高等学校教材

高等数学

下册

童裕孙 於崇华 金 路 张万国

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

下册

童裕孙　於崇华　金路　张万国

中国科学技术大学
图书馆藏

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/童裕孙等.—北京:高等教育出版社,2001

高等院校非数学专业本科生教材

ISBN 7-04-010165-3

Ⅰ.高… Ⅱ.童… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065439 号

责任编辑 郭思旭 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 陈钧元
版式设计 马静如 **责任校对** 李 辉 **责任印制** 韩 刚

高等数学 下册
童裕孙 於崇华 金路 张万国

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010－64054588	**传　　真**	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2001 年 12 月第 1 版
印　　张	16.5	**印　　次**	2001 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	410 000	**定　　价**	16.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内容提要

本书是教育部"面向21世纪理科非数学类专业高等数学课程体系和内容改革"课题的研究成果。其主要特色是对分析、代数、几何、随机数学几部分内容作较为统一的综合处理;在教材的深度和广度上作一定限制,以学生容易接受的自然形式,运用严格的数学语言介绍各部分内容;以现代数学的观点统率经典内容,精心组织并简洁处理相对成熟的材料,以适应多数专业的学时分配;在较为广泛的范围内选择应用性的例题和习题,从中体现数学建模的思想和方法。

本书为下册,内容包括多元函数微分学,多元函数积分学,级数,常微分方程,概率论基础,数理统计初步。上册内容包括极限与连续,微分与导数,一元函数积分学,矩阵和线性方程组,线性空间和线性变换,空间解析几何。

本书可作为高等院校理工科非数学类专业的教材或教学参考书。

目　录

第三篇　多元函数微积分

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第四篇 常微分方程

第五篇 概率论与数理统计

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三篇　多元函数微积分

在丰富多彩的现实世界中，各类客观事物的发展过程一般都受到众多因素的制约.其中，有些因素的作用基本上是独立的，更多的因素却相互关连，相互影响，彼此交织地作用着，远比单一因素的效应复杂.为了定量地刻画由多个因素决定的客观对象的变化规律，经常需要作多元分析.多元函数微积分就是多元分析的重要基础.在多元微积分中，有关极限、连续、导数、微分和积分的概念虽然与一元微积分中的相应概念源于同类问题的思考，并遵循类似的分析途径，但是，它们具有一系列新的特点.同时，面对多元情况下形态各异的种种对象，还出现了许多更为复杂的问题，需要引入更为深刻的方法和技巧，作出本质上比较一般的讨论.本篇的前两章就来建立起多元函数的微分学与积分学.

本篇第九章将介绍有着广泛应用的级数理论.如果把数列看作正整数集上的函数，那末函数列便可视为一类特殊的多元函数.由于与之相应的函数项级数是表示函数和研究函数性质的重要工具，因而级数理论也是微积分的一个重要组成部分.

第七章　多元函数微分学

本章讨论的问题类同于一元函数微分学，主要是以极限为工具研究有关增量、变化率、极值等函数的局部性质，并由此进而分析函数的最值等某些整体性质. 由于多元函数定义于 n 维线性空间，而微分学基本思想之一又是局部线性化，因而线性代数的理论和方法在多元函数微分学中起着重要的作用.

§1　多元函数的极限与连续

$\mathbf{R}^n$ 中的点集

下面要展开讨论的 n 元函数定义于 $\mathbf{R}^n$ 的子集上. 为了讨论 n 元函数的变化性态，首先需要介绍一些 $\mathbf{R}^n$ 中与距离有关的点集的基本概念与性质.

上一篇已经在 $\mathbf{R}^n$ 中引入范数：对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，称

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为 x 的范数. 利用范数，可以自然地引入 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离，即：对于 $x,y\in\mathbf{R}^n$，规定 x 与 y 的**距离**

$$d(x,y)=\|x-y\|.$$

显然，这样规定的距离具有以下性质：

1. **非负性**：$d(x,y)\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^n$；$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

2. **对称性**：$d(x,y)=d(y,x),x,y\in\mathbf{R}^n$；

3. **三点不等式**:$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z),x,y,z\in\mathbf{R}^n$.

设 $x\in\mathbf{R}^n,r>0$,记

$$O(x,r)=\{y\mid d(y,x)<r\},$$

称 $O(x,r)$为 x 的 r 邻域.

