金牌奥校

数学奥林匹克题典

高中

SHUXUEAOLINPIKETIDIAN

无 边 主编

中国少年儿童出版社

金牌奥校

无 边主编

数学奥林匹克 高中 题典

SHUXUEAOLINPIKETIDIAN

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克题典．高中/《金牌奥校》编写组编．-北京：中国少年儿童出版社，2000.12

（金牌奥校）

ISBN 7-5007-5523-6

Ⅰ．数… Ⅱ．金… Ⅲ．数学课-高中-习题 Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 78954 号

数学奥林匹克题典·高中

作者：无边

中国少年儿童出版社 出版发行

责任编辑：惠 玮 余俊雄

美术编辑：徐 欣

社址：北京东四十二条 21 号

邮政编码：100708

印刷：北京兴华印刷厂

经销：新华书店

850×1168 1/32 10.75 印张 255 千字

2001 年 1 月北京第 1 版 2001 年 1 月北京第 1 次印刷

印数：1—20000 册

ISBN7-5007-5523-6/G·4315

（全三册）总定价：38.40 元 本册定价：12.80 元

编写说明

推进素质教育，培养创新能力，是当前我国教育改革的一个重大方向，并受到教育界的普遍重视和社会的广泛关注。多年的学科竞赛实践表明，合理地开展学科竞赛活动，是促进学校教育改革，提高学生学科素质的积极因素。

为了配合素质教育改革的形势需要，进一步推动学科竞赛活动的开展，我们依据统编教材，并按照我国学科竞赛大纲的规定，编写了这套《金牌奥校》丛书。希望能对中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力有所帮助，从而促进从知识型向能力型的转变。同时也希望能为广大同行在对学生实施素质教育的过程中提供一些参考。

《金牌奥校》丛书是数学、物理、化学等专业学会专家学者及奥校教练员、部分省市教研员，在认真分析了中学生应具备的各学科基础知识和基本技能的前提下，结合奥校智能训练实际情况编写而成的，本丛书有以下二个特色：

一、面向全体中学生

本丛书覆盖了中学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想。取材源于统编教材，但又不局限于课本，坚持“强化基础，适当提高，突出重点”的原则，对课本内容作了必要概括、合理变通和适应拓广。因此该套丛书可作为中高考复习资料。

二、照顾有兴趣特长的中学生

本套丛书设立了专题研究，对竞赛中的常见方法在理论和实践的基础上作了综合性研究，可培养深广的学科思维能力、学科思想方法和学科应用意识。因此本套丛书又可作为竞赛学习、培训的资料和教材。

本套丛书按年级和学科编写，并包括以下几个部分：奥林匹克教程、奥林匹克集训题精编、奥林匹克题典、奥林匹克模拟试卷。内容由易到难，由简入繁，讲练结合，编排科学合理。

本丛书是在统一规划下，根据详细的计划界定而由全体编委分工编写的。它是教学和科研的成果，是集体智慧的结晶。在编写和统稿的过程中，我们虽然注意博采众长，并力求有自己的风格，但由于水平有限，缺点和错误难免，诚恳地希望读者能提供宝贵意见和建议。

编　者

目　　录

第一章 集 合

选择题

1.已知 I 为全集,集合 M、$N\subset I$,若 $M\cup N=N$,则(　　)

(A)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$.　　(B)$M\subseteq\overline{N}$.

(C)$\overline{M}\subseteq\overline{N}$.　　(D)$M\supseteq\overline{N}$.

答案 (A)

解:用文氏图求解.

如图1-1,由 $M\cup N=N$,则 $M\subseteq N$,故 $\overline{M}\supseteq\overline{N}$,选(A).

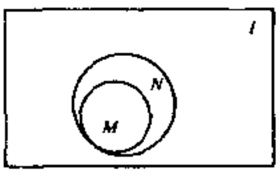

图 1-1

2.若集合 $M=\{x\mid |x-1|\leqslant 2\}$,$N=\{x\mid x^2+7x+12\geqslant 0\}$,则 M 与 N 的关系式是(　　)

(A)$M\supset N$.　　(B)$M\subset N$.

(C)$M=N$.　　(D)$M\cap N=\varnothing$.

答案 (B)

解:$M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,由 $x^2+7x+12\geqslant 0$,有 $(x+3)(x+4)\geqslant 0$,则 $N=\{x\mid x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant -3\}$,故 $M\subset N$,选(B)

3.从复数子集$\{x+yi \mid 1\leqslant x<y\leqslant 4, x,y\in N\}$中任取两个不同的元素作减法,可得(　　)个不同的差.

