

高等学校教材

高等数学

下 册

童裕孙 於崇华 金 路 张万国

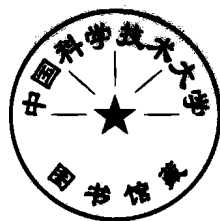
高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

下册

童裕孙 於崇华 金路 张万国



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/童裕孙等. —北京:高等教育出版社,2001

高等院校非数学专业本科生教材

ISBN 7-04-010165-3

I. 高… II. 童… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065439 号

责任编辑	郭思旭	封面设计	刘晓翔	责任绘图	陈钧元
版式设计	马静如	责任校对	李 辉	责任印制	韩 刚

高等数学 下册

童裕孙 於崇华 金路 张万国

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55号 邮政编码 100009

电 话 010-64054588 传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 850×1168 1/32 版 次 2001 年 12 月第 1 版

印 张 16.5 印 次 2001 年 12 月第 1 次印刷

字 数 410 000 定 价 16.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书是教育部“面向 21 世纪理科非数学类专业高等数学课程体系和内容改革”课题的研究成果。其主要特色是对分析、代数、几何、随机数学几部分内容作较为统一的综合处理;在教材的深度和广度上作一定限制,以学生容易接受的自然形式,运用严格的数学语言介绍各部分内容;以现代数学的观点统率经典内容,精心组织并简洁处理相对成熟的材料,以适应多数专业的学时分配;在较为广泛的范围内选择应用性的例题和习题,从中体现数学建模的思想和方法。

本书为下册,内容包括多元函数微分学,多元函数积分学,级数,常微分方程,概率论基础,数理统计初步。上册内容包括极限与连续,微分与导数,一元函数积分学,矩阵和线性方程组,线性空间和线性变换,空间解析几何。

本书可作为高等院校理工科非数学类专业的教材或教学参考书。

目 录

第三篇 多元函数微积分

第七章 多元函数微分学	2
§ 1 多元函数的极限与连续	2
$\mathbf{R}^n$ 中的点集	2
多元函数	4
多元函数的极限	6
多元函数的连续性	8
有界闭区域上连续函数的性质	10
$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的映射(向量值函数)	10
习题	13
§ 2 全微分与偏导数	14
全微分	14
偏导数	16
偏导数与全微分的计算	19
空间曲面的切平面(1)	20
高阶偏导数	22
可微映射	25
空间曲线的切线(1)	28
习题	29
§ 3 链式求导法则	31
多元函数求导的链式法则	31
全微分的形式不变性	36
复合映射的导数	37
坐标变换下的微分表达式	39

习题	43
§ 4 隐函数微分法及其应用	45
一元函数的隐函数存在定理	46
多元函数的隐函数存在定理	47
多元函数组的隐函数存在定理	49
空间曲面的切平面(2)	53
空间曲线的切线(2)	56
习题	59
§ 5 方向导数 梯度	60
方向导数	60
数量场的梯度	63
等值面的法向量	65
势场	66
习题	67
§ 6 Taylor 公式	68
二元函数的 Taylor 公式	68
n 元函数的 Taylor 公式	73
习题	74
§ 7 极值	75
多元函数的无条件极值	75
函数的最值	80
最小二乘法	82
条件极值	89
习题	95
计算实习题	96
第八章 多元函数积分学	98
§ 1 重积分的概念及其性质	98
重积分概念的背景	98
重积分的概念	100
重积分的性质	101
习题	103

§ 2	二重积分的计算	103
	直角坐标系下二重积分的计算	103
	二重积分的变量代换法	108
	极坐标系下二重积分的计算	112
	习题	114
§ 3	三重积分的计算及应用	116
	直角坐标系下三重积分的计算	116
	三重积分的变量代换	120
	柱坐标变换和球坐标变换	120
	重积分的应用:重心与转动惯量	124
	重积分的应用:引力	126
	习题	128
§ 4	两类曲线积分	130
	曲线的弧长	130
	第一类曲线积分的概念及性质	131
	第一类曲线积分的计算	132
	第二类曲线积分的概念及性质	137
	第二类曲线积分的计算	139
	两类曲线积分的关系	141
	习题	142
§ 5	第一类曲面积分	144
	曲面的面积	144
	第一类曲面积分的概念	148
	第一类曲面积分的计算	148
	习题	151
§ 6	第二类曲面积分	152
	曲面的侧与有向曲面	152
	第二类曲面积分的概念及性质	154
	第二类曲面积分的计算	157
	习题	162
§ 7	Green 公式和 Stokes 公式	163