定义 7.1.1 设 $S\subset\mathbf{R}^n$,如果存在 $r>0$,使得

$$O(x,r)\subset S,$$

则称 x 为S 的**内点**;如果对于任何 $r>0$,均有

$$O(x,r)\cap S\neq\varnothing,\text{ 且 }O(x,r)\cap(\mathbf{R}^n\setminus S)\neq\varnothing,$$

则称 x 为S 的**边界点**.S 的内点全体称为S 的**内部**,记作$\mathring{S}$;S 的边界点全体称为S 的**边界**,记作∂S.

例如,对 $S=[a,b)\subset\mathbf{R}(=\mathbf{R}^1)$,满足 $a<x<b$ 的每个x 均为S 的内点,S 的边界点为a 和b,即$\partial S=\{a,b\}$.

又如,对 $S=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$,$S$ 的内点全体为集合$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$,$\partial S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\text{ 或 }2\}$.

定义 7.1.2 设 $S\subset\mathbf{R}^n$,如果 S 中的每一点均为S 的内点,则称 S 为**开集**;如果$\partial S\subset S$,则称 S 为**闭集**.

可以证明:开集的余集是闭集,闭集的余集是开集.

对于 $x,y\in\mathbf{R}^n$,称集合

$$\{tx+(1-t)y\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中连接x 和y 的线段.$\mathbf{R}^n$ 中首尾彼此相接的有限条线段组成 $\mathbf{R}^n$ 中的折线.

定义 7.1.3 设 $S\subset\mathbf{R}^n$,如果对 S 中任意两点x,y,都有一条完全落在 S 中的折线将x 和y 连接起来,则称 S 为**连通**的.

定义 7.1.4 $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集称之为**开区域**,简称为**区域**.

人们常把开区域连同它的边界组成的集合称为**闭区域**.

例如,对 $r>0,S=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\|x\|<r\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区

域；$S_1=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\ \|x\|\leqslant r\}$则是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭区域.

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域,如果存在 $r>0$,使得 $D\subset O(0,r)$,则称 D 是一个有界区域,否则称 D 是无界的.

例如,$\mathbf{R}^2$ 中的区域$\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$是有界区域;半平面$\{(x,y)\mid x>0\}$是无界区域.

多元函数

一元函数反映了在只含两个变量的变化过程中,这两个变量间的依赖关系;n 元函数反映了一个因变量关于 n 个自变量的依赖关系.

定义 7.1.5 设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,如果按规则 f,对 D 中每个点 x,均有确定的实数 y 与之对应,则称 f 是以 D 为**定义域**的 **n 元函数**,称 x 为自变量,y 为因变量,记作

$$f:D\to\mathbf{R},$$
$$x\mapsto y,\quad x\in D.$$

又记 $y=f(x)$,或 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$,其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$. 记 $D(f)=D$,并称

$$R(f)=\{f(x)\mid x\in D\}$$

为函数 f 的**值域**.

例如,圆柱体的体积 V 取决于底圆半径 r 和高 h,它们间的依赖关系为

$$V=V(r,h)=\pi r^2h,$$

显然,$D(V)=\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$,$R(V)=(0,+\infty)$.

如同一元的初等函数那样,如果在多元函数的解析表达式中未对定义域作附加说明,则其定义域应理解为一切使表达式有意义的自变量的变化范围.

二元函数 $z=f(x,y)$的定义域 $D(f)$是 Oxy 平面上的一个平面点集,其图象

$$G(f)=\{(x,y,z) \mid z=f(x,y),(x,y)\in D(f)\}$$

是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一个曲面.

例如,二元函数 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$的定义域是整个 Oxy 平面,其图象是椭圆抛物面.

当自变量的个数多于两个时,无法作出直观的函数图象,因而分析与代数的方法将起更为重要的作用.

例 7.1.1 多元线性函数

设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数,如果对于任何实数 α,β 和任何 $x,y\in\mathbf{R}^n$,均有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),$$

则称 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的**线性函数**.

例如,可以直接验证

$$f(x)=3x_1+2x_2,\quad x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$$

就是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个线性函数.

下面来导出线性函数的一般形式.

设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个线性函数,记 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$1\leqslant i\leqslant n$($e_i$ 的第 i 个分量为 1,其余分量为 0),对任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,有

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,$$

从而

$$f(x)=f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}f(e_i)x_i.$$

记 $a=(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n))^{\mathrm{T}}$,则 $a\in\mathbf{R}^n$,且

$$f(x)=a^{\mathrm{T}}x,\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com