积分几何学引论

任德麟 著

上海科学技术出版社

积分几何学引论

任德麟 著

上海科学技术出版社

责任编辑 顾可敬

积分几何学引论

任德麟 著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8.5 字数 220 000

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数 1—4,700

ISBN 7-5323-0323-3/O·19

定价: 3.50 元

序

任德麟教授的“积分几何学引论”成书，叫我写几句话．我感谢他给我这个机会和光荣．

“积分几何”一名是1934年德国数学家 WILHELM BLASCHKE 所起的．它起源于“几何概率”(GEOMETRIC PROBABILITY)，其中的度量往往表为积分．1869年英国数学家 W. CROFTON 找到这些积分间的许多巧妙的关系．法国大数学家 HENRI POINCARE 高瞻远瞩，于1896年引进了运动密度的观念，把积分几何建立在群论的基础上．积分几何的发展 BLASCHKE 的功劳很大．三十年代他的学生中包括吴大任教授及我．其中最杰出者为西班牙-阿根廷数学家 L. A. SANTALO．五十年来 SANTALO 教授一直是世界积分几何的领袖．

任教授此书不袭前人，有许多独特的贡献．举其著者，有 BOFFON 问题的推广，一域包另一域的条件，积分几何的应用等等．第五章讨论任意齐性空间的积分几何，则进入一新阶段了．

积分几何的前途发展尚多，有待于数学家的发掘．例如，复空间的积分几何，尚不知结论是何形状．RADON 变换近年来有重要发展，它发源于积分几何．

总之，积分几何牵涉到许多数学的领域，包括数论(MINKOWSKI-HLAWKA-SIEGEL 定理)，偏微分方程(RADON-JOHN 变换)等．它的应用达到金[illegible]学和医学．是数学的一个重要分支．任教授的书条理明晰，是一本最好的入门的书．

陈省身于天津

1987年6月

前　　言

积分几何渊源于几何概率．最早的几何概率命题远在十八世纪即已出现． BUFFON(1707-1788) 于 1733 年在一份研究报告的附录中讨论了如今很著名的投针问题．在上一世纪下半叶的中期 W. CROFTON 做了大量的工作，重点是讨论各种几何元素集的测度． E. CZUBER(1884), H. POINCARE(1912) 及 R. DELTHEIL(1926)等人的工作则侧重于问题的概率方面． 以上这些工作在素材和方法上为积分几何的出现孕育了条件．

1935 至 1939 年间，W. BLASCHKE 及其学派在HAMBURG大学的讨论班上探讨了一系列问题．这些问题大抵都来自古典的几何概率论．他们研究这些问题的主要目的在于：探索概率思想能否有助于揭示一些几何事实，特别是有关凸体论和整体几何方面的一些结论．他们果然取得了很大的成功，获致许多令人惊羡的成果，其中包括吴大任教授在椭圆几何方面的重要工作．在此期间，W. BLASCHKE 学派以«积分几何»("Integral geometrie")为总标题发表了一系列论文．积分几何作为一门独立的数学分支从此遂为世人所公认．

到 1940 年前后，陈省身教授和 A. WEIL 教授将局部紧群上不变测度之观念引入积分几何，从而形成齐性空间积分几何，对这门学科的进一步发展作出了极为卓越的贡献．

经过半个世纪的发展，积分几何的内容已相当丰富．一方面它拥有 W. BLASCHKE 基本公式、陈省身-严志达 n 维欧氏空间中的基本运动公式等实质性的理论成果，另一方面也发现了它在其他数学分支以及若干应用学科中的应用． L. A. SANTALO 的书«INTEGRAL GEOMETRY AND GEOMETRIC PROBABILITY»(1976 年第一版，1979 年修订版)，总结了积分几何截止当

时为止的主要的理论和应用成果，是公认的积分几何领域的权威性著作.

我们编写这本书的构想是：以尽可能小的篇幅系统论述齐性空间积分几何的最基本的内容和若干典型的应用，其中包括我们自己的一部分工作. 本书前四章较详尽地介绍了平面积分几何，可作为本科高年级学生的选修课教材. 全书可作为研究生的教材或参考书.

