

201

0441.4

S96

高等学校电子信息类规划教材

电磁场与电磁波理论基础

孙国安



A0937655

东南大学出版社

内容提要

本书介绍电磁场与电磁波的基本理论、基本概念和基本方法。主要内容包括:电磁场基本定律,静电场和恒流电场,恒流磁场,静态电磁场的解法,时变电磁场,均匀媒质中平面电磁波的传播,导行电磁波,电磁波的辐射。

全书以麦克斯韦电磁场方程组为线索,系统性强,物理概念清晰,公式推导详细。书中选配了不少例题和习题,并附有习题答案,适合于读者自学。

本书可用作电子工程、信息工程、电磁场与微波技术等专业大学本科教材,也可供其他电类专业学生、教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波理论基础 / 孙国安编著. —南京:东南
大学出版社,1999. 10
工科电子类规划教材
ISBN 7-81050-532-7

I. 电… II. 孙… III. ①电磁场-高等学校教材②电磁
波-高等学校-教材 IV. 0441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 44717 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:洪焕兴

江苏省新华书店经销 南京京新印刷厂印刷

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:22.75 字数:568 千字

1999 年 10 月第 1 版 1999 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—2000 定价:29.00 元

前 言

本教材系按信息产业部(原电子工业部)《1996—2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》,由全国高校电磁场与微波技术专业教学指导委员会编审、推荐出版。

本教材参考学时数为60~70学时。全书共八章。以麦克斯韦电磁场方程组为贯穿全教材的主线索,讨论各种电磁场的基本概念、基本理论和基本分析方法,以形成关于电磁场和电磁波的整体观念,有益于在一般规律指导下分析讨论具体的电磁场问题能力的培养,并避免了与《普通物理》电磁学重复之嫌。教材内容具体安排为:第一章“电磁场的基本定律”。简要回顾《普通物理》电磁学的基本实验定律,以起承上启下作用。对实验定律推广与概括,由此总结出麦克斯韦电磁场方程组,并进一步得出其微分形式,以此作为讨论各种电磁场的基本出发点。如此既避免了与《普通物理》的过多重复,又达到知识平稳过渡提高的目的。第二、第三章分别讨论静电场、恒流电场、恒流磁场等静态电磁场的基本概念和性质。第四章“静态电磁场的解法”。总结了静态电磁场的基本方程与边界条件。介绍静态电磁场的分析计算方法,包括镜像法、边值问题的解析解法(以分离变量法为代表)及数值解法(以有限差分法为代表)。静态电磁场作为一般电磁场的特殊情况,其基本特性和计算方法本身是十分重要和有用的,另一方面也为学习和讨论更为复杂的时变电磁场奠定必要的基础。第五章“时变电磁场”。讨论时变电场与磁场的紧密关系。由麦克斯韦电磁场方程组导出时变电磁场在传播过程中满足的波动方程。第六章“平面波的传播,反射和折射”。分析讨论了无限大均匀媒质中平面电磁波的传播特性及电磁波在媒质分界面的反射、折射规律。第七章“导行电磁波”。介绍了几种典型的导行系统及导行电磁波的分析方法和传播特性。第八章“电磁波的辐射”,介绍了电磁波辐射的基本原理和分析方法。每章均附有适当数量的习题。

本教材适用于电子信息工程、通信工程、电子科学与技术、生物医学工程专业,也可应用于电类其他专业。教材中带有*号的内容,可根据不同专业和学时要求取舍使用。

本教材由东南大学孙国安编写,上海大学徐得名教授主审(徐得名教授并兼任责任编委),上海大学钮茂德副教授亦为本教材提出了许多宝贵意见,东南大学杨铨让教授在工作中给予鼓励和支持,电磁场与微波技术学科张明博士及其他同志亦予以许多帮助,东南大学出版社为本教材的出版付出了辛勤的劳动,在此一并表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中不妥和错误之处在所难免,殷切希望使用本教材的师生和读者批评指正。

编 者

1999.4. 于东南大学

第一章 电磁场的基本定律

在电磁学中阐述了电磁现象及其基本规律,本章对这些基本概念和规律总结得出的实验定律进行概括和推广,由此引出麦克斯韦电磁场方程组,导出电磁场的边界条件和电磁场的能量关系,以此作为本教材其后章节的共同基础和同一出发点。以这样一条主线索,讨论电磁场和电磁波在各种具体条件下的基本概念、特点、基本定律和分析方法,有益于形成关于电磁场和电磁波的整体观念。

§ 1.1 电 场

一、库仑定律

实验发现电荷之间存在着相互作用力。如果两个带电体的尺寸远比它们之间的距离小得多,则带电体的电荷都可看作为点电荷。库仑通过实验总结出两个点电荷相互作用力的大小,与它们各自所带电量成正比,而与距离的平方成反比。作用力的方向在两点电荷的连线上,同性电荷相斥,异性电荷相吸。如图 1.1.1 所示。

