,平面上的点的坐标是一对实数(a,b),平面上所有点的坐标的集合就是 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的积,即

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$$

二、映射

定义 0.5 设 A,B 是两个非空集合,A 到 B 的一个**映射**指的是一个对应法则,通过这个法则,对于集合 A 中的每个元素 a,有集合 B 中一个唯一确定的元素 b 与之对应.

A 到 B 的映射,通常用 $f,g,\sigma,\cdots$表示,例如,

$$f:A\to B$$

如果在映射 f 下,A 中元素 a 对应 B 中元素 b,则记为

$$f:a\mapsto b\quad 或\quad b=f(a)$$

这时,b 叫做 a 在映射 f 之下的**象**,a 叫做 b 在 f 下的一个**原象**.

例 3 $\sigma:n\mapsto 2n,\ n\in\mathbf{Z}$,这是整数集 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 4 定义 $\sigma_1:a+bi\mapsto b,\ a,b\in\mathbf{R}$,这是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射.

例 5 定义 $f(n)=n-1$ 即

$$f:n\mapsto n-1,\ n\in\mathbf{N}$$

则 f 并不是自然数集 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一个映射.因为 $f(1)=1-1=0\notin\mathbf{N}$,但 f 可以看作是自然数集 $\mathbf{N}$ 到整数集 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 6 设 M 是一个集合.定义 $\sigma(a)=a,a\in M$,这是 M 到 M 的一个映射,它把 M 的每个元素映射到它自身,称 σ 为集合 M 的**恒等映射**,或**单位映射**.通常记为 1_M.

映射概念是函数概念的推广,映射就是定义在集合 A 上、取

值在集合 B 内的函数.关于映射概念,应注意如下几点:

(1) A 与 B 可以是同一集合,也可以是不同集合;

(2)对于 A 的每一个元素,必有 B 中一个唯一确定的元素与它对应;

(3)一般说来,B 的元素不一定都是 A 中元素的象;

(4) A 中不同元素的象可能相同.

三、代数运算

定义 0.6 设 A,B,D 是三个集合,从积集合 $A\times B$ 到 D 的一个映射 ϕ 叫做 $A\times B$ 到 D 的一个**代数运算**.设 $a\in A,b\in B,d$ 是元素对 (a,b) 在映射 ϕ 下的象,我们记作

$$a\phi b=d,\qquad d\in D$$

例 7 整数对 (a,b) 有唯一确定的整数 $a+b$ 与之对应.从映射的观点看,整数的加法实际上是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个代数运算.在这个映射下,$(a,b)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的象是 a 与 b 的和 $a+b$.

例 8 实数的乘法也是一个代数运算:

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},(a,b)\mapsto ab.$$

例 9 空间向量的内积也是一个代数运算:

$$\boldsymbol{R}^3\times\boldsymbol{R}^3\mapsto\boldsymbol{R},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\mapsto a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

这里

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3,\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$$

例 10 设 $A=\{1,2\}$,$D=\{$奇,偶$\}$,现定义映射 ϕ:

$$(1,1)\mapsto\text{偶},\qquad(1,2)\mapsto\text{奇},$$
$$(2,1)\mapsto\text{奇},\qquad(2,2)\mapsto\text{偶}.$$

$\phi:A\times A\to D$ 就是一个代数运算.

例 11 因为除数不能为零,实数的除法不能看作是 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to$

$\boldsymbol{R}$ 的代数运算,但可以看作是代数运算:

$$\boldsymbol{R}\times\{\boldsymbol{R}\setminus\{0\}\}\to\boldsymbol{R}$$

当 A 和 B 都是有限集时,代数运算 $A\times B\to D$ 可以用运算表来表示.设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,而 $a_i\phi b_j=d_{ij}\in D$,$1\leqslant i\leqslant m$,$1\leqslant j\leqslant n$,这个代数运算可写成

ϕ	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	d_{11}	d_{12}	$\cdots$	d_{1n}
a_2	d_{21}	d_{22}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	d_{m1}	d_{m2}	$\cdots$	d_{mn}

定义 0.7 如果 ϕ 是 $A\times A\to A$ 的代数运算,那么,称 A 关于代数运算 ϕ 是封闭的,或称 A 有代数运算 ϕ.

例如,$\boldsymbol{N}$ 对于数的加法和乘法是封闭的,但对于减法不封闭.$\boldsymbol{Z}$ 对于数的加法、减法和乘法是封闭的,但对于除法不封闭.由于除数不能为零,$\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{C}$ 对于数的除法也是不封闭的.当然,他们分别对于数的加法、减法和乘法封闭.

更一般地,若 ϕ 是 $A\times B\to A$ 或 $B\times A\to A$ 的代数运算,也称 A 关于代数运算 ϕ 封闭.例如,全部实系数多项式 $f(x)$ 所成的集合 $\boldsymbol{R}[x]$ 对于实数与实系数多项式的乘法

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}[x]\to\boldsymbol{R}[x]$$

是封闭的.这样推广以后,我们也可以把有理数域 $\boldsymbol{Q}$,实数域 $\boldsymbol{R}$ 和复数域 $\boldsymbol{C}$ 对于数的除法看成是封闭的.

四、数域

定义 0.8 如果复数域的子集 $\boldsymbol{F}$ 含有数 1 和 0,且对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)四则运算封闭,那么称 $\boldsymbol{F}$ 为一个**数域**.

由定义可知,$\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{C}$ 都是数域,而 $\boldsymbol{Z}$,$\boldsymbol{N}$ 不是数域.

例 12 令 $P=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$,则 P 是一个数域.