(A)30.　　(B)24.　　(C)18.　　(D)9.

答案　(C)

解:由已知,x 可取 1,2,3,y 可取 2,3,4.共得六个复数,$A_1(1,2)$,$A_2(1,3)$,$A_3(1,4)$,$A_4(2,3)$,$A_5(2,4)$,$A_6(3,4)$.如图1-2,可表示为三角形格点.

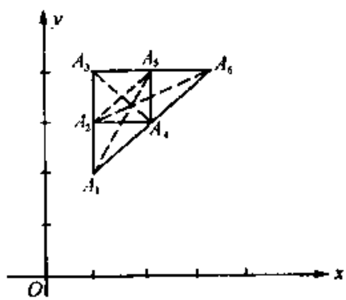

图 1-2

过每两点连一条线,把平移能重合的线段只计算一次,共得九条线段,对应 18 条有向线段.故可得 18 个不同的差,选(C).

4.已知集合 $A=\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x \mid a+1\leqslant x\leqslant 4a+1\}$,且 $A\cap B=B$,$B\neq\varnothing$,则实数 a 的取值范围是(　　)

(A)$a\leqslant 1$.　　(B)$0\leqslant a\leqslant 1$.

(C)$a\leqslant 0$.　　(D)$-4\leqslant a\leqslant 1$.

答案　(B)

解:由 $A\cap B=B$,得 $B\subseteq A$

即$\begin{cases}-3\leqslant a+1<5,\\-3<4a+1\leqslant 5,\end{cases}$解得 $-1<a\leqslant 1$.

又 $B\neq 0$,则 $a+1\leqslant 4a+1$,即 $a\geqslant 0$.

$\therefore 0\leqslant a\leqslant 1$,选(B).

5.已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3>0\}$, $B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$,若 $A\cup B=R$, $A\cap B=\{3<x\leqslant 4\}$,则 $a+b$ 的值为(　　)

(A) -3.　　(B) 7.　　(C) -7.　　(D) 3.

答案 (C)

解:由 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>3\}$, $A\cap B=\{x\mid 3<x\leqslant 4\}$,则 B 集合含有 $x\leqslant 4$,又 $A\cup B=R$,故 $-1\leqslant x\leqslant 4$, $\therefore a+b=-7$,选(C).

6.设 $M=\{(x,y)\mid |xy|=1, x>0\}$,
$N=\{(x,y)\mid \mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}y=\pi\}$.那么(　　)

(A) $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1\}$.

(B) $M\cup N=M$.

(C) $M\cup N=N$.

(D) $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1$ 且 x,y 不同时为负数$\}$.

答案 (B)

解:集合 M 中 $|xy|=1$,相当于 $xy=1$ 或 $xy=-1$,但 $x>0$,则代表反比例函数在Ⅰ、Ⅳ象限的两支.

集合 N 中, $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}y=\pi$,

即 $x=\mathrm{tg}(\pi-\mathrm{arcctg}y)$,

$$=-\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}y)=-\frac{1}{\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}y)},$$

$$=-\frac{1}{y}.$$

则 $xy=-1$ 它是在Ⅱ、Ⅳ象限的反比例函数图像.

$\because -\frac{\pi}{2}<\mathrm{arcctg}x<\frac{\pi}{2}$, $0<\mathrm{arcctg}y<\pi$.

如果 $x<0$, $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arcctg}x<0$,

$y>0, 0<\operatorname{arcctg}x<\dfrac{\pi}{2}$，这时

$-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y<\dfrac{\pi}{2}$ 与题设

$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi$ 矛盾.

$\therefore$ $x \not< 0$，则 $N=\{(x,y) \mid \operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi, x>0\}$ 为反比例函数在第四象限的一支.

可知 $M \supset N, M \cup N=M$，选(B).

7.平面上有三个点集合 M,N,P.

$M=\{(x,y) \mid |x|+|y|<1\}$，

$$N=\left\{(x,y) \middle| \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{2}\right\},$$

$P=\{(x,y) \mid |x+y|<1, |x|<1, |y|<1\}$. 则(　　)

(A) $M \subset P \subset N$.　　(B) $M \subset N \subset P$.

(C) $P \subset N \subset M$.　　(D)(A)、(B)、(C)都不成立.

