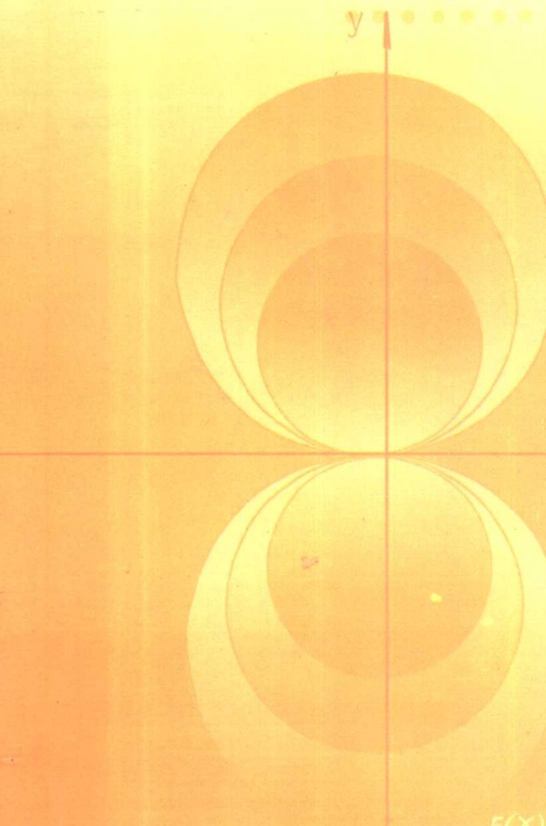
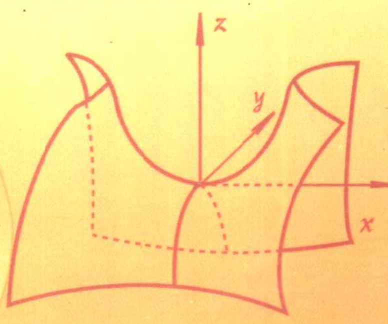
高职、成人教育适用

高等数学（下册）

林 益 刘国钧 乔维佳 谢 鹏





$$F(X)=\begin{cases}0, & X<0\\ X^2, & 0\leqslant X\leqslant 1\\ 1, & X>1\end{cases}$$

华中科技大学出版社

高 等 数 学

（下册）

林　益　刘国钧
乔维佳　谢　鹏

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/林益　等
武汉:华中科技大学出版社， 2000年1月
ISBN 7-5609-2076-4

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①林…　②刘…　③乔…　④谢…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

高等数学(下册)　　林益　刘国钧　刮维佳　谢鹏

责任编辑:周怀治　李　德　　封面设计:刘　卉
责任校对:郭有林　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

经　　销:新华书店湖北发行所

录　　排:华中科技大学出版社照排室
印　　刷:华中科技大学出版社沔阳印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:13.5　字数:322 000
版次:2000年1月第1版　印次:2001年8月第2次印刷　印数:3 001—8 000
ISBN 7-5609-2076-4/O·200　定价:15.80元

内 容 提 要

本书根据高等职业技术学院和全国成人高等教育高等数学基本要求编写。内容包括矢量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程等。针对高职和成人学习特点，每章末均有归纳性较强的小结及较全面的自测题(附解答)，书末有测试题(附答案)。

本书可供高职和成人教育系列的理工科各专业的本科及专科使用，亦可作为自学考试相应专业的教学参考书。

前　言

这本教材是由从事高等数学教学多年的教师，按照1998年“全国成人高等教育高等数学课程教学基本要求”，结合长期的教学实践经验编写而成.针对成人教育的特点，本书在内容上力求适用、够用、简明、通俗；在例题选择上力求全面、典型；在论述形式上则力求详尽、易懂.本书配备了比较全面的基本练习题与综合性练习题.为满足读者进行阶段性复习与自我检测，在每一章末安排了该章的小结及自测题.小结写得比较详细，有基本要求、内容提要及学习指导，对自测题亦给出了解答.全书习题均附有答案.

全书共分12章，其中第一章与第二章由毕志伟副教授撰稿；第三章与第四章由王汉蓉副教授撰稿；第五章与第六章由魏宏副教授撰稿；第七章与第八章由乔维佳副教授撰稿；第九章与第十章由刘国钧副教授撰稿；第十一章与第十二章由林益教授撰稿.全书插图由谢鹏副教授用计算机绘制.本书分为上、下两册，上册由毕志伟统稿，下册由林益统稿，全书的习题由刘国钧审校.

感谢林化夷教授认真仔细地审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵的意见.

本书难免有不足甚至错误之处，恳请读者指正.