吴大任教授对作者的工作极为关怀并给予很多具体指导，作者愿借此机会表示对吴老的由衷的谢忱和敬意.

此外，本书初稿完成后，曾在武汉大学、武汉钢铁学院的几何专业研究生中试用. 参加听课和讨论的有王志伟、周家足、张高勇、聂军、张庆先、刘派峰等同志，他们协助发现书稿的一些疏漏之处，特别是张高勇同志仔细校阅了原稿，提出不少有益的建议，在此一并致谢.

任德麟于武汉钢铁学院

1987年4月27日

目　录

序

前言

第一章　凸集的基本性质 ……………………………………………1

§1.1　基本概念 ……………………………………………1

1.1.1　凸集与凸曲线（1）　1.1.2　支持线及其存在性（1）

§1.2　凸集的支持函数和宽度函数 ……………………………………………3

1.2.1　直线的广义法式（3）　1.2.2　凸集的支持函数与宽度函数（3）　1.2.3　凸曲线作为直线族的包络（4）　1.2.4　周长公式的初等证明（6）

§1.3　某些特殊凸集 ……………………………………………8

1.3.1　常宽凸集（8）　1.3.2　平行凸集（9）

§1.4　Minkowski 混合面积 ……………………………………………9

1.4.1　混合凸集的定义（9）　1.4.2　Minkowski 混合面积（10）

§1.5　单位球面面积和单位球体体积公式 ……………………………………………11

第二章　平面上几何元素集的测度 ……………………………………………13

§2.1　点集的测度 ……………………………………………13

2.1.1　点集的测度（13）　2.1.2　几点注记（14）　2.1.3　一个积分公式（15）

§2.2　直线集的测度 ……………………………………………17

2.2.1　直线集的测度（17）　2.2.2　两个推论（19）　2.2.3　直线密度的另外一些形式（19）　2.2.4　等周不等式的证明（21）

§2.3　点偶与线偶 ……………………………………………22

2.3.1　点偶的密度（22）　2.3.2　凸集的弦幂积分（23）　2.3.3　研究弦幂积分的意义（24）　2.3.4　弦幂积分不等式（25）　2.3.5　线偶的密度（25）　2.3.6　Crofton 公式（26）

§2.4 平面的随机分割 ……………………………………………………27
2.4.1 凸域的随机分割(27) 2.4.2 平面的随机分割(30)
2.4.3 关于随机分割的注记(32)
§2.5 平面上的带域集 ……………………………………………………32
2.5.1 带域的密度(32) 2.5.2 Buffon 投针问题的推广(33)
2.5.3 进一步推广(34)

第三章 平面积分几何的基本定理 ……………………………………40
§3.1 平面运动群 ……………………………………………………40
3.1.1 平面运动群(40) 3.1.2 左推移和右推移(42)
3.1.3 $\mathfrak{M}$ 上的微分形式(43)
§3.2 运动密度 ……………………………………………………44
3.2.1 左不变1形式与右不变1形式(44) 3.2.2 运动密度(46) 3.2.3 运动测度的几何意义(47) 3.2.4 运动密度的其他形式(49)
§3.3 Poincaré 公式 ……………………………………………………50
3.3.1 运动密度的又一表示形式(50) 3.3.2 Poincaré 公式(52)
§3.4 Blaschke 运动基本公式 ……………………………………………53
3.4.1 闭曲线及平面区域的全曲率(53) 3.4.2 Blaschke 运动基本公式(55) 3.4.3 Blaschke 公式的直接推论(57)

第四章 平面积分几何的应用 ……………………………………………59
§4.1 等周不等式 ……………………………………………………59
4.1.1 等周不等式的证明(59) 4.1.2 加强的等周不等式(61) 4.1.3 等周亏格的上界估计(63)
§4.2 一个区域能够包含另一个区域的条件 ……………………………65
4.2.1 一个区域能够包含另一个区域的充分条件(66) 4.2.2 与 Hadwiger 条件的比较(67) 4.2.3 若干推论(69)
§4.3 凸域内定长线段的运动测度 ……………………………………70
4.3.1 问题的提出(70) 4.3.2 凸域内定长线段的运动测度公式(70) 4.3.3 广义支持函数和限弦函数(72)
4.3.4 用广义支持函数表达 $m(l)$ 的公式(73) 4.3.5 矩形域的 $m(l)$(78)

