教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

经济数学基础训练教程

钟　宜　主编
钟　宜　赵籍丰　张旭红　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

112

教育部高职高专规划教材

经济数学基础训练教程

钟宜　主编

钟宜　赵籍丰　张旭红　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础训练教程/钟宜主编 .—北京:高等教育出版社,2001

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-009391-X

Ⅰ.经… Ⅱ.钟… Ⅲ.经济数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 025587 号

责任编辑 李艳馥 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马静如 **责任校对** 许月萍 **责任印制** 宋克学

经济数学基础训练教程
钟宜 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　话	010-64054588	**传　真**	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京地质印刷厂		
开　本	850×1168 1/32	**版　次**	2001 年 6 月第 1 版
印　张	12.375	**印　次**	2001 年 6 月第 1 次印刷
字　数	300 000	**定　价**	12.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

本书是教育部高职高专规划教材《经济数学基础》(顾静相主编)的配套教材.它以上述教材为主要教科书,同时兼顾其他同类教材的内容,读者即使使用其他教材,也可采用本书作为参考书.本书是根据广大高职高专教师、学生的实际需要编写的,既可以作为教师的"教学参考",又可以成为学生的"学习指南".

本教程对《经济数学基础》中的重点、难点逐一进行分析讲解;对典型的例题进行归纳;着重理清解题的思路、方法及其规律,帮助学生正确地理解概念,提高解题的能力和用数学方法分析经济现象,解决实际问题的能力.

本书保持了《经济数学基础》的体系,按原来的章编排,并且每章不再设节.书中各章都包含5部分内容:教学基本要求、内容提要、例题分析、复习思考题和习题选解.

"教学基本要求"明确指出各章必须掌握的知识点及要求对各知识点掌握的程度,强调要以基本要求为准来进行教学.

"内容提要"对各章的基本概念、定理、定义、公式、运算法则等内容进行全面概括,并指出它们之间的内在联系.

在"例题分析"中,作者选择典型的例题,对解题方法和思路给予详细说明,以使读者能举一反三,触类旁通,对运算技巧掌握得更熟练.

"复习思考题"主要包括选择题和填空题,旨在强化学生对基本概念、定理、定义、公式、运算法则等内容的理解和记忆.书末附有答案.

"习题选解"对《经济数学基础》中有一定难度的习题给出详细

解答，具体地帮助学生解决练习时遇到的实际困难.

本书编选了4份自测题(微积分部分2份，线性代数、概率论与数理统计部分各1份.)，使学生自测后可以估计自己的水平，同时对教师命题有一定的指导作用.

全书1册共12章，分别由钟宜(第1～6章)、赵籍丰(第7～9章)和张旭红(第10～12章)编写.

《经济数学基础》的主编、中央广播电视大学的顾静相副教授对本书初稿进行了认真详尽的审阅，提出了很多宝贵意见.

本书是作者在大量教学实践的基础上编写的，希望能对读者有所帮助，不妥之处恳请指正.

编　者

2000年11月

第 1 章　极限与连续

一、教学基本要求

1. 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；

2. 理解需求函数与供给函数的概念；

3. 理解函数极限的描述性定义；

4. 理解函数在一点连续的概念及初等函数的连续性；

5. 理解无穷小的性质；

6. 了解反函数的概念；

7. 了解函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；

8. 了解左、右极限的定义；

9. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系；

10. 了解闭区间上连续函数的性质；

11. 掌握复合函数的复合过程；

12. 掌握极限四则运算法则；

13. 会用函数关系描述经济问题；

14. 会对无穷小进行比较；

15. 会利用两个重要极限求极限；

16. 会求函数的间断点；

17. 会求连续函数和分段函数的极限.

二、内 容 提 要

(一) 函数

1. 函数的定义 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在一个正数 M,对于所有的 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的;若不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

(2) 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,对于任一 $x\in D$,则

偶函数:$f(-x)=f(x)$,图象关于 y 轴对称;

奇函数:$f(-x)=-f(x)$,图象关于原点对称.

(3) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,若对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的;若对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的.

(4) 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在正数 a,对于属于定义域 D 的任意 x,$x-a\in D$,使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立,则称此函数为周期函数.满足这个等式的最小正数 a 称为函数的周期.

3. 反函数　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 $\mathbf{R}$，若对于 $\mathbf{R}$ 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

4. 分段函数　在自变量的不同变化范围中，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数.

