考研数学题库精编系列丛书

考研者→备战应考的良师益友
大学生→训练提高的最佳选择

微积分题库精编

陈放

经济类

- 精讲指要
- 题型例析
- 练习题萃
- 自我检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

微积分题库精编

（经 济 类）

陈 放

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分题库精编.经济类/陈 放.—沈阳:东北大学出版社,2000.3

(考研数学题库精编系列丛书)

ISBN 7-81054-478-0

Ⅰ.微… Ⅱ.陈… Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02561 号

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110006)

电话:(024)23890881 传真:(024)23892538

沈阳市市政二公司印刷厂印刷 东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm 1/32 字数:359 千字 印张:13.875

2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:孟 颖 郭爱民 责任校对:米 戎

封面设计:唐敏智 责任出版:杨华宁

定价:21.00 元

前　言

按照新修订的经济学硕士研究生入学数学考试大纲的要求，为了帮助经济类的在校学生和自学者学好经济应用数学微积分，也为备考研究生提供一份实用的学习资料，我们编写了《微积分题库精编》这本书。

本书将经济数学（微积分）按考试大纲所要求的概念、定理和公式进行了简明扼要的叙述、归纳和总结；按问题分类，得出了各类问题的解题规律、方法和技巧。它不同于一般的教材、习题集和题解，自具特色。本书所选用的实例较多，且梯度大、类型广。例题部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版的《微积分》中的典型习题。另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学试题和1979年至1985年全国各高校研究生入学考试的数学试题及相关的一些类型题。考虑到经济类的学生和自学者学习经济应用数学微积分的困难，编写此书时，在选题理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点。对一些较重要的问题，作出了必要的解题方法分析。在很多的解答后加写了注意部分，以便读者总结解题经验，避免出现常犯的错误。此外，每单元后均设有必要的单元测练题，每章后选编了测试题，便于读者能很好地掌握所学到的内容和方法。

通过对入学试题的研讨，使有志于攻读硕士学位的同

志了解考研试题的特点及逐年发展的趋势。从知识上、题型上、方法上和技巧上做好应试准备，做到心中有数。这些考题一般并非都是难题。其主要特点是全面、准确地反映了考研大纲的要求。多作考题及相关的类型题，并由此总结和归纳解题规律、方法和技巧，对于启迪思维，开发智力，提高能力及加深对《微积分》的理解都是大有裨益的。

本书也可供全日制大专院校、电大、职大等广大学生学习微积分时阅读和参考；对于自学者和有志于攻读经济学和工商管理（MBA）硕士研究生的同志，本书将会有很大的帮助；对于从事《微积分》教学的教师，也有一定的参考价值。

目前适合经济类学生阅读的微积分课外读物不多。作者使用多年来在教学过程中所积累的资料，汇集了自1979年至1985年全国各高校研究生入学考试的试题，以及自1987年至1998年的数学三、数学四（原数学四、数学五）的大部分试题，编写成这本书。为推进我国高校教学改革尽绵薄之力。希望它能激起在校和自修的学生学习《微积分》的浓厚兴趣。本书在出版过程中得到有关同志的关心和帮助，这里，谨向他们表示衷心地感谢。同时，也要向对本书给予厚爱和提出积极建议的广大读者表示深深的谢意。

由于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，欢迎读者批评指正。

陈 放 谨识

2000年元月

于东北财经大学

目　　录

第一章　函数·极限·连续

第一单元　函　数

内容精讲指要

一、函数的概念

定义　设 x 与 y 是两个变量，分别在实数集合 X 与 Y 中取值．对每一个值 $x\in X$，按照某一法则 f，存在着惟一确定的值 $y\in Y$ 与之对应．记为 $f(x)$．称 y 是 x 的函数．记作

$$y=f(x)$$

称 x 为自变量，y 是因变量，X 是定义域．

函数值的全体，即集合

$$\{y\in Y \mid y=f(x),\ x\in X\}$$

称为函数的值域，记作 $f(x)$．显然 $f(x)\subset Y$．

注意　(1) 这里定义的函数是单值的．例如由 $x^2+y^2=R^2$ 解出 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$．我们分别讨论其中之一(一个单值分支)．

(2) 只有一个自变量的函数，称为一元函数．

【例 1-1】　已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$．求 $f(x)$的定义域及 $f[f(-7)]$的值．

【解】 若使 $f(x)$有意义，应有$\begin{cases}3-x>0\\3-x\neq1\\49-x^2\geqslant0\end{cases}$

解之，有 $-7\leqslant x<2$ 及 $2<x<3$. 故 $f(x)$的定义域为$[-7,2]\cup(2,3)$.