答案 (A)

解：如图1－3，M 是正方形 $ABCD$ 的内部；P 是六边形 $ABECDF$ 的内部；据椭圆定义，N 是焦点为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，中心为原点 O，长轴在 $y=-x$ 的直线上，长轴长为 $2\sqrt{2}$ 的内部.

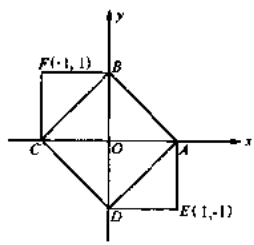

图 1－3

又易证 A、B、C、D 四点都在椭圆内. 故选(A).

8.集合 $M=\{u \mid u=12m+8n+4l$，其中 m、n、$l \in Z\}$，$N=\{u \mid u$

$=20p+16q+12r$，其中 $p、q、r\in Z\}$ 的关系为（　　）

(A) $M=N$.　　(B) $M\not\subseteq N, N\not\subseteq M$.

(C) $M\supset N$.　　(D) $M\subset N$.

答案　(A)

解：对 N 中任何元素 u，$u=12r+8(2q)+4(5p)\in M$，则 $N\subseteq M$.

又对 M 中任何元素 u，

$u=12m+8n+4l$，

$=20n+16l+12(m-n-l)\in N$.

则 $N\subseteq N$，$\therefore M=N$，选(A).

9.已知 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，$b\in B$，那么

(1)存在 $a\in A$，$b、c\in B$，且 $b\neq c$，使得 $f(a)=b$，又 $f(a)=c$；

(2)存在 $a\in A$，使 $f(a)\notin B$；

(3)有且仅有 $a\in A$，使 $f(a)=b$；

(4)至少有一个 $a\in A$，使 $f(a)=b$.

以上命题中错误的个数有（　　）

(A)1个.　　(B)2个.　　(C)3个.　　(D)4个.

答案　(D)

解：由映射的定义逐个判断：

(1)不符合定义中 a 的象是唯一的.

(2)象的集合 $\{f(a)\}\subseteq B$.

(3)不符合 A 集合中任何一个元素均满足 $f(a)=b$.

(4)集合 A 中的每一个元素，在 f 映射下在 B 集合里有确定的象.

故选(D).

10.在坐标平面上，纵坐标都是整数的点叫整数点，我们用 I 表示所有直线的集合. M 表示恰好通过一个整点的直线集合，N 表

示不通过任何整点的集合，P 表示通过无穷多个整点的直线集合，那么表达式：(1) $M\cup N\cup P=I$，(2) $M\neq\varnothing$，(3) $N\neq\varnothing$，(4) $P\neq\varnothing$中正确的个数是(　　)

(A)1.　　　(B)2.　　　(C)3.　　　(D)4.

答案　(D)

解：恰好通过一个整数点，如(0,0)的直线 $y=kx$ 有无穷多个．∴表达式(2)正确．

不通过任何整数点的直线，如 $y=\frac{1}{2}$，∴表达式(3)正确．

通过多个整数点的直线，如 $y=x$，∴表达式(4)正确．

下面证明若直线 $ax+by+c=0$ 通过两个整数点，(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则通过无穷多个整数点．

$$\because a[x_1+k(x_2-x_1)]+b[y_1+k(y_2-y_1)]+c,$$
$$=ax_1+by_1+c+k(ax_2+by_2+c)-k(ax_1+by_1+c),$$
$$=0,$$

$\therefore [x_1+k(x_2-x_1),y_1+k(y_2-y_1)]$ $(k\in Z)$ 在直线 $ax+by+c=0$ 上．

∴表达式(1)正确，即四个表达式都正确．故选(D)．

填空题

1.设集合 $A=\{点\ P\mid P\in 直线\ a\}$，$B=\{点\ Q\mid Q\in 直线\ b\}$，$C=\{点\ G\mid G\in 平面\ \alpha\}$，$A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=a$，$B\cap C=b$．则 a 与 b 的位置关系是______．

答案　a 与 b 平行

解：由已知，有 $A\cap C=A$，则直线 $a\in$ 平面 α，$B\cap C=B$，则直线 $b\in$ 平面 α．

即直线 a 与直线 b 共面，且 $A\cap B=\varnothing$．

$\therefore a/\!/b$，即 a 与 b 的位置关系平行．

2.已知集合 $N=\{x\mid a+1\leqslant x<2a-1\}$,是集合 $M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$的子集,则 a 的取值为______.

