Youxianyuan Yu Jinsifa

有限元与近似法

〔英〕O.C.辛克维奇
K.摩根 著

陶振宗　张述良　周之德　译

赵超燮　校

人民交通出版社

Finite Elements and Approximation
O.C.ZIENKIEWICZ K.MORGAN
John Wiley & Sons,Inc.1983

有限元与近似法
〔英〕O.C.辛克维奇 K.摩根 著
陶振宗 张述良 周之德 译
赵超燮 校
人民交通出版社出版发行
（北京和平里东街10号）
各地新华书店经销
人民交通出版社印刷厂印刷
开本：850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张：11.875 字数：299千
1989年12月 第1版
1989年12月 第1版 第1次印刷
印数：0001—1950册 定价：9.00元

内 容 简 介

“有限元与近似法”以讲述有限元法为核心，通过大量的工程实例和习题，深入浅出地讲述了有限元法的数学思想和基本方法，并总结了有限元法与各种近似方法的关系。本书共分八章：差分法；加权残数法；有限元法；高次单元；映射与数值积分；变分法；时域问题及误差分析。通过阅读该书能较大地提高有限元法理论水平，加深对有限元法本质的理解，加强解决实际问题的能力。

本书附有大量的例题和习题，可作为大学高年级学生和研究生的教材，也可作为广大科技工作者的参考书。

译 者 序

原书是 1983年10月 O.C. 辛克维奇教授来华时送我的，当时即组织力量翻译，但因某种原因拖到今天才能与大家见面，在此谨致歉意。

原书以讲述有限元法为核心，从求解各种问题的控制微分方程着手，贯穿试探函数逼近真解的主线。通过大量的工程实例和习题深入浅出地阐述了有限元法的数学思想和基本方法，并以独特的见解总结了有限元法与各种近似方法的关系。我认为该书不仅弥补了一般有限元数学理论工作者在工程实践上的不足，也弥补了工程技术人员在有限元理论上的欠缺，所以本书对于工程技术人员和理论工作者都是一本极好的参考书，同时也可以作为大学高年级学生和研究生的试用教材。

原书文笔流畅、讲述清晰，循序渐进地引入新概念。在改善近似解精度的基础上引出残数的概念；在全域试探函数逼近的基础上引出分片试探函数逼近的概念，从而自然地导出有限元法的基本思想；从加权残数表达式引出弱列式和自然边界条件的概念；从计算自动化的角度引出层次单元和正交形函数的概念；为解决复杂边界与网格自动剖分，引出映射概念等等。在引出新概念的同时与相应有关的概念进行对比，使读者加深对新概念的理解。

原书内容新颖、丰富，涉及有限元法的各个方面，对一些最新成就，如层次单元、映射单元等，也都进行了介绍。

原书紧密联系实际，不仅有大量的例题而且附有大量的习题，注重基本技能的训练。许多抽象概念、解法都通过例题十分清楚地表达给读者。

原书曾作为北京工业大学87级和铁道科学研究院86级硕士研究生“结构数值分析”课程的主要教材，同时也作为铁道科学研究院86级博士生的主要参考书。学员们反应良好，普遍认为是目前适用于研究生的一本好参考书。在教学过程中，同学们对例题和习题进行演算，并发现原书的一些错误，特此表示感谢。

约请陶振宗（序言第1、2、3章）、周之德（第4、5章）、张述良（第6、7、8章）等同志进行了翻译。全书由我主校，在审校过程中，魏钢、赵振基和崔晓欣等同志协助我完成了部分工作。译稿虽经大家的努力，同时也改正了许多错误，但由于水平所限，错误在所难免，尚祈广大读者与老师同学们批评指正。

赵超燮

于北京工业大学

1988年7月30日

序　　言

今天，有限元法已成为近似求解微分方程的强有力工具，这些微分方程描述各种物理现象。有限元法在工业和科学研究中得到广泛应用，的确可以说没有有限元法（及其得力助手——计算机）许多问题就无法求解。尽管有限元法业已普及，但对于经过标准大学本科课程（甚至有许多研究生课程）训练的用户来说，仍经常缺乏对有关原理的理解。本书的目的就是面向这些读者，并作为大学本科生或低年级研究生有限元法课程基础教材。许多年来，在作者所在的学院里，本书的大部分内容已成土木工程系学生的一门必修基础课，我们发现学生很容易接受这些原理。在撰写本书时，注意到还有大量的工程师和物理学家读者，因而尽力使取材适合于广大读者的要求。