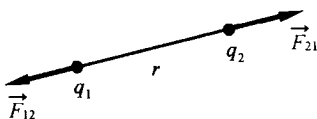


图 1.1.1 两点电荷的作用力

库仑定律的表达式为

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{a}_{21} \quad (1.1.1)$$

式中: \vec{F}_{21} 为点电荷 q_1 对点电荷 q_2 的作用力;

\vec{F}_{12} 为点电荷 q_2 对点电荷 q_1 的作用力;

q_1, q_2 为点电荷 1、2 所带电量(代数量);

r 为两点电荷之间的距离;

\vec{a}_{21} 为沿 r 直线由点电荷 1 指向点电荷 2 的单位矢量;

k 为比例系数,决定于电荷所在空间媒质的特性及式中各物理量所选用的单位。在国际单位制(SI)中, \vec{F} 的单位为牛[顿](N)*, r 的单位为米(m), q 的单位为库[仑](C),则 k 为

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

* 牛顿为力的单位名称,其中文符号为“牛”,国际符号为 N。

其中 ϵ 为表示媒质电性质的介电系数,其单位为 $\frac{\text{库}^2}{\text{牛} \cdot \text{米}^2} = \frac{\text{库}^2}{\text{焦} \cdot \text{米}} = \frac{\text{法}}{\text{米}}$ (F/m)。真空或空气的介电系数用 ϵ_0 表示,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \approx 8.854188 \times 10^{-12} \quad (\text{F/m})$$

二、电场与电场强度

由库仑定律总结出:在空间中有一电荷 q_1 ,则空间中其他电荷 q_2 将受到电荷 q_1 的作用力。表明电荷 q_1 引入空间后,它改变了空间的性质,在空间中产生了一种特殊物质——电场,其他电荷 q_2 再进入此空间将受到这个电场的作用力,这个力称作电场力。电场力反映了电场的存在与性质,因此通过电场力可以表征电场的特性。

通过试验电荷在电场中所受到的作用力来描述电场的特性。所有电荷均能产生电场,为了使被研究的电场尽量少受到试验电荷的影响,试验电荷应当为足够微小的点电荷,即几何尺寸与所带电量均很小。用电场强度 \vec{E} 表征电场特性,此物理量定义为

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q} \quad (1.1.2)$$

式中: $\Delta \vec{F}$ 为试验电荷 Δq 在电场中所受到的力,显然电场强度 \vec{E} 仅与试验电荷所在点的电场特性有关,而与试验电荷无关。

电场强度 \vec{E} 的物理意义为:单位正电荷在电场中所受到的力。在国际单位制(SI)中,电场强度的单位为伏[特]/米(V/m), $1(\text{V/m}) = 1(\text{N/C})$ 。

三、电荷产生的电场

1. 点电荷产生的电场

据库仑定律,点电荷 q 对试验电荷 Δq 的作用力为 $\Delta \vec{F}$

$$\Delta \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q\Delta q}{r^2} \vec{a}_r$$

式中: \vec{a}_r 为点电荷 q 指向场中试验电荷所在点的矢径方向单位矢量。如取球坐标原点为电荷所在位置,则此 \vec{a}_r 即球坐标系矢径方向单位矢量。

根据电场强度的定义,点电荷 q 产生的电场的电场强度为

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{a}_r \quad (1.1.3)$$

上式表示对于线性媒质(媒质介电系数 ϵ 与电场强度无关)电场强度 \vec{E} 与产生电场的源电荷量 q 成正比。

2. 离散电荷系的电场

当产生电场的源电荷有 n 个,并作离散分布时,在线性媒质中,电场强度亦服从叠加原理。即在由若干个电荷共同产生的电场中,任一点的电场强度,等于每一个点电荷 q_k 单独存在时,在该点所产生的电场强度 \vec{E}_k 的矢量叠加(矢量和)。即

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \quad (1.1.4)$$

在讨论场的问题,尤其是有多个场源时,经常遇到两类“点”。一类是表示场源(例如点电

荷)所在的点,称为源点;另一类是需确定场量的点,称为场点。它们的位置符号必须明确区分。我们用加撇的坐标(例如直角坐标 x', y', z')或球坐标矢径(\vec{r}')表示源点位置,而用不加撇的坐标 (x, y, z) 或(\vec{r})表示场点位置。则由源点到场点的矢径为矢量差 $\vec{r} - \vec{r}'$, 并用 \vec{R} 表示(如图 1.1.2), 即

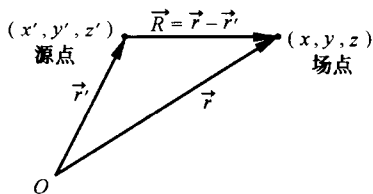


图 1.1.2

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = R\vec{R}^0$$

式中: R 为 \vec{R} 的大小, 即 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$;

$$\vec{R}^0 \text{ 为 } \vec{R} \text{ 方向的单位矢量, 即 } \vec{R}^0 = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

点电荷 q_k 产生的电场强度 \vec{E}_k , 则可表示为

$$\vec{E}_k = \frac{q_k}{4\pi\epsilon R_k^2} \vec{R}_k^0 \quad \text{或} \quad \vec{E}_k = \frac{q_k}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

n 个点电荷在场点(\vec{r})点产生的电场强度为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k^2} \vec{R}_k^0 \quad (1.1.5)$$