§4.4 运动测度 $m(l)$ 在几何概率问题中的应用 ……………………79
4.4.1 Buffon 问题的 Laplace 推广（79） 4.4.2 利用 $m(l)$ 讨论推广的 Buffon 问题（80） 4.4.3 某些凸多边形域的 $m(l)$ 及其应用（83）
§4.5 与 π 的统计估计有关的一个问题 ……………………93
4.5.1 平行线网（93） 4.5.2 矩形网格 独立性条件（94） 4.5.3 有效性分析（95） 4.5.4 平行四边形网格（97）

第五章 齐性空间积分几何的理论基础 ……………………100
§5.1 微分流形 ……………………100
5.1.1 拓扑空间（100） 5.1.2 拓扑流形与微分流形（102） 5.1.3 可微函数与可微映射（103）
§5.2 流形上的向量场 ……………………104
5.2.1 切空间与切向量场（104） 5.2.2 流形间映射的微分（105） 5.2.3 向量场的局部坐标表示（105）
§5.3 微分形式与外微分 ……………………106
5.3.1 对偶向量场（106） 5.3.2 张量场（107） 5.3.3 流形上的外代数（108） 5.3.4 外微分（112） 5.3.5 用通常的微分表示外微分（113）
§5.4 积分流形与 Pfaff 方程 ……………………115
5.4.1 积分流形（115） 5.4.2 Pfaff 方程组（116）
§5.5 李群及其运动密度 ……………………120
5.5.1 李群（120） 5.5.2 左推移和右推移（121） 5.5.3 左不变微分形式（123） 5.5.4 李群的结构方程与结构常数的性质（125） 5.5.5 李群的运动密度（132）
§5.6 齐性空间的密度和测度 ……………………137
5.6.1 李群作用于流形 齐性空间（137） 5.6.2 G/H 上不变密度存在的条件（138） 5.6.3 Weil 条件（140） 5.6.4 H 为正规子群的情形（142） 5.6.5 陈省身条件（143） 5.6.6 稳定子群（144）
§5.7 应用举例——重新认识平面积分几何 ……………………145

第六章 E_n 中的积分几何 ……………………149
§6.1 E_n 中的运动群 ……………………149
6.1.1 运动群及其结构方程（149） 6.1.2 运动群及其子群的

不变体积元(151)
§6.2 E_n 中线性空间的密度 ……………………………………154
6.2.1 r 维平面的运动密度(154) 6.2.2 包含固定 q 维平面的 r 维平面的运动密度(155) 6.2.3 Grassmann 流形的体积(156) 6.2.4 E_n 中 r 维平面的密度之另一形式(157) 6.2.5 线性空间偶(L_{n-1}, L_{n-1}^*)的运动密度(158) 6.2.6 线性空间偶 $(L_r, L_{r+1}^{(r)})$ 的运动密度(160) 6.2.7 点组的密度公式(160)
§6.3 凸集与均质积分……………………………………162
6.3.1 凸集的均质积分(162) 6.3.2 Cauchy 公式(166) 6.3.3 平行凸集 Steiner 公式(167) 6.3.4 $W_i'(K_{n-r}')$ 的平均值(169)
§6.4 平均曲率积分……………………………………170
6.4.1 E_n 中超曲面的平均曲率积分(170) 6.4.2 平均曲率积分与均质积分之间的联系(172) 6.4.3 一些具体结果(173) 6.4.4 平坦凸体的平均曲率积分(177)
§6.5 与一凸集相交的 r 维平面集……………………………………178
6.5.1 与一凸集相交的 r 维平面集的测度(178) 6.5.2 $W_{i+1}^{(r)}$ $(L_r \cap K)$ 在集 $\{L_r: L_r \cap K \neq \emptyset\}$ 上的积分(179) 6.5.3 Crofton 公式(180)
§6.6 陈省身公式……………………………………181
6.6.1 一个密度关系式(181) 6.6.2 Δ^{r+q-n} 的积分(183) 6.6.3 陈省身公式(184)
§6.7 Santaló 公式 ……………………………………186
6.7.1 一个密度关系式(186) 6.7.2 Santaló 公式(188)
§6.8 二流形交集的体积的积分……………………………………190
6.8.1 一个密度公式(190) 6.8.2 又一个密度公式(192) 6.8.3 体积 $\sigma_{r+q-n}(M^r \cap M^q)$ 的积分(192)
§6.9 陈省身-严志达公式 ……………………………………194
6.9.1 一个重要的密度关系式(194) 6.9.2 陈省身-严志达运动基本公式(196) 6.9.3 关于凸集的运动基本公式(204) 6.9.4 平均曲率积分的积分(205)