因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg10}$，所以 $f[f(-7)]=\dfrac{1}{\lg2}+4\sqrt{3}$.

函数概念的本质特征是确定了函数的两个要素：定义域和对应法则. 定义域是自变量和因变量能相互联系，构成函数关系的条件. 若无此条件，函数就没有意义了. 对应法则是理解函数概念的关键，函数关系不同于一般的依赖关系，"y 是 x 的函数"并不仅仅意味着 y 随 x 的变化而变化. 函数关系也不仅同于因果关系.

记号 $f(\quad)$有着广泛的涵义，不能仅认为它只表示某个数学表达式. 因为只要确立了对应法则，就可以用它来表示. 可以表示成一个或几个数学表达式，也可以表示为一个图形、一张表格.

【例 1-2】 设 $f(x)$对一切实数 x，y，满足等式 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq0$，$f(1)=a$. 求证：(1) $f(0)=1$；(2) 对一切自然数 n，有 $f(n)=a^n$.

【证】 (1) 令 $x=y=0$，则 $f(0)=[f(0)]^2$. 因为 $f(0)\neq0$，所以 $f(0)=1$.

(2) 当 $n=1$ 时，$f(1)=a^1=a$ 成立；

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $f(k)=a^k$.

当 $n=k+1$ 时，因为 $f(k+1)=f(k)\cdot f(1)$，即 $a^{k+1}=a^k\cdot a^1$. 所以对一切自然数 n，都有 $f(n)=a^n$.

【例 1-3】 下列函数中哪组是同一函数?

(A) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$；

(B) $f(x)=\ln|x|$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2$；

(C) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$.

【解】 答案：(B).

对于(A)，$f(x)$的定义域是不等式$\frac{x+1}{x}\geqslant 0$的解，$g(x)$的定义域是不等式$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x>0\end{cases}$的解. 显然$f(x)$与$g(x)$的定义域不同.

(B) 对于任意实数x，$\ln|x|=\ln\sqrt{x^2}=\frac{1}{2}\ln x^2$. 且$f(x)$与$g(x)$的定义域均为实数集$\mathbf{R}$. 故为同一函数.

对于(C)，当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$g(x)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. 此时$f(x)$与$g(x)$的对应法则相同，但$f(x)$的定义域是实数集$\mathbf{R}$，$g(x)$的定义域是$[-1,1]$. 故不是同一函数.

注意 当两个函数的对应法则和定义域相同时，即使变量与对应法则使用的符号不同，实际上也是同一函数(或称相同). 但当两个函数的对应法则和值域相同时，并不表明这两个函数一定是同一函数. 此时关键是看其定义域是否相同.

【例 1-4】 设$f'(-x)=x[f'(x)-1]$，求$f(x)$.

【解】 令$-x=t$，有$f'(t)=-t[f'(-t)-1]$.

即
$$f'(x)=-x[f'(-x)-1]$$

从而有
$$\begin{cases}x=xf'(x)-f'(-x)\\ x=f'(x)+xf'(-x)\end{cases}$$

解之，得
$$f'(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

积分，有
$$f(x)=x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x+C.$$

【例 1-5】 设$f(x)$满足$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，求$f(x)$.

【解】 令$t=\frac{1}{x}$，有$f\left(\frac{1}{t}\right)-2f(t)=\frac{1}{t}$

即有
$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}$$

将此方程两端乘以 2 代入题设方程，有

$$-3f(x)=x+\frac{2}{x},$$

故 $$f(x)=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$ 为所求.

二、函数的性质

1. 单调性 设 $f(x)$在区间 X 上有定义，对于任意的 x_1，$x_2 \in X$，且 $x_1<x_2$. 若

$f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$在 X 上单调增加;

$f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$在 X 上单调减少.

2. 奇偶性 设 $f(x)$在关于原点对称的区间 X 上有定义，若对任意的 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$. 称 $f(x)$为偶函数；若有$f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$为奇函数.