3. 连续分布电荷的电场

对电荷作连续分布的电场仍可以运用叠加原理。将连续分布的电荷进行无限分割, 分割后的每一无限小电荷元就可视为点电荷, 这样可认为此电场是由无限多个连续分布的点电荷所共同产生, 利用场的叠加原理, 即可求得场中每点的电场强度。

对于连续分布的电荷, 引入电荷密度的概念。例如电荷线状分布的电荷线密度、电荷面状分布的电荷面密度、电荷体状分布的电荷体密度, 分别定义为

$$\text{电荷线密度} \quad \rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (\text{库/米, C/m}) \quad (1.1.6a)$$

$$\text{电荷面密度} \quad \rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (\text{库/米}^2, \text{C/m}^2) \quad (1.1.6b)$$

$$\text{电荷体密度} \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (\text{库/米}^3, \text{C/m}^3) \quad (1.1.6c)$$

连续分布电荷的电荷元 dq 及其产生的电场 $d\vec{E}$ 则分别为

$$dq = \rho_l dl, \quad d\vec{E} = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon R^2} \vec{R}^0$$

$$dq = \rho_s ds, \quad d\vec{E} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon R^2} \vec{R}^0$$

$$dq = \rho dV, \quad d\vec{E} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon R^2} \vec{R}^0$$

利用叠加原理即可求得连续分布电荷的电场:

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon R^2} \vec{R}^0 \quad (1.1.7a)$$

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_v ds}{4\pi\epsilon R^2} \vec{R}^0 \quad (1.1.7b)$$

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon R^2} \vec{R}^0 \quad (1.1.7c)$$

【例 1.1.1】 长度为 $2L$ 的直线上均匀分布有电荷 Q , 试求直线外任一点处的电场强度。

解: 建立一圆柱坐标系, 令 z 轴通过带电直线, 坐标原点位于带电直线的中点, 如图 1.1.3 所示。

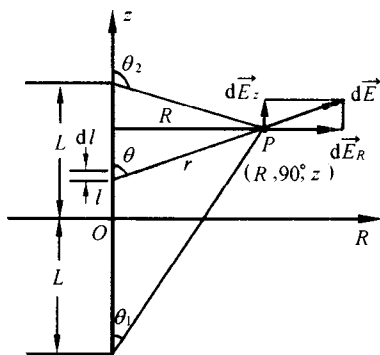


图 1.1.3 例 1.1.1 附图

由于电场对带电直线作轴对称分布, 因此研究 α 等于任意常数的坐标平面上的电场分布具有普遍性。现取圆柱坐标系 $\alpha=90^\circ$ 的半平面上任一点 $P(R, 90^\circ, z)$ 作为所研究点。

带电直线的电荷量 Q 在长度 $2L$ 上均匀分布, 因此直线上的线电荷密度 ρ_l 为

$$\rho_l = \frac{Q}{2L}$$

在带电直线上 l 处线元 dl 所带电量为 $dq = \rho_l dl$, 线电荷元 dq 在点 P 处的电场强度 $d\vec{E}$ 沿线元 dl 到 P 的矢径 \vec{r} 方向 (\vec{a}_r)。设 z 轴与矢径 \vec{r} 的夹角为 θ , 线电荷元 dq 到场点 P 的距离为 r , 则电场强度为

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r$$

根据叠加原理, 场点 P 处的场强 $\vec{E} = \int_l d\vec{E}$, 即由所有线电荷元 dq 在 P 点的场强 $d\vec{E}$ 进行矢量叠加。在坐标系中矢量叠加总是先求出每一矢量 $d\vec{E}$ 在各坐标轴上的分量, 把矢量叠加转化为各坐标分量大小的标量代数和运算。 $d\vec{E}$ 在圆柱坐标系中的各坐标分量为

$$dE_R = dE \sin \theta = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon r^2} \sin \theta$$

$$dE_\alpha = 0$$

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon r^2} \cos \theta$$

式中 l, r, θ 对于不同的线电荷元都是变量, 但它们是有联系的, 可统一用一个变量 θ 来表

示,以便于积分:

$$r = \frac{R}{\sin\theta}$$

$$l = z - R \cot\theta$$

$$dl = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$$

因而点 P 处电场强度为

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{a}_R \int_l dE_R + \vec{a}_\alpha \int_l dE_\alpha + \vec{a}_z \int_l dE_z = \vec{a}_R E_R + \vec{a}_\alpha E_\alpha + \vec{a}_z E_z$$

$$E_R = \int_l dE_R = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon R} \sin\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon R} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_\alpha = \int_l dE_\alpha = 0$$

$$E_z = \int_l dE_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon R} \cos\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon R} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别是带电直线两端点到场点的矢径方向与正 z 轴方向之间的夹角。