第七章 积分几何的应用 ……………………………………208
§7.1 三维欧氏空间积分几何概述 ……………………………………208

7.1.1 E_3中的运动群(208) 7.1.2 E_3中直线和平面的密度(210) 7.1.3 一些基本公式(212) 7.1.4 动图形是凸柱体的情形(214)

§7.2 立体学大意……216

7.2.1 立体学的研究对象(216) 7.2.2 一般性的讨论(217) 7.2.3 切片法——用平面截割(219) 7.2.4 球形颗粒(222) 7.2.5 近球颗粒(223) 7.2.6 穿刺法——用直线探测(224) 7.2.7 晶粒估计问题(226)

§7.3 一个凸体包含另一个凸体的充分条件……226

7.3.1 一个密度公式(226) 7.3.2 一个凸体包含另一个凸体的充分条件(227)

§7.4 凸体内定长线段的运动测度……230

7.4.1 E_n中凸体内定长线段运动测度的一般公式(231) 7.4.2 公式的变形(233) 7.4.3 柱体情形(236) 7.4.4 E_3中长方体的$m(l)$与Buffon问题(238) 7.4.5 E_n中长方体的$m(l)$与Buffon问题(243)

§7.5 关于弦幂积分不等式……244

7.5.1 E_3中弦幂积分不等式(245) 7.5.2 几何概率上的应用(248) 7.5.3 E_n中弦幂积分不等式(250)

名词索引……258

第一章

凸集的基本性质

凸性的研究在许多数学分支中起着重要作用. 凸性与积分几何的关联尤为密切. 当人们用积分几何的许多一般性原理或公式去处理具有凸性的对象时，往往能得到一些十分优美的结果. 于是，凸性便成了积分几何有效性的实证领域；反转过来说，积分几何则是探讨凸性的一种有力工具.

本章扼要介绍平面凸集的基本概念及其基本性质.

§1.1 基本概念

1.1.1 凸集与凸曲线

设 K 为欧氏平面 E_2 上一子集. 如果当 $A\in K$ 和 $B\in K$ 时，连结 A、B 二点的线段也属于 K，则称 K 为凸集. 具有内点之凸集的边界称为凸曲线. 凸集 K 的边界常记为 ∂K，∂K 的长度称为凸集 K 的周长.

1.1.2 支持线及其存在性

设 K 为凸集，$P\in\partial K$. 若 L 是过 P 点的这样一条直线，它使得 K 完全位于由 L 划分 E_2 所形成的二闭半平面之一当中，我们就称 L 是凸集 K 过 P 点的支持线. 点 P 称为支持线 L 与凸集 K 的接触点.