自从采用“有限元法”这个词以来，大约已有25年了。那时，这种离散方法主要应用于结构分析领域，随后用来求解连续体问题。随着对基本方法的深入理解，愈发明显地知道有限元法源自其它的数学家近似方法（诸如瑞雷-里兹法和伽辽金法），并且这种一般性为数学家开辟了一个有吸引力的领域。但很遗憾，他们的大部分文章是用一种使得其它人难以理解的语言来表达的。因而，在本书中虽然保持足够的严谨但尽力使具有微积分基本知识的人易于理解的形式来描述。

在有限元法出现之前，已有许多数值近似计算方法。边界解法和有限差分法已经建立了自己的应用范围——这些方法的支持者自称它们具有特殊的优越性，在那时这些支持者们经常与提倡有限元法的人进行争论。今天，我们中间的有些人看到了求解由微分方程所定义的问题的各种近似方法本质上的统一性，在本书

中始终强调了这一点。我们尽力说明“广义有限元法”能够包含所有可能的近似方法，这样就为用户“优选近似方法”提供了机会。基于这些原因，本书就从有限差分——可能是最明显的（和最古老的）近似方法——这一章开始。

本书中有足够数量的例题和习题，以便使本书适合于作为一本教科书（或自学用书）。欢迎读者提出任何建议和批评。

最后，我们非常感谢唐·凯利博士为有关误差估计的第八章所作的大部分工作，也非常感谢斯旺西大学土木工程系的秘书们协助打字。

O.C.辛克维奇　K.摩根

联合王国

威尔士·斯旺西

1982年9月

目　录

第一章　连续体边值问题和有限差分法

第1.1节　引　　言

在研究物理现象的定量描述时，工程师或物理学家通常要利用适当的边界条件和初始条件，在一定范围里（或域）建立有效的常微分方程组或偏微分方程组。这时数学模型是完整的，对于实际应用仅需一组特定数据的解。由于在通常几何边界条件下只是最简单的方程形式才能利用已有的数学方法精确求解，因而我们遇到了主要的困难。常系数常微分方程是现有标准解法的少数例子之一，即使这样，如含有大量应变量仍会遇到相当大的困难。

为了克服这些困难和利用在本世纪发展起来的最强有力工具——数字计算机，必须将问题改写成仅含有算术基本运算的纯代数形式。为此，可以利用由微分方程组所定义的连续体问题的各种**离散化**形式。在这种离散化中，采用有限个未知参数来代替描述未知函数或函数的无限数集，这个过程通常要求一些近似解形式。

在各种可能的离散化形式中，有限差分法是最简单的形式之一，本章将阐述有限差分法的一些基本实质，而其余各章将涉及**各种试探函数**近似法，这些近似法在广义分类时将归纳到**有限元法**中去。读者以后会发现，甚至有限差分法也可以归结为这个更广义分类的一个子类。

在深入讨论之前，着重讨论一些特定的问题，作为以后例题的基础。很显然，在一本书的篇幅里，详细讨论多方面的物理问题并给出每个问题的基础知识是不可能的。然而，希望所选择的

少数例子可以作为一般逼近原理的引导，读者可以在自己特定的具体情况中去运用这些原理。

第1.2节 连续体问题的例题

研究图1.1a所示的例题，它表示一个二维域Ω中的热流问题。如果用 q_x 和 q_y 分别表示在单位时间内沿 x 和 y 轴方向单位长度上的热流，则在尺寸为 $dxdy$ 的微元上排流和进流之差 D 应为：

$$D = dy\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx - q_x\right) + dx\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy - q_y\right) \tag{1.1}$$

按照热量守恒定律，这个量必等于单位时间内微元上所产生热量 $Qdxdy$ 和由于温度变化所释放的热量 $-\rho c\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)dxdy$ 的和。这里，Q随位置与时间而变化，c是比热，ρ是密度，$\phi(x, y, t)$表示温度分布。显然由这个恒等式可导出下列微分关系

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q + \rho c\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

该式必定在整个问题域Ω上得到满足。

现在介绍在各向同性介质[1]中控制热流的物理定律。可以写出在任一方向n的热流分量

$$q_n = -k\frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{1.3}$$

式中k表示介质的特性，通称为热传导系数。具体地说，对于各向同性材料沿x和y方向的热流分量可以写成

$$q_x = -k\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$q_y = -k\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{1.4}$$