当带电直线为无限长时, $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$, 这时 $E_R = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon R}, E_\alpha = 0, E_z = 0$, 即 $\vec{E} = \vec{a}_R \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon R}$, 电场只有径向分量。

§ 1.2 高斯定律

一、电力线

电场强度在空间分布形成矢量场, 可用矢量线来形象地表示它在电场中的分布, 该矢量线称为电力线。电力线上每一点的切线方向代表该点的电场强度的方向, 而电力线的密度与该点电场强度的大小成正比。

二、电场通量、高斯定律

根据电力线的概念, 电力线密度与场中该点的电场强度成正比, 因此电场中电场矢量 \vec{E} 穿过某微小面积 $d\vec{s}$ 的通量 $d\Psi_E$ 与穿过此面积的电力线数成正比。根据矢量场通量的定义, 电场的通量为

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.2.1)$$

点电荷 q 的电力线穿过 $d\vec{s}$ 的通量为

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{ds \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} d\Omega$$

式中 $d\Omega$ 为点电荷 q 所在点 O 对 $d\vec{s}$ 所张的立体角, 如图 1.2.1 所示, 则点电荷的电场对包围它的封闭曲面所产生的电场通量为

$$\Psi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_s \frac{q}{4\pi\epsilon} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon} \oint_s d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon} 4\pi = \frac{q}{\epsilon} \quad (1.2.2)$$

由上式可见, 穿出封闭曲面的电场强度矢量的通量, 仅与封闭曲面内的电荷有关, 而与电荷

在封闭曲面内的位置无关。如果 q 在包围曲面之外, 则 $\oint_s d\Omega = 0$, 因而 $\Psi_E = 0$ 。表示在此情况下穿出封闭曲面的通量与穿入封闭曲面的通量相等, 而其代数和为零。如果封闭曲面内的电荷不只一个, 或电荷是连续分布在这一封闭曲面所包围的体积内, 则电场通量为

$$\Psi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^n q_k = \frac{Q}{\epsilon} \quad (1.2.3a)$$

或

$$\Psi_E = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon} \quad (1.2.3b)$$

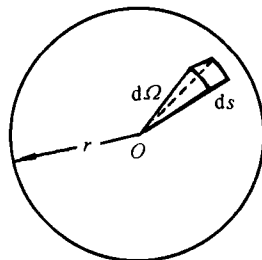


图 1.2.1 立体角

式中 $Q = \sum_{k=1}^n q_k$ 或 $Q = \int_V \rho dV$ 为封闭曲面 s 内的电荷总量。上式表明: 在各向同性的均匀媒质中, 穿出任一封闭曲面的电场强度矢量的通量等于此封闭曲面内的电荷总量 Q 除以媒质的介电系数 ϵ , 而与此曲面的形状、大小及封闭曲面内电荷的分布情况无关。这称为高斯定律。

三、电通密度

引入辅助物理量 \vec{D} , 定义为

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.2.4)$$

矢量 \vec{D} 的通量 $d\Psi_D = \vec{D} \cdot d\vec{s}$ 称为电通, 故 \vec{D} 称为电通密度, 单位为库/米²(C/m²)。

引入电通及电通密度概念后得

$$\Psi_D = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_s \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV = Q \quad (1.2.5)$$

上式表明: 穿出任一封闭曲面的电通等于封闭曲面内的电荷总量, 而与媒质无关。因而上式可适用于任何媒质, 包括不均匀媒质与各向异性媒质在内。此为推广的高斯定律。必须注意: 尽管 \vec{D} 在封闭表面上的电通与媒质的 ϵ 无关, 但是 \vec{D} 在空间的分布仍与 ϵ 有关的。

根据高斯定律可以推断: 电通力线(\vec{D} 线)由正电荷发出而终止于负电荷, 在中间是连续的, 既不会分岔, 亦不会中断。

高斯定律虽由库仑定律推演而出, 但从高斯定律得出的结果与电荷在封闭曲面内的位置及分布无关, 因而它不受库仑定律仅适用于点电荷的限制。

四、应用高斯定律求解电场

在场强分布具有充分对称的情况下, 应用高斯定律求解电场是非常方便的。但亦只有在已知场分布具有充分对称性的情况下, 才显现出它的方便之处。因为如果场强的分布规律(即使为定性的规律)为未知, 则尽管应用了高斯定律得到了任一封闭曲面上电通总和, 亦难以进一步确定封闭曲面上任一点的电通密度, 因而电场强度仍无法求得。

高斯定律中的封闭曲面 s 可分为几个部分, 例如 s 由 s_1 与 s_2 组成 ($s = s_1 + s_2$), 因此

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2$$

若 s_1 与 s_2 分别具有下列特性: 在 s_1 上 \vec{D} 与 $d\vec{s}_1$ 平行, $\vec{D} \cdot d\vec{s}_1$