定理　过凸集的任一边界点至少有一条支持线．设 K 为凸集，$P\in\partial K$，则过点 P 至少有一条 K 的支持线．

证明　如果 K 无内点，结论是显然的．现设 Q 为 K 的一个内点，l 是从点 Q 出发而经过点 P 的射线，并将此射线自 P 起的那部分记为 l'．显然，P 为 l' 与 K 的仅有的交点．因为倘若 l' 上另有某点 Q' 竟然在 K 之中，不难看出 P 将成为 K 之内点，从而与 P 为界点之假设相矛盾．

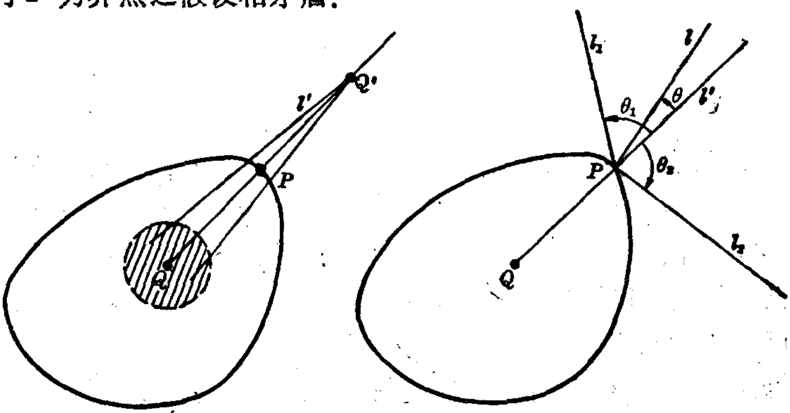

图　1-1

自 P 引这样一些射线 l：l 与 K 除 P 以外无其他公共点．l' 到 l 的角记为 θ．集 $\{\theta\}$ 的上确界记为 θ_1，相应的射线记作 l_1．另一侧照此办理，得射线 l_2．倘能证明 l_1，l_2 的夹角 $\alpha\geqslant\pi$，则定理的证明便完成．事实上，若设 $\alpha<\pi$，可取 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$ 致 $\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2<\pi$，得 l_1' 与 l_2' 构成之角域，循此继进可推知 P 为 K 之内点，导致矛盾．

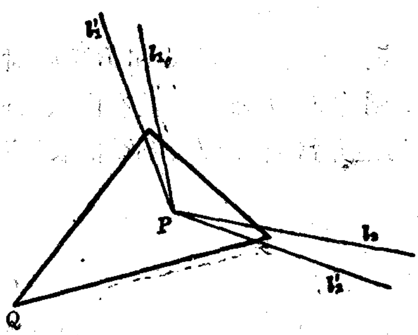

图　1-2

以上证明过程实际上是 Hahn-Banach 定理证明要点的几何复述(见 Spivak[1])．

过凸集 K 的界点有多于一条支持线的情况是存在的，这样的界点称为 ∂K 的角点. 可以证明，凸曲线的角点至多为可数多个. 非角点处的支持线即曲线在该点处之切线.

§1.2 凸集的支持函数和宽度函数

1.2.1 直线的广义法式

设 xOy 为平面上直角坐标系. OR 为自原点引出之射线，由 Ox 轴到射线 OR 的角记为 ϕ. G 为垂直于射线 OR 的任一条直线. 若 G 与 OR 交于 H，规定 $p=\overline{OH}$(O 到 H 的距离)，特别说来，若 H 与原点 O 重合则 $p=0$；若 G 与 OR 的反向延线交于 H，则规定 $p=-\overline{OH}$. 显然，在这样的规定下，G 的方程为

$$x\cos\phi+y\sin\phi-p=0. \tag{1.2.1}$$

方程(1.2.1)的形式与通常的法式一样，但参数 p, ϕ 之意义不同. 我们称(1.2.1)为直线 G 的*广义法式方程*，并简记为 $G(p, \phi)$；它比传统的法式有更良好的适应性.

此外，在有必要考虑直线的方向时，我们总是约定 Ox 到 $G(p, \phi)$ 的角为 $\phi+\frac{\pi}{2}$.

