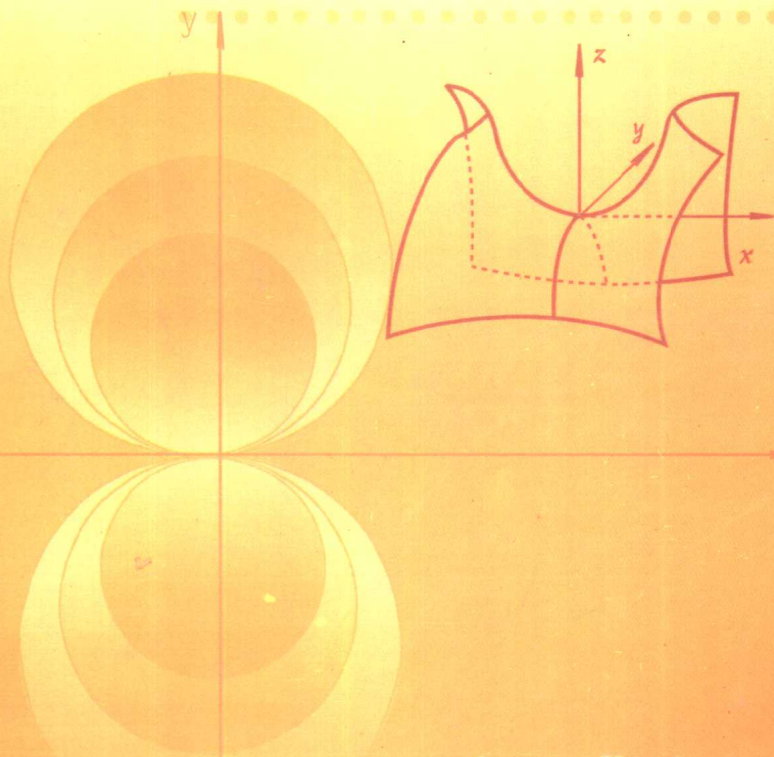


高职、成人教育适用

# 高等数学 (下册)

林益 刘国钧 乔维佳 谢鹏



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

■ 华中科技大学出版社

# 高等数学

(下册)

林 益 刘国钧  
乔维佳 谢 鹏

华中科技大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/林益 等

武汉:华中科技大学出版社, 2000年1月

ISBN 7-5609-2076-4

I. 高…

I. ①林… ②刘… ③乔… ④谢…

Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材

IV. O13

高等数学(下册)

林益 刘国钧 刮维佳 谢鹏

责任编辑:周怀治 李 德  
责任校对:郭有林

封面设计:刘 卉  
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:华中科技大学出版社沔阳印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:13.5

字数:322 000

版次:2000年1月第1版 印次:2001年8月第2次印刷

印数:3 001—8 000

ISBN 7-5609-2076-4/O·200

定价:15.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

## 内 容 提 要

本书根据高等职业技术学院和全国成人高等教育高等数学基本要求编写。内容包括矢量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,常微分方程等。针对高职和成人学习特点,每章末均有归纳性较强的小结及较全面的自测题(附解答),书末有测试题(附答案)。

本书可供高职和成人教育系列的理工科各专业的本科及专科使用,亦可作为自学考试相应专业的教学参考书。

## 前 言

这本教材是由从事高等数学教学多年的教师,按照1998年“全国成人高等教育高等数学课程教学基本要求”,结合长期的教学实践经验编写而成.针对成人教育的特点,本书在内容上力求适用、够用、简明、通俗;在例题选择上力求全面、典型;在论述形式上则力求详尽、易懂.本书配备了比较全面的基本练习题与综合性练习题.为满足读者进行阶段性复习与自我检测,在每一章末安排了该章的小结及自测题.小结写得比较详细,有基本要求、内容提要及学习指导,对自测题亦给出了解答.全书习题均附有答案.

全书共分12章,其中第一章与第二章由毕志伟副教授撰稿;第三章与第四章由王汉蓉副教授撰稿;第五章与第六章由魏宏副教授撰稿;第七章与第八章由乔维佳副教授撰稿;第九章与第十章由刘国钧副教授撰稿;第十一章与第十二章由林益教授撰稿.全书插图由谢鹏副教授用计算机绘制.本书分为上、下两册,上册由毕志伟统稿,下册由林益统稿,全书的习题由刘国钧审校.

感谢林化夷教授认真仔细地审阅了全部书稿,并提出了许多宝贵的意见.

本书难免有不足甚至错误之处,恳请读者指正.