5. 基本初等函数　包含常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类. 其中指数函数和对数函数互为反函数，三角函数和反三角函数互为反函数.

6. 复合函数　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 若 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

7. 初等函数　由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的，且可以用一个解析式子表示的函数叫做初等函数.

(二) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量　若函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷小量.

2. 无穷大量　若在自变量 x 的某个变化过程中，函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量，即 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷大量. 简称无穷大. 记作

$$\lim f(x)=\infty.$$

3. 无穷小量的性质

性质 1.1　有限个无穷小量的代数和仍然是无穷小量.

性质 1.2　有界变量乘无穷小量仍是无穷小量.

性质 1.3　常数乘无穷小量仍是无穷小量.

性质 1.4 无穷小量乘无穷小量仍是无穷小量.

4. 无穷小量的阶 设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小量,

(1) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是比 β 高阶的无穷小量,也称 β 是比 α 低阶的无穷小量;

(2) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c$($c$ 是不等于零的常数),则称 α 与 β 是同阶无穷小量.若 $c=1$,则称 α 与 β 是等价无穷小量.

5. 变量极限与无穷小量的关系 函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是:$f(x)$ 可以表示为 A 与一个无穷小量之和.即

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\text{其中} \lim\alpha=0.$$

(三) 极限

1. 数列极限的定义 对于数列 $\{x_n\}$,若当 n 无限变大时,x_n 趋于一个常数 A,则称当 n 趋于无穷大时,数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限.记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad \text{或} \quad x_n\to A(\text{当 } n\to\infty).$$

2. $x\to\infty$ 时函数的极限 若当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (\text{当 } x\to\infty).$$

若当 $x>0$ 且无限增大时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (\text{当 } x\to+\infty).$$

若当 $x<0$ 且 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时以 A 为极限,记作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (当 \ x \to -\infty).$$

3．$x \to x_0$ 时函数的极限　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义,若当 x 趋于 $x_0(x \neq x_0)$ 时,函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A,则称当 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (当 \ x \to x_0).$$

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 右侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义,若当 $x > x_0$ 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A,则称当 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的右极限是 A,记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (当 \ x \to x_0^+).$$

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 左侧的某个邻域(点 x_0 本身可以除外)内有定义,若当 $x < x_0$ 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A,则称当 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的左极限是 A,记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (当 \ x \to x_0^-).$$

4．极限存在的充分必要条件　当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限存在且相等,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

5．极限的运算法则　若 $\lim u(x) = A$,$\lim v(x) = B$,则

(1) $\lim[u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x) = A \pm B$;

(2) $\lim[u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x) = A \cdot B$;

(3) 当 $\lim v(x) \neq 0$ 时,

$$\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)} = \frac{A}{B}.$$

6．求极限的方法

(1) 利用函数的连续性求极限

设 $f(x)$是初等函数,定义域为(a,b),若 $x_0\in(a,b)$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

(2) 当函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续时,可以交换函数符号和极限符号,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x).$$

(3) 利用无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小求极限

(4) 利用无穷小量与无穷大量的倒数关系求极限

(5) 利用两个重要极限求极限

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$$

和由两个重要极限推出的结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{x}=k\,(k\neq 0)$$

和

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=\mathrm{e}^{ab}(a,b,c\ 为常数)$$

都可以作为公式使用.

7. 有理分式的极限

(1) $x\to x_0$ 时　当分母极限不为零时,可直接利用函数的连续性求极限.当分母极限为零时,又分为两种情况:若分子极限不为零,则由无穷小量与无穷大量的倒数关系可得原式的极限为无穷大;若分子极限也为零,则分解因式,消去无穷小量因子后再求极限.

(2) $x\to\infty$时　有下面的结论($a_0\neq 0,b_0\neq 0$):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

(四) 函数的连续性

1. 函数在点 x_0 连续定义　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,若当自变量的改变量 Δx 趋于零时,相应函数的改变量 Δy 也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 连续.

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,若当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限存在,且等于 $f(x)$在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

2. 函数在开区间连续定义　若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内任何一点都连续,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续.

3. 函数在闭区间连续定义　若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内连续,且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b),$$

则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

4. x_0 为 $f(x)$的间断点的条件　若 $f(x)$在点 x_0 处有下列三种情况之一,则点 x_0 是 $f(x)$的一个间断点.