3. 有界性 设 $f(x)$在 X 上有定义，如果存在常数 $M>0$，对于任意的 $x\in D$，恒有$|f(x)|<M$，称 $f(x)$在 X 上有界，否则称为无界.

当 $f(x)<M$，称 $f(x)$在 X 上有上界;

当 $f(x)>-M$，称 $f(x)$在 X 上有下界.

4. 周期性 设 $f(x)$在 X 上有定义，如果存在常数 $T>0$，对于任意的 $x\in X$，有 $f(x+T)=f(x)$. 称 $f(x)$为周期函数. 满足于上式的最小正数 T_0，称为 $f(x)$的周期.

注意 (1) 并不是所有函数都具有这些特征;

(2) 函数的“有界”或“单调”与所讨论的区间有关;

(3) 具有奇偶性函数的定义域关于原点是对称的. 若 $f(x)$是奇函数，则 $f(0)=0$. 而 $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$是奇函数的有效方法. 对于$(-a, a)(a>0)$上的任意函数 $f(x)$. 则 $g(x)=f(x)+f(-x)$为偶函数，$h(x)=f(x)-f(-x)$为奇函数. 若 $f(x)$的定义域关于原点不对称，则 $f(x)$一定不是奇函数或偶函数.

(4) 周期函数的周期通常是指最小正周期，但不是任何函数都有最小正周期.

【例 1-6】 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义，$a>0$，$b>0$，若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调增加，则________成立.

(A) $f(a+b)>f(a)$;　　(B) $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$;

(C) $f(a+b)\geqslant a+b$;　　(D) 以上均不成立.

【解】 答案：(A)，(B).

因为由 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调增加，且 $a+b>a$，则有

$$\frac{f(a+b)}{a+b}\geqslant\frac{f(a)}{a},\ \text{即有}\ f(a+b)\geqslant\frac{a+b}{a}f(a)>f(a)$$

所以(A)成立.

由 $\dfrac{f(a+b)}{a+b}\geqslant\dfrac{f(a)}{a}$，有 $\dfrac{f(a+b)}{a+b}\geqslant\dfrac{f(b)}{b}$

从而，有　$\dfrac{a}{a+b}f(a+b)\geqslant f(a)$，$\dfrac{b}{a+b}f(a+b)\geqslant f(b)$

于是，有 $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$. 即(B)成立.

但由 $f(a+b)\geqslant a+b$，可得 $\dfrac{f(x)}{x}\geqslant 1$，而题设未给出如此条件，所以(C)不成立.

【例 1-7】 同一对称区间上的奇函数与偶函数之和是________.

(A) 奇函数;　　(B) 偶函数;

(C) 非奇非偶函数;　　(D) 以上均可能.

【解】 答案：(D).

因为偶函数与奇函数之和确是非奇非偶函数. 但对于 $\varphi(x)=0$，与奇函数相加为奇函数；与偶函数相加为偶函数.

【例 1-8】 下列函数无界的是________.

(A) $f(x)=\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|$，$x\in\mathbf{R}$;

(B) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$;

(C) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x},\ x\in(0,\ +\infty)$;

(D) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\in(0,\ 1)$.

【解】 答案:(C).

对于(A),因为 $-(x^2+1)\leqslant 2x\leqslant x^2+1$,即有 $|2x|\leqslant x^2+1$,则 $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$. 故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有界.

对于(B),由 $x\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$,有 $\dfrac{\ln x}{x}\leqslant 0$,且 $\ln x$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$上单调增加,有 $\ln x\geqslant \ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$,所以有

$$\frac{\ln x}{x}\geqslant\frac{-\ln 2}{x}\geqslant\frac{-\ln 2}{\dfrac{1}{2}}=-2\ln 2.$$

故 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$上有界,即 $-2\ln 2\leqslant f(x)\leqslant 0$.

对于(C),取任意 $M>0$,存在 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi}$,k 为大于$\left[\dfrac{M}{2\pi}\right]$的自然数,使

$$f(x_0)=\frac{1}{\dfrac{1}{2k\pi}}\cos\frac{1}{\dfrac{1}{2k\pi}}=2k\pi>2\pi\frac{M}{2\pi}=M$$

所以 $f(x)$在$(0,\ +\infty)$内无界.