Green 公式	163
Stokes 公式	169
习题	175
§ 8 旋度和无旋场	176
环量和旋度	176
无旋场、保守场和势场	180
原函数	185
习题	188
§ 9 Gauss 公式和散度	189
流场的流出量	189
Gauss 公式	193
散度	198
Hamilton 算符和 Laplace 算符	202
习题	204
第九章 级数	206
§ 1 数项级数	206
级数的概念	206
级数的基本性质	210
级数的 Cauchy 收敛准则	212
正项级数的比较判别法	214
正项级数的 Cauchy 判别法与 d'Alembert 判别法	218
正项级数的积分判别法	221
Leibniz 级数	223
任意项级数的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法*	225
更序级数*	226
级数的乘法	228
习题	231
§ 2 幂级数	233
函数项级数	233
幂级数	235
幂级数的收敛半径	235

幂级数的性质	238
Taylor 级数与余项公式	247
初等函数的 Taylor 展开	250
习题	259
§ 3 Fourier 级数	260
周期为 2π 的函数的 Fourier 展开	261
正弦级数和余弦级数	264
任意周期的函数的 Fourier 展开	268
Fourier 级数的收敛性	269
最佳平方逼近	274
习题	277
§ 4 Fourier 变换初步	279
Fourier 变换和 Fourier 逆变换	279
Fourier 变换的性质	282
离散 Fourier 变换	286
习题	289

第四篇 常微分方程

第十章 常微分方程	292
§ 1 常微分方程的概念	292
习题	295
§ 2 一阶常微分方程	295
变量可分离方程	296
数学建模	298
齐次方程	300
全微分方程	306
线性方程	309
Bernoulli 方程	314
习题	316
§ 3 二阶线性微分方程	319
二阶线性微分方程	319

线性微分方程的解的结构	321
二阶常系数齐次线性微分方程	325
二阶常系数非齐次线性微分方程	329
Euler 方程	338
习题	340
§ 4 可降阶的高阶微分方程	342
方程形式为 $F(x, y^{(n)}) = 0$	343
方程形式为 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	346
方程形式为 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	349
习题	352
§ 5 微分方程的幂级数解法	353
习题	360
§ 6 常系数线性微分方程组简介	360
习题	365

第五篇 概率论与数理统计

第十一章 概率论	368
§ 1 概率	368
随机事件	368
概率的概念	371
古典概型的例	374
几何概率的例	377
习题	378
§ 2 条件概率 全概率公式 Bayes 公式	380
条件概率 乘法公式	380
全概率公式	382
Bayes 公式	384
事件的独立性	387
重复独立试验	389
习题	390
§ 3 一维随机变量	392

随机变量的概念	392
离散型随机变量的分布	393
连续型随机变量	397
习题	403
§ 4 二维随机变量	405
二维随机变量	405
离散型二维随机变量	406
连续型二维随机变量	407
随机变量的相互独立性	409
随机变量函数的分布	410
习题	413
§ 5 随机变量的数字特征	415
数学期望	415
方差和标准差	417
二维随机变量的数字特征	421
随机变量的函数的数学期望	423
习题	424
§ 6 大数定律和中心极限定理	425
Чебышев 不等式与大数定律	426
Чебышев 定理	427
中心极限定理	429
积分极限定理	430
习题	431
第十二章 数理统计	433
§ 1 数理统计的基本概念 样本及其分布	433
总体与样本	433
直方图	435
三个重要分布	437
统计量	443
统计量的分布	444
习题	447