编者

1999年2月

# 目 录

第七章 矢量代数与空间解析几何	(1)
§ 7.1 空间直角坐标系	(1)
7.1.1 空间直角坐标系	(1)
7.1.2 空间两点间的距离	(4)
习题 7.1	(5)
§ 7.2 矢量及其线性运算	(5)
7.2.1 矢量概念	(5)
7.2.2 矢量的线性运算	(6)
习题 7.2	(9)
§ 7.3 矢量的坐标	(9)
7.3.1 矢量的坐标表示式	(9)
7.3.2 方向角与方向余弦	(12)
习题 7.3	(14)
§ 7.4 矢量间的乘法	(14)
7.4.1 两矢量的数量积	(15)
7.4.2 两矢量的矢量积	(19)
7.4.3 混合积	(22)
习题 7.4	(25)
§ 7.5 空间曲面与曲线的一般概念	(26)
7.5.1 空间曲面	(26)
7.5.2 空间曲线及其在坐标面上的投影	(32)
习题 7.5	(37)
§ 7.6 平面与直线	(38)
7.6.1 平面方程	(38)

7.6.2	直线方程	(44)
7.6.3	有关平面与直线的几个问题	(49)
习题 7.6		(58)
§ 7.7	二次曲面	(59)
习题 7.7		(63)
小结		(64)
自测题		(73)
自测题解答		(74)
<b>第八章</b>	<b>多元函数微分学</b>	(77)
§ 8.1	多元函数	(77)
8.1.1	区域	(77)
8.1.2	多元函数的概念	(78)
8.1.3	二元函数的极限与连续	(80)
习题 8.1		(84)
§ 8.2	偏导数与全微分	(85)
8.2.1	偏导数	(85)
8.2.2	高阶偏导数	(89)
8.2.3	全微分	(91)
习题 8.2		(96)
§ 8.3	多元函数求导法	(98)
8.3.1	复合函数求导法	(98)
8.3.2	隐函数求导法	(107)
习题 8.3		(110)
§ 8.4	微分学的几何应用	(111)
8.4.1	曲线的切线与法平面	(111)
8.4.2	曲面的切平面与法线	(114)
习题 8.4		(118)
§ 8.5	方向导数与梯度	(119)
8.5.1	方向导数	(119)

8.5.2 梯度 .....	(122)
习题 8.5 .....	(124)
§ 8.6 极值 .....	(125)
8.6.1 极值与最值 .....	(125)
8.6.2 条件极值 .....	(129)
习题 8.6 .....	(135)
小结 .....	(135)
自测题 .....	(145)
自测题解答 .....	(146)
<b>第九章 重积分</b> .....	<b>(151)</b>
§ 9.1 二重积分的概念与性质 .....	(151)
9.1.1 两个典型问题 .....	(151)
9.1.2 二重积分的定义 .....	(153)
9.1.3 二重积分的性质 .....	(155)
习题 9.1 .....	(157)
§ 9.2 二重积分的计算 .....	(157)
9.2.1 利用直角坐标系计算二重积分 .....	(158)
9.2.2 利用极坐标系计算二重积分 .....	(168)
习题 9.2 .....	(174)
§ 9.3 三重积分 .....	(176)
9.3.1 三重积分的概念 .....	(176)
9.3.2 三重积分的计算 .....	(178)
习题 9.3 .....	(194)
§ 9.4 重积分的应用 .....	(195)
9.4.1 曲面的面积 .....	(195)
9.4.2 重心 .....	(198)
9.4.3 转动惯量 .....	(201)
9.4.4 引力 .....	(203)
习题 9.4 .....	(205)



小结	(206)
自测题	(218)
自测题解答	(220)
<b>第十章 曲线积分与曲面积分</b>	<b>(222)</b>
§ 10.1 第一型曲线积分	(222)
10.1.1 第一型曲线积分的概念	(222)
10.1.2 第一型曲线积分的计算	(224)
习题 10.1	(228)
§ 10.2 第二型曲线积分	(229)
10.2.1 第二型曲线积分的概念	(229)
10.2.2 第二型曲线积分的计算	(232)
习题 10.2	(235)
§ 10.3 格林公式	(236)
10.3.1 格林公式	(236)
10.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	(241)
10.3.3 二元函数全微分式的判定与求积	(246)
习题 10.3	(249)
§ 10.4 第一型曲面积分	(251)
10.4.1 第一型曲面积分的概念	(251)
10.4.2 第一型曲面积分的计算	(252)
习题 10.4	(255)
§ 10.5 第二型曲面积分	(255)
10.5.1 第二型曲面积分的概念	(255)
10.5.2 第二型曲面积分的计算	(259)
10.5.3 两类曲面积分之间的联系	(263)
10.5.4 高斯(Gauss)公式	(265)
习题 10.5	(270)
小结	(271)
自测题	(279)