对于(D),当 $x\in(0,\ 1)$时,有 $0<\sin x<x$. 即有 $0<\dfrac{\sin x}{x}<1$. 从而可知 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,\ 1)$内有界.

注意 对于无界函数来说,一般都可以缩小定义域得到新的有界函数. 但不能通过去掉定义域中的有限个点或改变有限个点上的函数值而成为有界函数. 这是因为,无界是一种趋势,这种趋势与有限个点上的函数值无关.

【例 1-9】 下列函数中，周期函数是________.

(A) $f(x)=\frac{1}{2}\sin^3 3x+\tan^3 x$； (B) $f(x)=\sin|x|$；

(C) $f(x)=\ln(\cos x+\pi)+D(x)$，

其中 $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$

【解】 答案：(A).

对于(A)，$y=\frac{1}{2}\sin^3 3x$ 的周期是 $\frac{2}{3}\pi$，$y=\tan^3 x$ 的周期是 π，从而可知 $f(x)$的周期是 2π.

对于(B)，$f(x)=\sin|x|$不是周期函数.

反证：不妨设 $f(x)=\sin|x|$是周期函数，周期为 T. 对于任意的 x，有 $\sin|x|=\sin|T+x|$. 令 $x=0$，得 $T=k\pi$，$k=1, 2, \cdots$ 然而对 $x=\frac{\pi}{2}$，$T=\pi$，却有 $\sin\left|\frac{\pi}{2}\right|\neq\sin\left|\frac{\pi}{2}+\pi\right|$. 由此可知，设 $f(x)$为周期函数不成立. 故 $f(x)$不是周期函数.

对于(C)，因为 $y=\ln(\cos x+\pi)$是周期为 2π 的周期函数，但 $y=D(x)$是周期为任意正有理数的周期函数. 故没有公共周期. 所以 $f(x)$不是周期函数.

注意 两个周期函数在它们的周期有最小公倍数时，其四则运算所得出函数仍为周期函数，如本题中的(A). 但并不是两个周期函数的上述运算所得函数必为周期函数，如本题中(C).

三、反函数、复合函数

定义 1 设 $y=f(x)$在 X 上有定义，值域 $f(x)=Y$. 若对任意一个 $y\in Y$ 都有惟一确定的 $x\in X$，使得 $f(x)=y$. 这样的对应关系所决定的 Y 到 x 的函数，称为 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$.

反函数的定义域和值域恰好是原来函数的值域和定义域，且

$f[f^{-1}(x)]=x$，任给 $x\in Y$；$f^{-1}[f(x)]=x$，任给 $x\in X$.

由反函数的定义知，X 与 Y 之间的对应关系双方是单值的，即一一对应的. 因此一一对应的函数必有反函数. 在 X 上严格单调函数必有反函数.

因为函数的表示与字母的选取无关，而习惯上常把 x 取为自变量，y 作因变量. 所以 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常写成 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

【例 1-10】 下列函数中不满足 $f^{-1}=f$ 的是__________.

(A) $f(x)=\dfrac{ax-b}{cx-a}$；　　(B) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(C) $f(x)=\sqrt[3]{a^3-x^3}$；　　(D) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

【解题思路】 此题目中所指的满足 $f^{-1}=f$ 的函数关系是与 $f^{-1}(x)=f(x)$ 有区别的. 例如 $g(x)=-x$，$x\in\mathbf{R}^+$. 而 $g^{-1}(x)=-x$，$x\in\mathbf{R}^-$. 此时有 $g^{-1}=g$. 但 $g^{-1}(x)\neq g(x)$. 由此可知，除表达式之外，只有当函数的定义域和值域相同时，$f^{-1}=f$ 才能等于 $f^{-1}(x)=f(x)$，如此题中的(B).

【解】 答案：(D).

此题的解法是分别求以上各函数的反函数，比较其对应法则即得.

定义 2 已知函数 $y=f(u)$，$u\in X_f$，$y\in Z_f$；$u=g(x)$，$x\in X_g$，$u\in Z_g$. 若 $Z_g\cap X_f\neq\emptyset$，则称函数 $y=f[g(x)]$，$x\in X_f=\{x\mid g(x)\in X_f\}$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数. 其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

由此定义可知，函数的复合是有条件的，并不是任何几个函数都可以复合成一个函数.

【例 1-11】 下列各组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有可能复合为 $f[g(x)]$ 的是__________.