§ 2 参数估计	449
点估计	449
矩估计法	449
极大似然估计法	452
估计值好坏的标准	455
区间估计	458
习题	464
§ 3 假设检验	466
两类错误	467
正态总体均值与方差的假设检验	468
总体分布的假设检验	473
习题	476
§ 4 方差分析	478
统计假设	479
检验方法	479
基本假设的显著性检验	482
习题	486
§ 5 一元正态线性回归分析	487
一元正态线性回归分析的数学模型	487
未知参数的点估计	488
估计量 $a, \hat{b}$ 和 s^2 的分布	491
未知参数 a, b 和 σ^2 的区间估计	491
回归方程的显著性检验	492
预测和控制	496
习题	501
附表 1 标准正态分布数值表	503
附表 2 $t(n)$ 分布的上临界值表	505
附表 3 χ^2 分布的上临界值表	506
附表 4(一) F 分布上临界值表	508
附表 4(二) F 分布上临界值表	512

第三篇 多元函数微积分

在丰富多彩的现实世界中,各类客观事物的发展过程一般都受到众多因素的制约.其中,有些因素的作用基本上是独立的,更多的因素却相互关联,相互影响,彼此交织地作用着,远比单一因素的效应复杂.为了定量地刻画由多个因素决定的客观对象的变化规律,经常需要作多元分析.多元函数微积分就是多元分析的重要基础.在多元微积分中,有关极限、连续、导数、微分和积分的概念虽然与一元微积分中的相应概念源于同类问题的思考,并遵循类似的分析途径,但是,它们具有一系列新的特点.同时,面对多元情况下形态各异的种种对象,还出现了许多更为复杂的问题,需要引入更为深刻的方法和技巧,作出本质上比较一般的讨论.本篇的前两章就来建立起多元函数的微分学与积分学.

本篇第九章将介绍有着广泛应用的级数理论.如果把数列看作正整数集上的函数,那末函数列便可视为一类特殊的多元函数.由于与之相应的函数项级数是表示函数和研究函数性质的重要工具,因而级数理论也是微积分的一个重要组成部分.

第七章 多元函数微分学

本章讨论的问题类同于一元函数微分学,主要是以极限为工具研究有关增量、变化率、极值等函数的局部性质,并由此进而分析函数的最值等某些整体性质.由于多元函数定义于 n 维线性空间,而微分学基本思想之一又是局部线性化,因而线性代数的理论和方法在多元函数微分学中起着重要的作用.

§ 1 多元函数的极限与连续

$\mathbf{R}^n$ 中的点集

下面要展开讨论的 n 元函数定义于 $\mathbf{R}^n$ 的子集上.为了讨论 n 元函数的变化性态,首先需要介绍一些 $\mathbf{R}^n$ 中与距离有关的点集的基本概念与性质.

上一篇已经在 $\mathbf{R}^n$ 中引入范数:对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$,称

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

为 x 的范数.利用范数,可以自然地引入 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离,即:对于 $x, y \in \mathbf{R}^n$,规定 x 与 y 的距离

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

显然,这样规定的距离具有以下性质:

1. 非负性: $d(x, y) \geq 0, x, y \in \mathbf{R}^n; d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

2. 对称性: $d(x, y) = d(y, x), x, y \in \mathbf{R}^n$;

3. 三点不等式: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), x, y, z \in \mathbf{R}^n$.

设 $x \in \mathbf{R}^n, r > 0$, 记

$$O(x, r) = \{y | d(y, x) < r\},$$

称 $O(x, r)$ 为 x 的 r 邻域.

定义 7.1.1 设 $S \subset \mathbf{R}^n$, 如果存在 $r > 0$, 使得

$$O(x, r) \subset S,$$

则称 x 为 S 的内点; 如果对于任何 $r > 0$, 均有

$$O(x, r) \cap S \neq \emptyset, \text{ 且 } O(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus S) \neq \emptyset,$$

则称 x 为 S 的边界点. S 的内点全体称为 S 的内部, 记作 $\overset{\circ}{S}$; S 的边界点全体称为 S 的边界, 记作 ∂S .