自测题解答	(282)
第十一章 无穷级数	(285)
§ 11.1 数项级数	(285)
11.1.1 级数的收敛与发散	(285)
11.1.2 无穷级数的基本性质	(288)
11.1.3 正项级数	(291)
11.1.4 任意项级数	(297)
习题 11.1	(301)
§ 11.2 幂级数	(302)
11.2.1 函数项级数	(303)
11.2.2 幂级数的收敛区间与收敛半径	(304)
11.2.3 幂级数的性质	(308)
11.2.4 泰勒级数	(310)
习题 11.2	(316)
§ 11.3 傅立叶级数	(317)
11.3.1 基本三角函数系及其正交性	(318)
11.3.2 傅立叶系数与傅立叶级数	(318)
11.3.3 收敛定理	(320)
11.3.4 $[0, \pi]$ 上的函数展开为正弦级数或余弦级数	(323)
11.3.5 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	(325)
习题 11.3	(329)
小结	(330)
自测题	(338)
自测题解答	(340)
第十二章 常微分方程	(342)
§ 12.1 常微分方程的基本概念	(342)
12.1.1 引例	(342)
12.1.2 微分方程及其类型	(344)

12.1.3	微分方程的解	(345)
习题 12.1		(347)
§ 12.2	一阶微分方程	(348)
12.2.1	变量可分离的方程	(348)
12.2.2	齐次方程	(350)
12.2.3	一阶线性微分方程	(352)
12.2.4	全微分方程	(356)
习题 12.2		(357)
§ 12.3	可降阶的高阶微分方程	(358)
12.3.1	$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	(358)
12.3.2	$y'=f(x, y')$ 型的微分方程	(359)
12.3.3	$y'=f(y, y')$ 型的微分方程	(360)
习题 12.3		(362)
§ 12.4	二阶线性微分方程解的结构	(362)
习题 12.4		(366)
§ 12.5	二阶常系数线性微分方程	(367)
12.5.1	二阶常系数线性齐次微分方程	(367)
12.5.2	二阶常系数线性非齐次微分方程	(370)
习题 12.5		(374)
§ 12.6	微分方程的应用	(375)
12.6.1	几何上的应用	(375)
12.6.2	物理上的应用	(379)
习题 12.6		(382)
小结		(382)
自测题		(387)
自测题解答		(389)
试题一		(391)
试题二		(398)
习题答案		(404)

## 第七章 向量代数与空间解析几何

本章分为两部分:第一部分是向量代数,它是研究科学问题的重要工具,它能使物理学与数学领域的许多问题的解法简捷而直观.这一部分主要介绍矢量的加、减法及乘法等运算;第二部分是空间解析几何,主要介绍空间中一些常见的曲面和曲线的方程及其图形,这一部分知识对学习多元函数微积分学是不可缺少的.

### § 7.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中,我们已经在平面上建立了坐标系,将每一个点用其坐标表示,使几何问题化为点的坐标间的代数问题,从而可以利用代数方法研究几何问题.同样为了要运用代数方法研究空间的图形——曲线与曲面,必须建立空间内的点与有序数组之间的对应关系,为此先引进空间直角坐标系.

#### 7.1.1 空间直角坐标系

现实生活所在的空间叫做“三维(或三度)空间”.在这个空间里,可以有左右、上下、前后三个方向的活动,称为有三个自由度.直线是一维(或一度)空间,取了坐标系以后,它上面的点的位置可以用一个实数来确定;平面是二维(或二度)空间,取了坐标系以后,它上面点的位置可以用两个有序实数组成的数组来确定.可以推想,三维(或三度)空间里任一点的位置要用三个有序实数组成的数组来确定.

过空间一个定点  $O$ ,作三条互相垂直的数轴,它们都以  $O$  为原点,且一般具有相同的长度单位.这三条轴分别叫做  $x$  轴(横

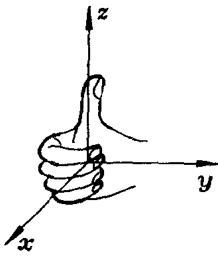


图 7-1

轴)、 $y$ 轴(纵轴)、 $z$ 轴(竖轴),统称为坐标轴,通常把 $x$ 轴和 $y$ 轴配置在水平面上,而 $z$ 轴则是铅垂线;它们的正向通常符合右手规则,即以右手握住 $z$ 轴,当右手的四个手指从 $x$ 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 $y$ 轴正向时,大拇指的指向就是 $z$ 轴的正向,如图 7-1 所示。