(1) 在点 x_0 处,$f(x)$没有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(3) 虽然 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

5. 连续函数的运算法则　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则这两个函数的和 $f(x)+g(x)$、差 $f(x)-g(x)$、积 $f(x)\cdot g(x)$、商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0) \neq 0$ 时）在点 x_0 处连续.

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

6. 初等函数的连续性　初等函数在其定义区间内都是连续的.

7. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在这个区间上一定有最大值和最小值.

(2) 介值定理　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对介于 m 和 M 之间的任一实数 c，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

(3) 推论　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

（五）本章知识结构图

$$\begin{array}{c}\text{函数}\\ y=f(x)\end{array}\begin{cases}\text{几种特性}\\ \text{初等函数}\\ \text{分段函数}\end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\text{极限}\\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\end{array}\begin{cases}\text{单侧极限}\longrightarrow\text{极限存在的充分必要条件}\\ \text{无穷小量与无穷大量}\begin{cases}\text{无穷小与极限存在的关系}\\ \text{无穷小的性质}\\ \text{无穷小与无穷大关系}\end{cases}\\ \text{运算法则}\end{cases}$$

$$\text{连续}\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\begin{cases}\text{函数在开区间内连续}\\ \text{函数在闭区间上连续}\\ \text{间断点的判断}\\ \text{初等函数的连续性}\end{cases}$$

三、例 题 分 析

（一）函数概念

例 1　下列关系中，(　　)是 y 与 x 的函数关系.

(a) $y=c$（c 为常数）　　(b) $x=a$（a 为常数）

(c) $y=\ln(-x)$　　(d) $y=\ln(-x^2)$

解　(a) 从表面看来 $y=c$ 不含 x，它表示的对应规则是"无论 x 取什么实数值，总以唯一确定的数值 c 与之对应"，符合函数定义，因此 $y=c$ 是 y 与 x 的函数关系.

(b) $x=a$ 表明 y 不受任何限制，可以为任意值，即 $x=a$ 时，y 可以任意值与之对应，即有无穷多个值与 $x=a$ 对应，不符合函数定义，因此 $x=a$ 不是 y 与 x 的函数关系.

(c) 要使对数有意义，真数应该大于零，即 $-x>0$，因此只要 $x<0$ 就能够满足，所以 $y=\ln(-x)$ 是定义域为 $(-\infty,0)$ 的 y 与 x 的函数关系.

(d) 对应规则 $y=\ln(-x^2)$ 要求 $-x^2>0$，而实际上任何一个实数都不能满足这个不等式，即对任意实数 x，都没有按规则 $y=\ln(-x^2)$ 与之对应的实数 y，所以 $y=\ln(-x^2)$ 不是 y 与 x 的函数关系.

本题应该选(a)，(c).

例 2　给定的各对函数中是相同的函数的有(　　).

(a) $y=\ln[x(x-1)]$ 与 $y=\ln x+\ln(x-1)$

(b) $y=\ln\dfrac{1-x}{x}$ 与 $y=\ln(1-x)-\ln x$

解 (a) $y=\ln[x(x-1)]$的定义域应满足 $x(x-1)>0$,于是有

$$\begin{cases}x>0\\x-1>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}x>0\\x>1\end{cases},\text{即 } x>1;$$

或

$$\begin{cases}x<0\\x-1<0\end{cases},\text{即}\begin{cases}x<0\\x<1\end{cases},\text{即 } x<0.$$

所以 $y=\ln[x(x-1)]$的定义域为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

而 $y=\ln x+\ln(x-1)$的定义域应满足

$$\begin{cases}x>0\\x-1>0\end{cases},\text{即 } x>1.$$

所以 $y=\ln x+\ln(x-1)$的定义域是$(1,+\infty)$.

两个函数定义域不同,因此不是相同的函数.

(b) $y=\ln\dfrac{1-x}{x}$的定义域应满足$\dfrac{1-x}{x}>0$,于是有

$$\begin{cases}1-x>0\\x>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}x<1\\x>0\end{cases},\text{即 } 0<x<1;$$

或

$$\begin{cases}1-x<0\\x<0\end{cases},\text{即}\begin{cases}x>1\\x<0\end{cases},\text{无解}.$$

所以 $y=\ln\dfrac{1-x}{x}$的定义域为$(0,1)$.