例如, 对 $S = [a, b] \subset \mathbf{R} (= \mathbf{R}^1)$, 满足 $a < x < b$ 的每个 x 均为 S 的内点, S 的边界点为 a 和 b , 即 $\partial S = \{a, b\}$.

又如, 对 $S = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$, S 的内点全体为集合 $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$, $\partial S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \text{ 或 } 2\}$.

定义 7.1.2 设 $S \subset \mathbf{R}^n$, 如果 S 中的每一点均为 S 的内点, 则称 S 为开集; 如果 $\partial S \subset S$, 则称 S 为闭集.

可以证明: 开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集.

对于 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 称集合

$$\{tx + (1-t)y | 0 \leq t \leq 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中连接 x 和 y 的线段. $\mathbf{R}^n$ 中首尾彼此相接的有限条线段组成 $\mathbf{R}^n$ 中的折线.

定义 7.1.3 设 $S \subset \mathbf{R}^n$, 如果对 S 中任意两点 x, y , 都有一条完全落在 S 中的折线将 x 和 y 连接起来, 则称 S 为连通的.

定义 7.1.4 $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集称之为开区域, 简称为区域.

人们常把开区域连同它的边界组成的集合称为闭区域.

例如, 对 $r > 0, S = \{x | x \in \mathbf{R}^n, \|x\| < r\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区

域; $S_1 = \{x | x \in \mathbf{R}^n, \|x\| \leq r\}$ 则是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭区域.

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域, 如果存在 $r > 0$, 使得 $D \subset O(0, r)$, 则称 D 是一个有界区域, 否则称 D 是无界的.

例如, $\mathbf{R}^2$ 中的区域 $\{(x, y) | |x| + |y| < 1\}$ 是有界区域; 半平面 $\{(x, y) | x > 0\}$ 是无界区域.

多元函数

一元函数反映了在只含两个变量的变化过程中, 这两个变量间的依赖关系; n 元函数反映了一个因变量关于 n 个自变量的依赖关系.

定义 7.1.5 设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, 如果按规则 f , 对 D 中每个点 x , 均有确定的实数 y 与之对应, 则称 f 是以 D 为定义域的 n 元函数, 称 x 为自变量, y 为因变量, 记作

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbf{R}, \\ x &\mapsto y, \quad x \in D. \end{aligned}$$

又记 $y = f(x)$, 或 $y = f(x_1, \dots, x_n)$, 其中 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$. 记 $D(f) = D$, 并称

$$R(f) = \{f(x) | x \in D\}$$

为函数 f 的值域.

例如, 圆柱体的体积 V 取决于底圆半径 r 和高 h , 它们间的依赖关系为

$$V = V(r, h) = \pi r^2 h,$$

显然, $D(V) = \{(r, h) | r > 0, h > 0\}$, $R(V) = (0, +\infty)$.

如同一元的初等函数那样, 如果在多元函数的解析表达式中未对定义域作附加说明, 则其定义域应理解为一切使表达式有意义的自变量的变化范围.

二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 $D(f)$ 是 Oxy 平面上的一个平面点集, 其图象

$$G(f) = \{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$$

是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一个曲面.

例如, 二元函数 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 的定义域是整个 Oxy 平面, 其图象是椭圆抛物面.

当自变量的个数多于两个时, 无法作出直观的函数图象, 因而分析与代数方法将起更为重要的作用.

例 7.1.1 多元线性函数

设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数, 如果对于任何实数 α, β 和任何 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 均有

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

则称 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性函数.

例如, 可以直接验证

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2, \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$$

就是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个线性函数.

下面来导出线性函数的一般形式.

设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个线性函数, 记 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ (e_i 的第 i 个分量为 1, 其余分量为 0), 对任何 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, 有

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

从而

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i.$$

记 $a = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))^T$, 则 $a \in \mathbf{R}^n$, 且

$$f(x) = a^T x, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$