编者

1999年2月

目　　录

第七章　矢量代数与空间解析几何

本章分为两部分：第一部分是矢量代数，它是研究科学问题的重要工具，它能使物理学与数学领域的许多问题的解法简捷而直观. 这一部分主要介绍矢量的加、减法及乘法等运算；第二部分是空间解析几何，主要介绍空间中一些常见的曲面和曲线的方程及其图形，这一部分知识对学习多元函数微积分学是不可缺少的.

§7.1　空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们已经在平面上建立了坐标系，将每一个点用其坐标表示，使几何问题化为点的坐标间的代数问题，从而可以利用代数的方法研究几何问题. 同样为了要运用代数的方法研究空间的图形——曲线与曲面，必须建立空间内的点与有序数组之间的对应关系，为此先引进空间直角坐标系.

7.1.1　空间直角坐标系

现实生活所在的空间叫做“三维（或三度）空间”. 在这个空间里，可以有左右、上下、前后三个方向的活动，称为有三个自由度. 直线是一维（或一度）空间，取了坐标系以后，它上面的点的位置可以用一个实数来确定；平面是二维（或二度）空间，取了坐标系以后，它上面点的位置可以用两个有序实数组成的数组来确定. 可以推想，三维（或三度）空间里任一点的位置要用三个有序实数组成的数组来确定.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴（横

轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴,通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线;它们的正向通常符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大姆指的指向就是 z 轴的正向,如图 7-1 所示.

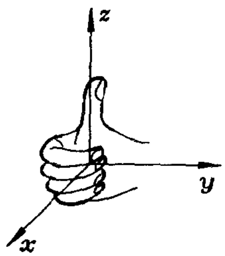


图 7-1

任意两条坐标轴可以确定一个平面,x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面,y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 面,z 轴和 x 轴所确定的平面称为 zOx 面,这三个平面统称为**坐标面**。三个坐标面把空间分成八个部分,每个部分称为一个**卦限**(图 7-2). 以 x 轴正半轴、y 轴正半轴、z 轴正半轴为棱的卦限称为第一卦限,在 xOy 平面上方的其他三个卦限依逆时针方向依次称为第二、三、四卦限;在 xOy 平面下方与第一卦限相对的为第五卦限,然后依逆时针方向依次得到第六、七、八卦限.

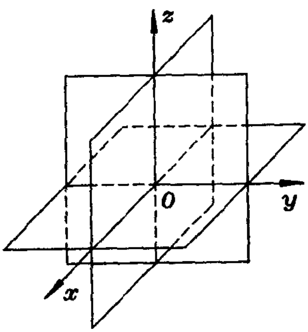


图 7-2

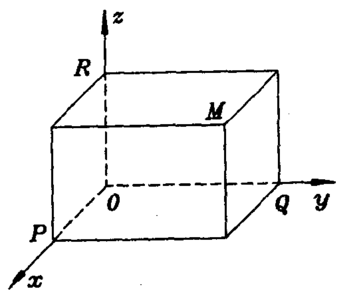


图 7-3

设 M 为空间一已知点. 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R(图 7-3),这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z).

反过来，已知一有序数组(x,y,z)，我们可以在x轴上取坐标为x的点P，在y轴上取坐标为y的点Q，在z轴上取坐标为z的点R，然后通过P、Q和R分别作与x轴、y轴和z轴垂直的平面，这三个垂直平面必相交于唯一的一点M.

这样，通过直角坐标系，空间的点的集合与有序的实数组(x,y,z)的集合之间建立了一一对应的关系. 实数x、y、z称为M点的坐标，记作$M(x,y,z)$，x、y、z分别称为M点的**横坐标，纵坐标**或**竖坐标**.

下面给出空间一些特殊位置点的特征：

坐标面	xOy	yOz	zOx
特　征	$z=0$	$x=0$	$y=0$

这说明，坐标平面上的点的特征是有一个坐标必定是零，而坐标轴上的点的特征为有两个坐标必定是零，即

坐标轴	x 轴	y 轴	z 轴
特　征	$y=0$ $z=0$	$z=0$ $x=0$	$x=0$ $y=0$

不同卦限里的点的坐标符号为

卦　限	一	二	三	四
坐标符号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$
卦　限	五	六	七	八
坐标符号	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

容易推得$M(x,y,z)$关于坐标面、坐标轴、与原点对称的点的坐标分别为

点　M	对称于 xOy 面	对称于 yOz 面	对称于 zOx 面
(x,y,z)	$(x,y,-z)$	$(-x,y,z)$	$(x,-y,z)$

点　M	对称于 x 轴	对称为 y 轴	对称于 z 轴	对称于原点
(x,y,z)	$(x,-y,-z)$	$(-x,y,-z)$	$(-x,-y,z)$	$(-x,-y,-z)$