$y=\ln(1-x)-\ln x$ 的定义域应满足$\begin{cases}1-x>0\\x>0\end{cases}$,即 $0<x<1$,

所以 $y=\ln(1-x)-\ln x$ 的定义域是$(0,1)$.

两函数有相同的定义域,相同的对应规则,因此是相同的函数.

本题应该选(b).

(二) 函数定义域

例 3 确定函数 $y=\sqrt[3]{1-5x}+\dfrac{2x+1}{x^2-3x-4}$的定义域.

解　当 $x^2-3x-4\neq 0$ 时，$\dfrac{2x+1}{x^2-3x-4}$ 有定义，由 $x^2-3x-4\neq 0$ 可得 $(x-4)(x+1)\neq 0$，得 $x\neq -1, x\neq 4$.

而对于任意的实数 x，奇次根式 $\sqrt[3]{1-5x}$ 都有意义.

所以原函数的定义域是 $x\neq -1, x\neq 4$，即 $(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty)$.

例 4　确定函数 $y=\sqrt{3x-2}-\ln(5-x)+\dfrac{1}{x^2-4}$ 的定义域.

解　偶次根式要求被开方数非负，即 $3x-2\geqslant 0$；对数的真数为正，即 $5-x>0$；分式的分母不能为零，即 $x^2-4\neq 0$.

于是有
$$\begin{cases}3x-2\geqslant 0,\\ 5-x>0,\\ x^2-4\neq 0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\geqslant \dfrac{2}{3},\\ x<5,\\ x\neq \pm 2.\end{cases}$$

所以原函数的定义域是 $\left[\dfrac{2}{3},2\right)\cup(2,5)$.

（三）函数特性

例 5　下列函数中，在区间 $(0,2)$ 内，哪些是有界的？哪些是无界的？

(1) $xy=-2$；(2) $y=\log_5 x$；(3) $y=\dfrac{1}{3^x}$；(4) $y=\operatorname{arccot} x$.

解　函数 $xy=-2$ 和 $y=\log_5 x$ 在区间 $(0,2)$ 内是无界的；函数 $y=\dfrac{1}{3^x}$ 和 $y=\operatorname{arccot} x$ 在区间 $(0,2)$ 内是有界的.

例 6　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\cdot\dfrac{1-a^x}{1+a^x}$；　(2) $f(x)=(x^2+x)\sin x$；

(3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$.

解　(1) $f(-x)=(-x)\cdot\dfrac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}}=(-x)\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$

$$=(-x)\left(-\frac{1-a^x}{1+a^x}\right)=x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数.其中,上式中的第二步是分子分母分别乘以 a^x 得到的.

(2) $f(-x)=[(-x)^2+(-x)]\sin(-x)$

$$=(x^2-x)(-\sin x)=-(x^2-x)\sin x,$$

$$f(-x)\neq f(x)\text{且} f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$既不是奇函数,也不是偶函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{-x}=\dfrac{\cos x}{-x}=-\dfrac{\cos x}{x}=-f(x)$,

所以 $f(x)$是奇函数.

(四) 判断极限存在

例 7 判断函数 $y=10^{-\frac{1}{x-1}}+7$ 当 $x\to1$ 时的极限是否存在.

解 当 $x\to1^+$ 时,$-\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$,$10^{-\frac{1}{x-1}}\to0$,所以

$$\lim_{x\to1^+}(10^{-\frac{1}{x-1}}+7)=7.$$

当 $x\to1^-$ 时,$-\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$,$10^{-\frac{1}{x-1}}\to\infty$,所以

$$\lim_{x\to1^-}(10^{-\frac{1}{x-1}}+7)=\infty.$$

由于 $x\to1$ 时函数的左极限不存在(上面用的记号∞表示极限不存在的一种形式),由极限存在的充分必要条件知当 $x\to1$ 时函数的极限不存在.

(五) 无穷小量

例 8 变量 $y=e^{\frac{1}{x}}-1$ 在( )的变化过程中是无穷小量.

(a) $x\to0^+$ (b) $x\to0$ (c) $x\to+\infty$ (d) $x\to-\infty$

解 (a) $x\to0^+$ 时,$\dfrac{1}{x}\to+\infty$,$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,所以

$$\lim_{x\to0^+}(e^{\frac{1}{x}}-1)=+\infty.$$