答案 $a\leqslant 3$

解:$N\subseteq M$ 有两种情况:

(1)$N=\varnothing$,则 $a+1\geqslant 2a-1$,$\therefore a\leqslant 2$;

(2)$N\neq\varnothing$,则 $\begin{cases}a+1\geqslant -2,\\2a-1\leqslant 5,\\a+1<2a-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\geqslant -3,\\a\leqslant 3,\\a>2.\end{cases}$

解得 $2<a\leqslant 3$.

由(1)、(2)得 $a\leqslant 3$.

3.若 I 是全集,P、Q 是非空集合,又 $P\supset Q$.则$(P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup Q)$ =______.

答案 Q

解:$\because P\supset Q$,$\therefore P\cup Q=P$.

$\therefore(P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup Q)=P\cap(\overline{P}\cup Q)=\varnothing\cup Q=Q$.

4.设集合 $A=\{1,3,x\}$,集合 $B=\{1,x^2\}$,且 $A\cup B=A$.则实数 x 的值为______.

答案 $\pm\sqrt{3}$或 0

解:由已知,$A\cup B=A$,$\therefore B\subseteq A$.

即 $x^2=3$,$x=\pm\sqrt{3}$;

或 $x=x^2$,$x=0$ 或 $x=1$(重复元素,舍去).

$\therefore x$ 的值为 $\pm\sqrt{3}$或 0

5.$I=\{1,2,3,4\}$,$A\subseteq I$,$B\subseteq I$.已知$\overline{A}\cap B=\{1\}$,$A\cap B=\{3\}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2\}$.则 $A=$______,B ______.

答案 $A=\{3,4\}$,$B=\{1,3\}$

解:由已知,(1)$\overline{A}\cap B=\{1\}$,则 $1\overline{\in}A$,$1\in B$.

(2)$A\cap B=\{3\}$,则 $3\in A$ 且 $3\in B$;

(3)$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2\}$,则 $2\overline{\in}A$ 且 $2\overline{\in}B$.

而元素4有以下四种情况:

(Ⅰ)$4\in A,4\in B$,不满足 $A\cap B=\{3\}$.

(Ⅱ)$4\in A,4\overline{\in}B$.

(Ⅲ)$4\overline{\in}A,4\in B$,不满足$\overline{A}\cap B=\{1\}$.

(Ⅳ)$4\overline{\in}A,4\overline{\in}B$,不满足$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2\}$.

由此,$4\in A,4\overline{\in}B$.

$\therefore A=\{3,4\},B=\{1,3\}$.

6.若 $M=\{(x,y)\mid|\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,则 $M\cap N$ 的元素个数是______.

答案 9

解:由 M 知,$\mathrm{tg}\pi y=0$,得 $y=k(k\in Z)$,

$\sin\pi x=0$,得 $x=k'(k'\in Z)$.

又 $x^2+y^2\leqslant 2$,

$\therefore k=-1,0,1,k'=-1,0,1$.

故 $M\cap N$ 中共有9个元素.

7.满足条件$\{1,2,3\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$的集合 A 有____个.

答集 64

解:由题意,A 中必有1,2,3这三个元素,在4~9这6个元素中分别选取0~6个元素组成 A.故 A 的个数为

$C_6^0+C_6^1+\cdots+C_6^6=64$ 个.

8.设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$,$M=\{(x,y)\mid\frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$.则$\overline{M\cup N}=$____.

答案 $\{(2,3)\}$

解:由 $M=\{(x,y)\mid y=x+1(x\neq 2)\}$,知$\{(2,3)\}\subseteq\overline{M}$.

又$\overline{N}=\{(x,y)\mid y=x+1\}$,

$\therefore \overline{M\cup N}=\overline{M}\cap\overline{N}=\{(2,3)\}$.

9.将正奇数集合$\{1,3,5,\cdots\}$由小到大按第 n 组有$(2n-1)$个奇数进行分组:

$\{1\}$, $\{3,5,7\}$, $\{9,11,13,15,17\}$,

第一组 第二组 第三组

则 1991 位于第_____组.

答案 32

解:前 n 组的元素个数共有

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 个

则第 n 组最后一个元素为第 n^2 个奇数 $2n^2-1$,于是有不等式

$2(n-1)^2+1\leqslant 1991<2n^2-1$,

则$(n-1)^2\leqslant 995$, $n^2>996$,

$\therefore n^2\geqslant 32$,即 1991 位于第 32 组.