$= D ds_1$, 且 D 在 s_1 上均匀分布, 则 $\int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_1} D ds_1 = D \int_{s_1} ds_1 = D s_1$; 而在 s_2 上 \vec{D} 与 $d\vec{s}_2$ 正交, $\vec{D} \cdot d\vec{s}_2 = 0$, 则 $\int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 = 0$ 。具有如此特性的封闭曲面 s 称为高斯面, 因此在高斯面上的电通量为

$$\Psi_D = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 = D S_1$$

利用高斯定律

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV$$

就可很方便地求解电场

$$D = \frac{\int_V \rho dV}{s_1}$$

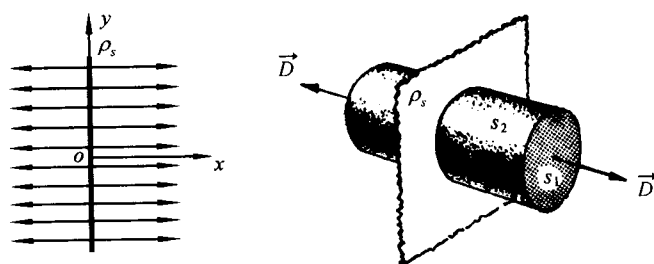
$$\vec{D} = \vec{a}_{n1} \frac{\int_V \rho dV}{s_1}$$

式中 \vec{a}_{n1} 为 s_1 的法线方向单位矢量。

场可能具有某种对称性, 例如面对称、轴对称、和球对称。在这种情况下, 场量 \vec{E} 、 \vec{D} 只是某一坐标变量的函数。即在直角坐标系中仅为 x (或 y 、 z) 的函数; 在圆柱坐标系中仅为 R 的函数; 在球坐标系中仅为 r 的函数。此时高斯面 s 中的 s_1 在直角坐标系中 x 为常数; 圆柱坐标系中 R 为常数; 球坐标系中 r 为常数的坐标面。而 s_2 为与它们正交的曲面。由此可见, 利用高斯定律求解电场问题的关键在于对场的对称性进行分析, 确定高斯面。

【例 1.2.1】 一无限大平面上均匀分布有正电荷, 其面密度为 ρ_s , 求其两侧产生的电场。

解: 由于场源电荷分布及空间媒质分布具有平面对称性, 因此空间的电场 \vec{D} 亦具有平面对称性, 即带电平面两侧等远的点上电场量 \vec{D} 大小相等, 方向处处与平面垂直, 且指向两



(a) 电力线分布

(b) 高斯面

图 1.2.2 例 1.2.1 均匀带正电荷的无限大平面的电场

侧, 如图 1.2.2 图(a)所示。根据场量 \vec{D} 分布的这个特点, 取高斯面如图 1.2.2(b), 它是一柱体表面, 其两底面 s_1 、 s_1' 与带电平面平行, 且对带电平面对称, 并有 $s_1' = s_1$, 其侧面 s_2 与带电平面垂直。在此高斯面上的电通量

$$\Psi_D = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_1'} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 = \int_{s_1} D ds_1 + \int_{s_1'} D ds_1' = 2 D s_1$$

利用高斯定律

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \rho_s ds = \rho_s s_1$$

因此

$$D = \frac{\rho_s}{2}$$

应同时表出 \vec{D} 的大小与方向, 在图 1.2.2(a) 的直角坐标系中, 带电平面为 $x=0$ 平面, 则电通密度:

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{a}_x \frac{\rho_s}{2} & (x \geq 0) \\ -\vec{a}_x \frac{\rho_s}{2} & (x \leq 0) \end{cases}$$

电场强度:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{a}_x \frac{\rho_s}{2\epsilon} & (x \geq 0) \\ -\vec{a}_x \frac{\rho_s}{2\epsilon} & (x \leq 0) \end{cases}$$

故无限大带电平面产生的电场, 电力线为垂直于平面的平行线, 其大小与平面的距离无关。

上述表达式对于均匀带负电荷的无限大平面的电场也适用, 只是电力线的方向与带正电荷时相反, 即从两侧指向平面。

利用以上结果很易证明: 带等量异号电荷的一对无限大平行平面之间的电场量为

$$\vec{D} = \vec{a}_n \rho_s, \quad \vec{E} = \vec{a}_n \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

式中 \vec{a}_n 为由正电荷指向负电荷平面的法向单位矢量。在两平行平面以外空间电场量 $\vec{D}=0$, $\vec{E}=0$ 。

【例 1.2.2】 无限长直线上均匀分布有电荷, 电荷线密度为 ρ_l , 求线外电场分布。

解: 场源电荷均匀分布在直线上, 具有轴对称性, 因而其电场亦具有此对称性。根据此电场的轴对称性, 取高斯面为与线电荷同轴的圆柱体表面, 其长度为 l , 设其圆柱侧面为 s_1 , 上下底分别为 s_2, s_2' 。取圆柱坐标系如图 1.2.3 所示, 以带电直线为其 z 轴, 则 S_1 的法向单位矢量 $\vec{a}_{n1} = \vec{a}_R$; s_2, s_2' 的法向单位矢量 $\vec{a}_{n2} = \vec{a}_z, \vec{a}_{n2'} = -\vec{a}_z$ 。

在所取高斯面上电通则为 S_1, S_2, S_2' 面上电通之和, 即

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{s_2'} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2'$$