任意两条坐标轴可以确定一个平面, $x$ 轴和 $y$ 轴所确定的平面称为 $xOy$ 面, $y$ 轴和 $z$ 轴所确定的平面称为 $yOz$ 面, $z$ 轴和 $x$ 轴所确定的平面称为 $zOx$ 面,这三个平面统称为坐标面。三个坐标面把空间分成八个部分,每个部分称为一个卦限(图 7-2)。以 $x$ 轴正半轴、 $y$ 轴正半轴、 $z$ 轴正半轴为棱的卦限称为第一卦限,在 $xOy$ 平面上方的其他三个卦限依逆时针方向依次称为第二、三、四卦限;在 $xOy$ 平面下方与第一卦限相对的为第五卦限,然后依逆时针方向依次得到第六、七、八卦限。

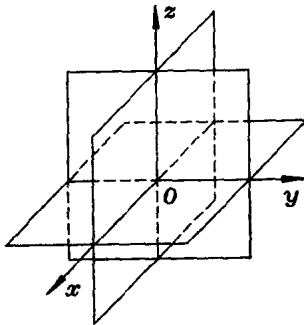


图 7-2

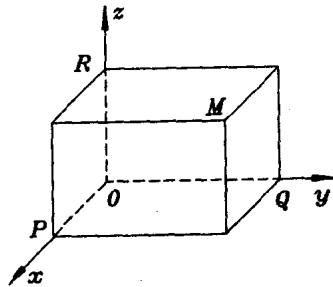


图 7-3

设 $M$ 为空间一已知点,过点 $M$ 作三个平面分别垂直于 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴,它们与 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $z$ 轴的交点依次为 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ (图 7-3),这三点在 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $z$ 轴上的坐标依次为 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 。于是空间的一点 $M$ 就唯一地确定了一个有序数组 $(x, y, z)$ 。

反过来,已知一有序数组 $(x,y,z)$ ,我们可以在 $x$ 轴上取坐标为 $x$ 的点 $P$ ,在 $y$ 轴上取坐标为 $y$ 的点 $Q$ ,在 $z$ 轴上取坐标为 $z$ 的点 $R$ ,然后通过 $P$ 、 $Q$ 和 $R$ 分别作与 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴垂直的平面,这三个垂直平面必相交于唯一的一点 $M$ 。

这样,通过直角坐标系,空间的点的集合与有序的实数组 $(x,y,z)$ 的集合之间建立了一一对应的关系.实数 $x,y,z$ 称为 $M$ 点的坐标,记作 $M(x,y,z)$ , $x,y,z$ 分别称为 $M$ 点的横坐标,纵坐标或竖坐标。

下面给出空间一些特殊位置点的特征:

坐标面	$xOy$	$yOz$	$zOx$
特征	$z=0$	$x=0$	$y=0$

这说明,坐标平面上的点的特征是有一个坐标必定是零,而坐标轴上的点的特征为有两个坐标必定是零,即

坐标轴	$x$ 轴	$y$ 轴	$z$ 轴
特征	$y=0$ $z=0$	$z=0$ $x=0$	$x=0$ $y=0$

不同卦限里的点的坐标符号为

卦限	一	二	三	四
坐标符号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$
卦限	五	六	七	八
坐标符号	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

容易推得 $M(x,y,z)$ 关于坐标面、坐标轴、与原点对称的点的坐标分别为

点 $M$	对称于 $xOy$ 面	对称于 $yOz$ 面	对称于 $zOx$ 面
$(x,y,z)$	$(x,y,-z)$	$(-x,y,z)$	$(x,-y,z)$
点 $M$	对称于 $x$ 轴	对称于 $y$ 轴	对称于 $z$ 轴
$(x,y,z)$	$(x,-y,-z)$	$(-x,y,-z)$	$(-x,-y,z)$
			对称于原点
			$(-x,-y,-z)$

### 7.1.2 空间两点间的距离

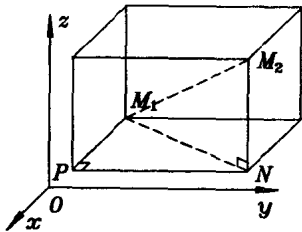


图 7-4

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间两点, 两点间的距离用  $d = |M_1M_2|$  表示. 欲将  $d$  用它们的坐标表示出来, 为此过  $M_1$ 、 $M_2$  各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以  $M_1M_2$  为对角线的长方体 (图 7-4). 由图可知, 长方体的三条边的长度分别等于  $|x_2 - x_1|$ ,  $|y_2 -$

$y_1|$ ,  $|z_2 - z_1|$ . 由勾股定理得

$$\begin{aligned}d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\&= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,\end{aligned}$$

故得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

这就是空间两点间的距离公式.