10.已知点集 $A=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant(\frac{5}{2})^2\}$, $B=\{(x,y)\mid(x-4)^2+(y-5)^2>(\frac{5}{2})^2\}$,则点集 $A\cap B$ 中的整数点(即纵、横坐标均为整数的点)的个数____.

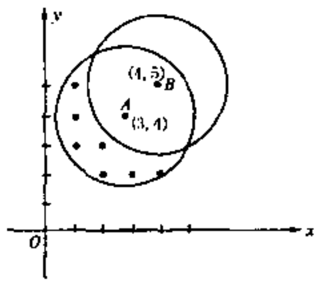

图 1-4

答案 7

解:如图1-4, A 是以$(3,4)$点为圆心,半径为$\frac{5}{2}$的圆周及内部.

B 是以$(4,5)$点为圆心,半径为$\frac{5}{2}$的圆外部. $A\cap B$ 即靠近原点O 的月牙形 T 中, T 中横坐标整点可以是:1,2,3,4, T 中纵坐

标整点可以是:2,3,4,5.

因此 $A\cap B$ 的整点为(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),共7个.

11.从集合 $A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ 中任选3个无重复数字作为一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数,可以构成______个不同的二次函数.其中图像顶点在 y 轴上,且开口向下的有______个.

答案 900,45

解:因为 $a\neq0$,则 a 有 C_{10}^1 种选法. b,c 有 P_{10}^2 种选法.则共有 $C_{10}^1\cdot P_{10}^2=900$ 个不同的二次函数.

又据顶点在 y 轴且开口向下,则 $a<0$,且 $b=0$,则 a 有 C_5^1 种选法,c 有 C_9^1 种选法.于是有 $C_5^1\cdot C_9^1=45$ 个满足条件的二次函数.

12.设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件:当 $x\in A$ 时,$15x\in A$.则 A 中元素的个数最多是______.

答案 1870

解:用 $n(A)$ 表示 A 所含的元素个数.

由已知,k 与 $15k(k=9,10,\cdots,133)$ 这两个数至少有一个不属于 A,所以 M 中至少有 125($125=133-9+1$)个数不属于 A.

$\therefore n(A)\leqslant1995-125=1870$.

又可取 $A=\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$,$A$ 满足题设条件,此时 $n(A)=1870$.

$\therefore n(A)$ 的最大值为 1870.

解答题

1.设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,集合 $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$.

问:(1)集合 A 到集合 B 可建立多少个不同的映射?集合 B 到集合 A 呢?

(2)集合 A 到集合 B 的子集可以建立多少个不同的一一映射?

答案 1296,4096,360

解:(1)由映射的定义,集合 A 中每一个元素可分别对应集合 B 中 6 个元素的任意一个,故可建立 $6^4=1296$ 个映射.

(2)同理,集合 B 到集合 A 可建立 $4^6=4096$ 个映射.

(3)先从 B 中选 4 个元素,共有 C_6^4 种选法,这 4 个元素与 A 中元素可构成 P_4^4 个一一映射,故 A 到 B 的子集可建立 $C_6^4\cdot P_4^4=360$ 个一一映射.

2.设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$,若 Z 是 S_n 的子集,把 Z 中的所有数的和称 Z 的"容量",(规定空集的容量为 0).若 Z 的容量为奇(偶)数,则称 Z 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1)求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等;

(2)求证:当 $n\geqslant3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等;

(3)当 $n\geqslant3$ 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

证明:(1)设 S_n 的奇子集的个数为 a_n,偶子集的个数为 b_n,则

$$a_n+b_n=2^n \text{ 个} \quad ①$$

求 a_n,以 $[x]$ 表示不超过实数 x 的表大整数,设 $k=[\frac{n}{2}]$,$l=n-k$.

从 $\{2,4,6,\cdots,2k\}$ 中任取一个子集(含空集$\varnothing$)x_1,再从 $\{1,3,\cdots,2l-1\}$ 中取一个含奇数个元素的子集 x_2,则 x_1 与 x_2 的并集便是一个奇子集.反之,S_n 的任何一个奇子集可写成 x_1 与 x_2 的并集.

x_1 的取法:$C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^k=2^k$ 种.

x_2 的取法:$C_l^1+C_l^3+\cdots+C_l^{2r-1}$