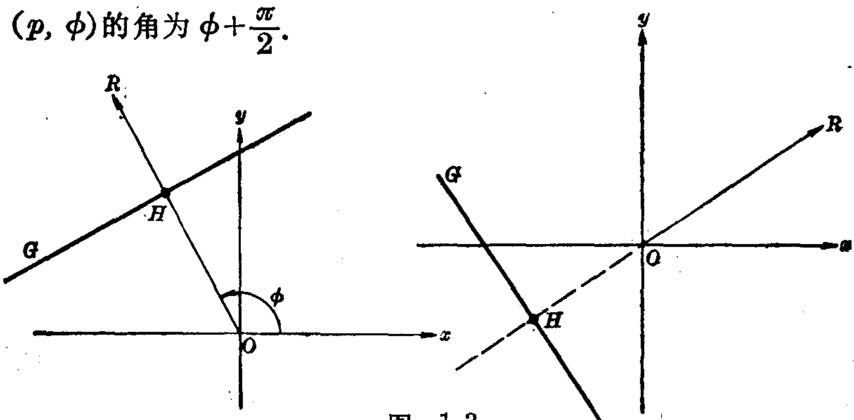

图 1-3

1.2.2 凸集的支持函数与宽度函数

设 K 为有界闭凸集(亦称凸域). 在平面上任意选取坐标系

xOy. 自原点 O 引射线 OR. 作垂直于 OR 且与 K 相遇的任一直线 $G_1(p_1, \phi)$. 集 $\{p_1\}$ 之上确界记为 p, 即

$$p=\sup\{p_1: G_1(p_1, \phi)\cap K\neq\emptyset\}, \tag{1.2.2}$$

其中记号 $G_1\cap K\neq\emptyset$ 表示"G_1 与 K 的交为非空", 即 G_1 与 K 相交的意思. 与(1.2.2)式中 p 相应的直线 $G(p, \phi)$ 显然为 K 的支持线, 称为 K 沿 ϕ 方向的支持线. 函数 $p(\phi)$ 称为凸集 K 的支持函数. 又, 引进函数

$$w(\phi)=p(\phi)+p(\phi+\pi), \tag{1.2.3}$$

则显然可见, $w(\phi)$ 是对应于方向 ϕ, $\phi+\pi$ 的二平行支持线间的距离, 称之为凸集 K 沿 ϕ 方向的宽度. 函数 $w(\phi)$ 称为凸集 K 的宽度函数.

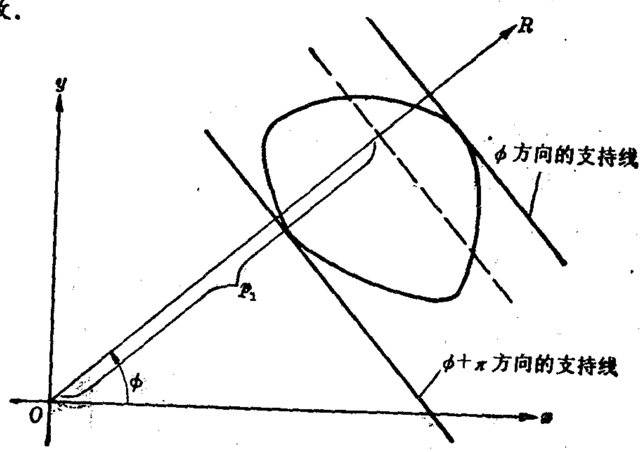

图 1-4

1.2.3 凸曲线作为直线族的包络

设凸集 K 的边界 ∂K 属于 C^2 类. 凸集 K 的所有支持线构成一单参数直线族, ∂K 可视为此直线族的包络. 据此可导出用支持函数表达凸集的周长和面积的公式.