7.1.2 空间两点间的距离

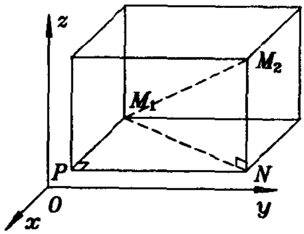


图 7-4

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，两点间的距离用 $d=|M_1M_2|$表示. 欲将 d 用它们的坐标表示出来，为此过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（图 7-4）. 由图可知，长方体的三条边的长度分别等于 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$. 由勾股定理得

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2, \end{aligned}$$

故得

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

这就是空间两点间的距离公式.

例 1 求与点 $P_1(0,0,1)$ 与 $P_2(1,0,2)$ 等距离点的轨迹方程.

解 设 $P(x,y,z)$是此轨迹上的动点，则依题意有

$$|PP_1| = |PP_2|,$$

即

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2}.$$

化简得

$$x + z - 2 = 0.$$

例 2 试证以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$ 与 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 由公式(1)得

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49;$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98;$$
$$|CA|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49.$$

由此可见$|AB|=|CA|$，$|AB|^2+|CA|^2=|BC|^2$，这表明$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

习　题　7.1

1. 求点$M(3,-4,5)$关于各坐标面对称的点的坐标.
2. 求点$M(3,-4,5)$关于各坐标轴对称的点的坐标.
3. 求点$M(3,-4,5)$关于原点对称的点的坐标.
4. 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.
5. 在z轴上求一点，使它到点$M(-4,1,7)$和$N(3,5,-2)$的距离相等.

§7.2　矢量及其线性运算

矢量是由力学、物理学的需要而引入的数学概念.特别是由于流体力学、电磁场理论的发展，促使人们对矢量作更深入的研究.矢量也是研究数学本身许多问题的基础之一.在解析几何里，应用更是直接.

7.2.1　矢量概念

在中学物理学中有两类性质的量.一类量只有大小没有方向，如温度、质量、距离等；另一类量既有大小又有方向，如力、速度、加速度等.前一类量称为**数量**，也叫做**纯量**或者**标量**；后一类量称为**矢量**，也叫**向量**.

矢量常可用有向线段来表示，有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向.起点为M终点为N的有向线段所表示的矢量记为$\overrightarrow{MN}$(图 7-5)，有向线段的起(终)点即是矢

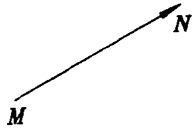


图 7-5

量的起(终)点. 矢量$\overrightarrow{MN}$也可用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示.

矢量 $\boldsymbol{a}$(或$\overrightarrow{MN}$)的大小称为矢量的模(或称为矢量的长度)用$|\boldsymbol{a}|$($|\overrightarrow{MN}|$)表示. 模为 0 的矢量称为**零矢量**,记为 $\mathbf{0}$. 零矢量没有确定的方向,也可以说零矢量的方向是任意的. 称$\overrightarrow{NM}$为$\overrightarrow{MN}$的**负矢量**,写作$\overrightarrow{NM}=-\overrightarrow{MN}$.

在许多实际问题中,矢量与其起点无关,这种矢量称为**自由矢量**. 今后我们只讨论自由矢量(简称矢量),所以矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同.

始点在坐标原点而终点在 M 的矢量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 的**矢径**,记为 $\boldsymbol{r}_M$. 任给矢量 $\boldsymbol{a}$,必有唯一的点 M,使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$. 反之,任给空间中的一点 M,可唯一确定一个矢量$\overrightarrow{OM}$. 这样,通过点 M 与矢量 $\boldsymbol{r}_M$ 的对应,得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应. 下面将看到,这种对应对于矢量的研究与应用是重要的.

方向相同或相反的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 叫做**平行矢量**或**共线矢量**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 为了简化许多命题,规定零矢量与任何矢量平行.

7.2.2 矢量的线性运算

矢量的线性运算是指两个矢量的加法、减法和数量与矢量相乘. 现分别介绍如下.

一、矢量的加法

力或速度的合成是依平行四边形法则施行的. 矢量的加法是这类合成的一种抽象.

定义 1 把矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则从起点到对顶点的矢量称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 7-6).

这种求和的方法称为**平行四边形法则**. 由于矢量可以平行移动,所以,如果把 $\boldsymbol{b}$ 平行移动使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则从 $\boldsymbol{a}$ 的