**例 1** 求与点  $P_1(0, 0, 1)$  与  $P_2(1, 0, 2)$  等距离点的轨迹方程.

**解** 设  $P(x, y, z)$  是此轨迹上的动点, 则依题意有

$$|PP_1| = |PP_2|,$$

即

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2}.$$

化简得

$$x + z - 2 = 0.$$

**例 2** 试证以点  $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$  与  $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形为等腰直角三角形.

**证** 由公式(1)得

$$|AB|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49;$$

$$|BC|^2 = (2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2 = 98;$$

$$|CA|^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2 = 49.$$

由此可见  $|AB| = |CA|$ ,  $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$ , 这表明  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形.

## 习 题 7.1

1. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于各坐标面对称的点的坐标.
2. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于各坐标轴对称的点的坐标.
3. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于原点对称的点的坐标.
4. 求证以  $M_1(4, 3, 1)$ ,  $M_2(7, 1, 2)$ ,  $M_3(5, 2, 3)$  三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.
5. 在  $z$  轴上求一点, 使它到点  $M(-4, 1, 7)$  和  $N(3, 5, -2)$  的距离相等.

## § 7.2 向量及其线性运算

向量是由力学、物理学的需要而引入的数学概念. 特别是由于流体力学、电磁场理论的发展, 促使人们对向量作更深入的研究. 向量也是研究数学本身许多问题的基础之一. 在解析几何里, 应用更是直接.

### 7.2.1 向量概念

在中学物理学中有两类性质的量. 一类量只有大小没有方向, 如温度、质量、距离等; 另一类量既有大小又有方向, 如力、速度、加速度等. 前一类量称为数量, 也叫做纯量或者标量; 后一类量称为向量, 也叫向量.

向量常可用有向线段来表示, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 起点为  $M$  终点为  $N$  的有向线段所表示的向量记为  $\overrightarrow{MN}$  (图 7-5), 有向线段的起(终)点即是矢



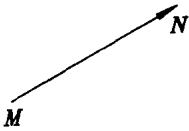


图 7-5

量的起(终)点. 矢量 $\overrightarrow{MN}$ 也可用黑体字母  $\mathbf{a}$  表示.

矢量  $\mathbf{a}$  (或 $\overrightarrow{MN}$ ) 的大小称为矢量的模 (或称为矢量的长度) 用  $|\mathbf{a}|$  ( $|\overrightarrow{MN}|$ ) 表示.

模为 0 的矢量称为零矢量, 记为  $\mathbf{0}$ . 零矢量没有确定的方向, 也可以说零矢量的方向是任意的. 称 $\overrightarrow{NM}$ 为 $\overrightarrow{MN}$ 的负矢量, 写作 $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$ .

在许多实际问题中, 矢量与其起点无关, 这种矢量称为自由矢量. 今后我们只讨论自由矢量(简称矢量), 所以矢量  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$  且  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的方向相同.

始点在坐标原点而终点在  $M$  的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点  $M$  的矢径, 记为  $\mathbf{r}_M$ . 任给矢量  $\mathbf{a}$ , 必有唯一的点  $M$ , 使得  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ . 反之, 任给空间中的一点  $M$ , 可唯一确定一个矢量 $\overrightarrow{OM}$ . 这样, 通过点  $M$  与矢量  $\mathbf{r}_M$  的对应, 得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应. 下面将看到, 这种对应对于矢量的研究与应用是重要的.

方向相同或相反的矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  叫做平行矢量或共线矢量, 记作  $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ . 为了简化许多命题, 规定零矢量与任何矢量平行.

### 7.2.2 矢量的线性运算

矢量的线性运算是指两个矢量的加法、减法和数量与矢量相乘. 现分别介绍如下.

#### 一、矢量的加法

力或速度的合成是依平行四边形法则施行的. 矢量的加法是这类合成的一种抽象.

**定义 1** 把矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  的起点放在一起, 以  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  为邻边作平行四边形, 则从起点到对顶点的矢量称为矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和, 记为  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  (图 7-6).

这种求和的方法称为平行四边形法则. 由于矢量可以平行移动, 所以, 如果把  $\mathbf{b}$  平行移动使其起点与  $\mathbf{a}$  的终点重合, 则从  $\mathbf{a}$  的