设 K 的支持函数为 $p(\phi)$, 则支持线族之方程为

$$x\cos\phi+y\sin\phi-p(\phi)=0. \tag{1.2.4}$$

微分一次, 得

$$-x\sin\phi+y\cos\phi-p'(\phi)=0. \tag{1.2.5}$$

由(1.2.4)和(1.2.5)二式得到包络(即 ∂K) 的参数方程

$$x=p\cos\phi-p'\sin\phi,\quad y=p\sin\phi+p'\cos\phi, \tag{1.2.6}$$

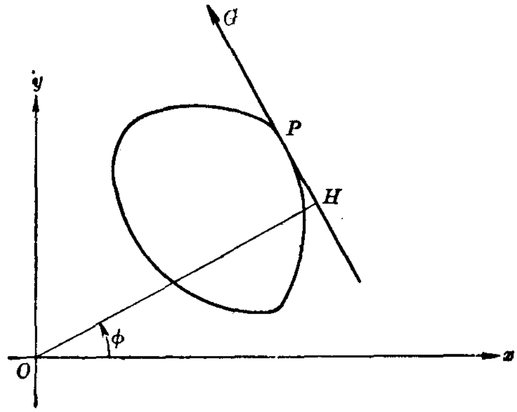

图 1-5

式中(x, y)即支持线$G(p, \phi)$与K的接触点P之坐标. 按照我们在1.2.1段曾经申明过的约定在G上取好正向. H的坐标为$(p\cos\phi, p\sin\phi)$. 易知从H到P的有向线段在轴G上的值为

$$HP=p'. \tag{1.2.7}$$

如所周知[2],一条简单闭曲线是凸曲线的充要条件是:在曲线适当的定向下,它的曲率恒为非负. 假定已经选定这样的定向,那么,由(1.2.6)式,有

$$ds=(p+p'')d\phi,\quad \rho=p+p''>0, \tag{1.2.8}$$

其中$\rho=p+p''$为曲率半径;反过来,若$p(\phi)$为属于C^2类的以2π为周期的周期函数,且$p+p''>0$ $(0\leqslant\phi<2\pi)$,则$p(\phi)$必定是某凸集的支持函数. 综合起来说,以2π为周期的周期函数$p(\phi)$是一个凸集的支持函数的充要条件是

$$p(\phi)+p''(\phi)>0,\quad 0\leqslant\phi<2\pi. \tag{1.2.9}$$

这一结论下面还要用到.

利用$ds=(p+p'')d\phi$,立即可得关于凸集周长的Cauchy公式:

$$L=\int_0^{2\pi}p(\phi)\,d\phi, \tag{1.2.10}$$

其中 L 为凸集的周长. 再由 (1.2.3) 式, 便得到用宽度函数表示的周长公式:

$$L=\int_0^{\pi} w(\phi)\,d\phi. \tag{1.2.11}$$

另外, 还可以用支持函数表达凸集 K 的面积 F. 为避免出现"负面积", 暂将确定支持函数的参考点 O 选在 K 内. 这时显见 $\frac{1}{2}pds$ 为面积元, 故有

$$F=\frac{1}{2}\int_{\partial K} p\,ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(p+p'')\,d\phi, \tag{1.2.12}$$

或

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)\,d\phi. \tag{1.2.13}$$

由于本书中直线方程采用广义法式, 并与此相应地规定了支持函数, 参考点 O 既可以选在 K 内也可以置于 K 外. 但是上述讨论, 包括周长、面积公式及条件 $p+p''>0$, 均不受影响. 为了说明这一点, 显然考虑坐标系的平移已足够. 假设 xOy 平移至 $x_1O_1y_1$, O_1 的坐标为 (a, b). 凸集 K 关于 xOy, $x_1O_1y_1$ 的支持函数分别记为 $p(\phi)$, $p_1(\phi)$, 则

$$p_1(\phi)=p(\phi)-a\cos\phi-b\sin\phi. \tag{1.2.14}$$

于是有

$$p_1+p_1''=p+p'',$$

$$\int_0^{2\pi} p_1(\phi)\,d\phi=\int_0^{2\pi}[p(\phi)-a\cos\phi-b\sin\phi]\,d\phi=\int_0^{2\pi} p(\phi)\,d\phi,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_1(p_1+p_1'')\,d\phi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[p(\phi)-a\cos\phi-b\sin\phi](p+p'')d\phi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(p+p'')\,d\phi.$$

1.2.4 周长公式的初等证明[8]

设 K 为有界闭凸集, 宽度函数为 $w(\phi)$. 为证明周长公式 (1.2.11), 视 ∂K 为一串由支持线构作的多边形之极限. 用对应于方向 $\phi=k\frac{2\pi}{2^{n+1}}$ $(k=0, 1, \cdots, 2^{n+1}-1)$ 的诸支持线构成 2^{n+1}