无限长均匀分布直线电荷的电场不仅具有圆柱对称性且其方向垂直于直线, 即 $\vec{D} = \vec{a}_R D$ 。因此

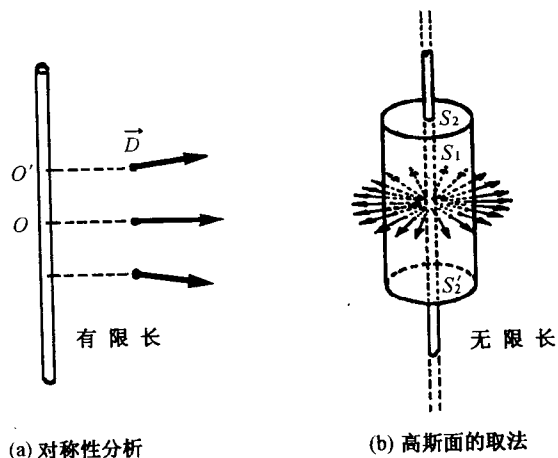


图 1.2.3 例 1.2.2 无限长均匀带电线电荷

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 &= \vec{a}_R D \cdot \vec{a}_R ds_1 = D s_1 \\ \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 &= \vec{a}_R D \cdot \vec{a}_z ds_2 = 0 \\ \vec{D} \cdot d\vec{s}_2' &= \vec{a}_R D \cdot (-\vec{a}_z ds_2') = 0 \\ \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} &= \int_{s_1} D ds_1 = D s_1 = D 2\pi R l \end{aligned}$$

根据高斯定律

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q, \quad Q = \int_l \rho_l dl = \rho_l l$$

由此得均匀带电直线外电场分布为

$$\vec{D} = \vec{a}_R \frac{\rho_l l}{2\pi R} = \vec{a}_R \frac{\rho_l}{2\pi R}, \quad \vec{E} = \vec{a}_R \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon R}$$

以上结果与例 1.1.1. 利用叠加原理计算所得结果相同。

【例 1.2.3】 在一介电系数为 ϵ 的介质球壳中均匀分布有电荷, 其体密度为 ρ , 介质球壳内半径为 a , 外半径为 b , 求空间各区域电场分布。

解: 由于带电体具有球对称性, 使得其产生的电场亦具有此球对称特性。取高斯面为带电球壳的同心球面 s , 应用高斯定律可以很方便地求出介质球壳内空腔、介质球壳及球壳外的电场分布。取球坐标系原点与球心同心。

1. 介质球壳内空腔 ($r \leq a$)

在半径为 r 的高斯面上应用高斯定律电通等于其包围的总电量

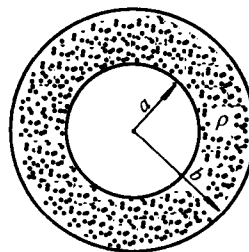


图 1.2.4 例 1.2.3 带电介质球壳

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D 4\pi r^2 = 0$$

因而

$$\vec{D}=0, \quad \vec{E}=0$$

2. 介质球壳中($a \leq r \leq b$)

在高斯面上的电通为

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D 4\pi r^2$$

s 所包围的电荷量为

$$\int_V \rho dV = \int_a^r 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3) \rho$$

根据高斯定律:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV, \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3) \rho$$

得

$$D = \frac{r^3 - a^3}{3 r^2} \rho, \quad \vec{D} = \vec{a}_r \frac{r^3 - a^3}{3 r^2} \rho$$

若球壳介质介电系数为 ϵ , 则

$$\vec{E} = \vec{a}_r \frac{r^3 - a^3}{3 \epsilon r^2} \rho$$

3. 介质球壳外($r \geq b$)

在高斯面 s 上的电通

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D 4\pi r^2$$

s 面所包围的电荷量为

$$\int_V \rho dV = \int_a^b \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3) \rho$$

根据高斯定律

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV, \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3) \rho$$

得

$$D = \frac{b^3 - a^3}{3 r^2} \rho, \quad \vec{D} = \vec{a}_r \frac{b^3 - a^3}{3 r^2} \rho$$

介质球壳外媒质为空气, 介电系数为 ϵ_0 , 则

$$\vec{E} = \vec{a}_r \frac{b^3 - a^3}{3 \epsilon_0 r^2} \rho$$

§ 1.3 磁场、毕奥-沙伐尔定律

一、磁场

在电荷周围有电场存在, 电荷之间通过电场相互作用。电荷的运动形成电流, 在电流周

围存在着另一种性质的场,它不同于电场,它对静止电荷没有作用,而对运动电荷有作用力,由于电流由运动电荷形成,这场对载流导体亦有作用力,这种场称为磁场。

磁场的特征是对引入场中的运动电荷有力的作用,利用这一点可以检验磁场的存在与性质。速度为 \vec{v} 的运动电荷 dq 在磁场中受到磁场力 $d\vec{F}$ 的作用,这力称为洛仑兹力。