证明 P 中含有数 1 和 0,是复数域 C 的一个子集,P 对于加、减法运算封闭也是明显的,再验证 P 对乘、除法也封闭.

乘法:$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in P$

除法:设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$, 即有 $a-b\sqrt{2}\neq 0$,从而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$
$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in P$$

因此,P 是数域.

定理 0.1 任何数域都包含有理数域,即 Q 是最小的数域.

证明 设 P 是一个数域,由于 P 中含有 1 且对加法封闭,因此 P 包含有全体自然数,又因 P 中含有 0,由 P 对减法封闭,故 $0-n=-n$ 也都在 P 中,即 P 包含有全体整数,再由任何一个有理数皆可表达成两个整数的商以及 P 对除法封闭,即可知 $P\supseteq Q$.

注意,包含有理数域的集合不一定是数域.例如 $A=\{$全体有理数以及$\sqrt{2}\}\supset Q$,但 A 不是数域.

今后,我们总是用 F 来表示一个数域.

习　　题

1. 证明:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
2. 设 $M\subset N$,证明:$M\cap N=M$,$M\cup N=N$.
3. 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{0,2,4\}$,定义

$$f:\ a\mapsto 0,\ b\mapsto 2,\ c\mapsto 2$$

f 是不是 A 到 B 的一个映射? 为什么?

4. 在 R 上定义

$$\sigma(a) = \begin{cases} a & a \neq 1 \\ b & a = 1 \end{cases}$$

这里 $b^2 = 1$，σ 是不是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射？为什么？

5. 设 $A = B = \mathbf{Z}$，$D = \{0,1\}$，定义

$$a\phi b = \begin{cases} 0 & \text{若 } a + b \text{ 是偶数} \\ 1 & \text{若 } a + b \text{ 是奇数} \end{cases}$$

ϕ 是不是 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 到 D 的一个代数运算？为什么？

§1 矩阵及其运算

一、基本概念

定义 1.1 数域 F 上的 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列的矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

称为 F 上的一个 $m\times n$ **矩阵**，其中 a_{ij} 称为 A 的第 i 行、第 j 列的元素．通常用大写字母 A,B,C 或者 $(a_{ij}),(b_{ij})$ 来表示矩阵，为了强调矩阵的“型”，也常表示为 $A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$．

当 $m=1$ 时，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称为 n **维行向量**．

当 $n=1$ 时，$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$，称为 m 维**列向量**，简称为 m 维向量．

当 $m=n$ 时，A 称为 n 阶矩阵，这时，从左上角到右下角的连线称为主对角线，主对角线上的元素全是 1，而其余元素全是 0 的 n 阶矩阵，称为 n **阶单位阵**，记为 E_n，或简单地记为 E，即

$$E=E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

二、矩阵的代数运算

定义 1.2 两个矩阵 A 和 B,如果它们的行数一样,列数也一样,且所有对应位置上的元素也相等,则称矩阵 A 和 B 相等,记为 $A=B$.

定义 1.3 设 $M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$表示数域 $\boldsymbol{F}$ 上的所有 $m\times n$ 矩阵的集合,又设 $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$,$B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$,称 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$为矩阵 A 与 B 的**和**.

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&0&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\4&5&2\end{pmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix}1+(-1)&3+0&2+1\\-1+4&0+5&4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\3&5&6\end{pmatrix}$$

定义 1.4 元素全为 0 的 $m\times n$ 矩阵称为**零矩阵**,记为 $\mathbf{0}_{m\times n}$,或简记为 $\mathbf{0}$.

定义 1.5 设$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$,则

$$-A=(-a_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$$

称为 A 的**负矩阵**.

定义 1.6 两个矩阵的减法可定义为 $A-B=A+(-B)$.

矩阵加法是 $M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$的一个代数运算,它具有下列基本性质:

(1) $A+B=B+A$,

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$,

(3) $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$,

(4) $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{0}$.

定义 1.7 设 $\lambda\in\boldsymbol{F}$,$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$,称 $\lambda A=(\lambda a_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$是数 λ 与矩阵 A 的数量乘积,由此定义可知$(-1)A=$

$-A$.

例2 设 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}$,则矩阵 A 与数3的乘积为

$$3A=\begin{pmatrix}3\times2&3\times(-3)\\3\times(-1)&3\times0\\3\times0&3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-9\\-3&0\\0&3\end{pmatrix}$$

矩阵的数量乘法是一个代数运算:

$$\boldsymbol{F}\times M_{m\times n}(\boldsymbol{F})\to M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$$

由定义容易验证,它具有下列基本性质:

(1) $1A=A$,

(2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

(3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,

(4) $\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)=\lambda\mu A$.

定义1.8 设 $A=(a_{ij})\in M_{m\times p}(\boldsymbol{F})$是 $m\times p$ 矩阵,$B=(b_{ij})\in M_{p\times n}(\boldsymbol{F})$是 $p\times n$ 矩阵,则 A 与 B 可以相乘,称 $C=AB$ 为两个矩阵 A 与 B 的积,这里,$C=(c_{ij})\in M_{m\times n}(\boldsymbol{F})$是 $m\times n$ 矩阵,其中第 i 行第 j 列的元素

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}\in\boldsymbol{F}$$

它是左矩阵 A 的第 i 行上的每个元素与右矩阵 B 的第 j 列上对应元素乘积的和.

由矩阵乘法的定义可知:只有当左矩阵 A 的列数等于右矩阵 B 的行数时,两矩阵 A 和 B 才能相乘,且乘积矩阵 $C=AB$ 的行数等于 A 的行数,列数等于 B 的列数,乘积矩阵第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和 .容易验证:

$$A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$$

$$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$$