[1]——章末参考文献编码，以后不再注明。

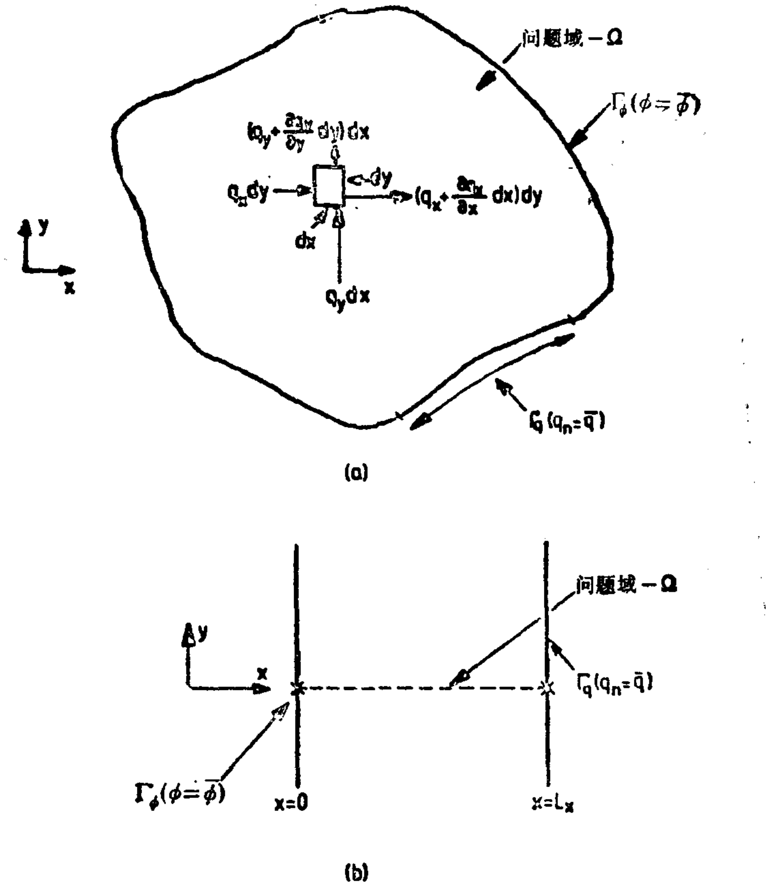

图1.1　连续体例题
(a)二维热传导；(b)一维热传导

由关系式（1.2）和（1.4）定义本例题的控制微分方程组，现在要求解三个应变量 q_x，q_y 和ϕ。

这个解需要某时刻（比如说$t=t_0$）**初始条件**的说明（例如在这个时刻，可以给出在Ω域内各处的温度分布）。以及该问题的表面或边界Γ上的**边界条件**的说明。一般地说边界条件可分为两类。

在第一类边界条件中，温度值定为 $\bar{\phi}$ (x, y, t)，这类条件适合于边界的Γ_ϕ部分，于是得到

$$\text{在}\Gamma_\phi\text{上} \qquad \phi - \bar{\phi} = 0 \tag{1.5}$$

这种形式的边界条件常称为狄利克雷边界条件。

在第二类边界条件中，沿垂直于边界方向 n 上的热排流值定为$\bar{q}(x, y, t)$，这类条件适合于余下的边界 Γ_q 部分，于是写出

$$\text{在}\Gamma_q\text{上} \qquad q_n - \bar{q} = 0 \tag{1.6a}$$

或者写成另一形式

$$\text{在}\Gamma_q\text{上} \qquad -K\frac{\partial\phi}{\partial n} - \bar{q} = 0 \tag{1.6b}$$

这类边界条件称为诺伊曼边界条件。

现在，本题完全可以由(1.2)，(1.4)，(1.5)和(1.6)式所定义，原则上，求解这个方程组可以得到描述各个时刻的ϕ，q_x和q_y分布值。

这个问题还可以用式(1.4)消去式(1.2)中的q_x和q_y所形成的另一种形式来表达，结果为单个自变量的高阶微分方程，完成消元后得到方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + Q - \rho c\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

上式仍然要求说明初始条件和边界条件。

上面讨论了在时间和空间域内定义的问题，前者要求说明初始条件。此处自变量是 x，y 和 t。如果假定是稳态条件（即问题不随时间而变化，也就是 $\partial/\partial t = 0$），则控制方程（1.2）或(1.7)可简化，由式(1.7)得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + Q = 0 \tag{1.8}$$

在求解时只要求(1.5)和(1.6)的边界条件。这类边值问题将是本书大部分篇幅所讨论的主题，而在第七章还将讨论非稳态方程组并研究可能的求解方法。

当已写出二维问题的控制方程，就可以很容易推广到涉及更