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.3.1)$$

式中 \vec{B} 为反映磁场特性的物理量,称之为磁感应强度。在国际单位(SI)制中,磁感应强度 \vec{B} 的单位为特[斯拉](T)或韦[伯]/米²(Wb/m²)。

由于导线中电流为运动电荷所形成,故载流导体在磁场中,亦受到磁场力的作用。载流微小线元 $I d\vec{l}$ (其中 $d\vec{l}$ 方向为电流流向),在磁场中所受到的磁场力为 $d\vec{F}$ 。而 $dq \vec{v} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = Id\vec{l}$, 故有

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.3.2)$$

此式亦可作为磁感应强度 \vec{B} 的定义式。

二、毕奥-沙伐尔定律

库仑定律是一个以实验为基础的基本定律,点电荷 dq 产生的电场强度 $d\vec{E} = \vec{a}_r k \frac{dq}{r^2}$, 比例系数 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ 。毕奥、沙伐尔二人曾用实验归纳出微小载流线元 $I d\vec{l}$ 在空间某点所产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的表达式,与点电荷产生的电场强度表达式相似,但其方向表示较复杂,其方向决定于 $I d\vec{l} \times \vec{a}_r$ 。 $d\vec{B}$ 的表达式为

$$d\vec{B} = k' \frac{I d\vec{l} \times \vec{a}_r}{r^2} \quad (1.3.3)$$

此式称为毕奥-沙伐尔定律。式中 r 为载流线元 $I d\vec{l}$ 至被研究点(场点)之间的矢径距离, \vec{a}_r 为矢径方向单位矢量; k' 为比例系数,它决定于式中各物理量所取单位及空间媒质的特性,在 SI 制中:

$$k' = \frac{\mu}{4\pi}$$

μ 为表示媒质特性的参量称为导磁系数或磁导率,在 SI 制中其单位为亨[利]/米(H/m)。真空的磁导率用 μ_0 表示:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$$

如果电流不是集中于线状导线,而是分布在一个有较大截面的体积中,则可应用电流密度矢量 \vec{J} (体电流的面密度)的概念。其大小为通过单位横面积中的电流强度 $J = \frac{dI}{ds}$, 电流密度矢量 \vec{J} 的方向反映电流的流向,则电流元

$$I d\vec{l} = (\vec{J} \cdot d\vec{s}) d\vec{l} = \vec{J} ds dl = \vec{J} dV$$

电流元 $I d\vec{l}$ 产生的磁场磁感应强度表示为

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{a}_r}{r^2} dV \quad (1.3.4)$$

毕奥-沙伐尔定律是基于实验归纳而得出的。实验条件为在均匀线性媒质中,此时磁场

的磁感应强度 \vec{B} 与场源电流元 $I d\vec{l}$ 成线性关系。因此可以运用叠加原理求得闭合载流回路 C 中电流 I 在空间产生的磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{a}_r}{r^2} \quad (1.3.5)$$

电流元 $I d\vec{l}$ 仅是电流回路的一部分，由于电流的连续性，我们不可能在回路中分离出微小电流元 $I d\vec{l}$ 直接进行实验验证毕奥-沙伐尔定律。但是根据上述由毕奥-沙伐尔定律并利用叠加原理推算出的各种载流回路所产生的磁场都能由实验验证，从而证实了毕奥-沙伐尔定律的正确性。它是磁场的基本实验定律。

【例 1.3.1】 长度为 $2L$ 的载流细直导线通有电流 I ，试求直线外任一点 P 的磁感应强度 \vec{B} 。

解：取圆柱坐标系，以直导线为 z 轴，电流流向沿 $+z$ 轴方向 (\vec{a}_z)，导线中点为坐标原点。如图 1.3.1 所示。

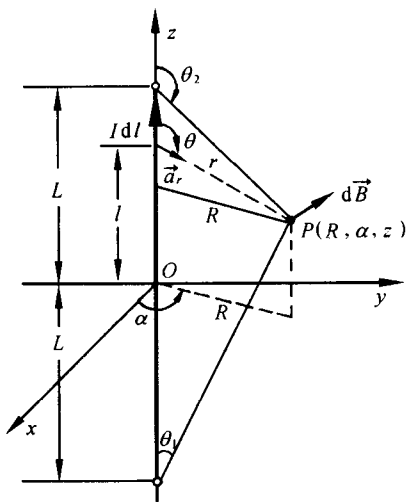


图 1.3.1 例 1.3.1 附图

细直导线上电流元 $I d\vec{l}$ 在空间点 $P(R, \alpha, z)$ 的磁感应强度 $d\vec{B}$ 为

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{a}_r}{r^2} = \vec{a}_\alpha \frac{\mu}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

式中 θ 为矢量 $d\vec{l} = dl \vec{a}_z$ 转向矢径方向 \vec{a}_r 的夹角。直导线上每一电流元在 P 点的 $d\vec{B}$ 方向均为 \vec{a}_α 方向，因此其叠加时，为标量叠加。得到 P 点的磁感应强度

$$B = \int_l dB = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

式中 l, r, θ 均为变量。为求得积分结果，将它们用统一变量 θ 表示

$$r = \frac{R}{\sin\theta}, \quad l = z - R \cot\theta, \quad dl = \frac{R}{\sin^2\theta}$$

故

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin \theta}{R} d\theta = \frac{\mu I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别是直导线两端电流元方向与至场点 P 的矢径方向之间的夹角, R 为场点到直导线距离。直导线电流在 $P(R, \alpha, z)$ 点的磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{a}_\alpha \frac{\mu I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

当导线为无限长时, $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$, 则导线外 P 点的磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{a}_\alpha \frac{\mu I}{2\pi R}$$

三、磁通、磁通连续性原理

描述磁场特性的物理量——磁感应强度 \vec{B} , 是一矢量, 它在空间分布形成一矢量场。为形象地描绘这矢量场在空间的分布, 引入磁场的矢量线的概念。磁场的矢量线称为磁力线 (或磁感应线, \vec{B} 线)。磁力线上每一点的切线方向代表该点磁感应强度矢量的方向, 磁力线的密度与该点磁感应强度的大小成正比。

由矢量线在面积上的通量概念知, 磁力线在微小面积元 $d\vec{s}$ 上的通量称为磁通量或磁通

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.3.6)$$

在 SI 单位制中, 磁通的单位为韦[伯](Wb)。根据上式磁通的定义, 磁感应强度 \vec{B} 又可称为磁通密度矢量。

\vec{B} 线在空间某曲面 S 上的磁通应为此曲面 S 上所有面积元磁通之和, 即

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.3.7)$$

根据毕奥-沙伐尔定律可以证明, \vec{B} 线穿过任一封闭曲面 s 的磁通恒等于零,

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv 0 \quad (1.3.8)$$

上式表明: 在空间任意作一封闭曲面, 则穿入这一封闭曲面的任一磁力线必然从这封闭曲面的另一处穿出, 因而通过任意封闭曲面的磁通的代数和恒等于零。磁通在磁场中处处连续, 磁力线在空间自成封闭曲线。这一原理称为磁通连续性原理。

磁通永远连续, 磁力线不同于电力线。电力线自正电荷发出终止于负电荷, 磁力线则连续不中断, 在空间自成封闭曲线, 这是不存在磁荷的数学说明, 客观上至今亦未发现磁荷的存在。

§ 1.4 安培环路定律

一、磁感应强度 \vec{B} 的环量 安培环路定律

上节中从毕奥-沙伐尔定律出发, 对磁场进行了初步研究。从研究磁感应强度矢量 \vec{B} 沿空间任意封闭曲面的积分, 得出了磁通连续性原理。现仍从这一基本定律出发研究磁感应强度 \vec{B} 沿空间任意闭合曲线 C 的积分 (\vec{B} 在闭合曲线 C 上的环量), 可以导出磁场矢量 \vec{B} 与其场源电流 I 的关系——安培环路定律。

安培环路定律的表达式为

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \sum_k I_k \quad (1.4.1)$$

上式表明:在均匀媒质中,磁感应强度 \vec{B} 沿任意闭合曲线 C 的环路积分,等于该闭合曲线 C 所交链(包围)的电流的代数和与媒质导磁率的乘积。当所交链的电流流向与闭合曲线 C 的积分路径绕行方向符合右手螺旋关系时,该电流取正,反之则取负。若闭合曲线 C 不包围电流,即 C 不与电流交链,则 \vec{B} 在闭合曲线 C 上的环量为零。

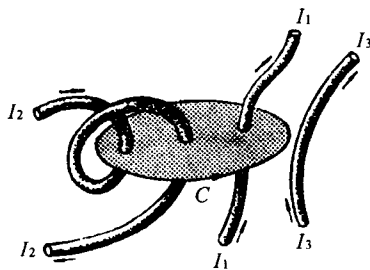


图 1.4.1

如果电流不是集中于穿过闭合曲线 C 所包围曲面 S 的导线,而是分布在这曲面 S 上,则穿过曲面 S 的电流等于该曲面上电流密度的通量(如图 1.4.1),即

$$\sum_k I_k = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

因此

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.4.2)$$

二、磁场强度 \vec{H}

引入反映磁场特性的另一物理量 \vec{H} 。令

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.4.3)$$

\vec{H} 称为磁场强度,在 SI 单位制中其单位为安[培]/米(A/m)。

引入了磁场强度 \vec{H} 后,环量 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$ 可以在任何媒质或不同媒质之间进行计算,其结果等于此环路 C 所交链的电流的代数和,而与媒质无关,即

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k \quad \text{或} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.4.4)$$

此为推广的安培环路定律。

三、应用安培环路定律求解磁场

对于具有一定对称性的载流导线的磁场分布,在磁场中存在一些特殊的环路 C 。在这些环路上,各点的 \vec{B} 与该处的 $d\vec{l}$ 方向有相同的夹角,且 \vec{B} 的大小各点相同。这时便可将积分 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 中的 \vec{B} 提到积分号外,从而利用安培环路定律方便地求解磁场问题。这犹如在静电场中运用高斯定理求解电场问题。