数学思维能力的训练

王屏山 傅学顺 编著

广东人民出版社

数学思维能力的训练

王屏山　傅学顺 编著

广东人民出版社

数学思维能力的训练

王屏山
傅学顺 编著

*

广东人民出版社出版
广东省新华书店发行
广东新华印刷厂印刷
850×1163毫米32开本　14.5印张320,000字
1935年2月第1版　1985年2月第1次印刷
印数1--34,850册
书号7111·1456　定价2.55元

前　言

本书以深入浅出的道理和大量的例题，向中学生和爱好数学的读者说明：学数学主要不是靠天资，而是靠勤奋，靠有效的思维方法。这种有效的思维方法，通过反复的训练，是完全可以掌握的。在这本书里，我们将用事实证明，有效的思维方法来自分析、设想、归纳、摹仿、似真推理、逻辑推理等能力的培养和训练。

本书的例题解答绝大多数是用高中二年级以下的数学知识。阅读本书的例题时，先看题目，然后自己试一试，解出来后，再看书中的分析和解法，彼此比较，印象才会深刻。有些题即使解不出来，但通过思考，再阅读书中的解法，也会有所收获。

著名数学家关肇直教授1979年冬来广州讲学时，对本书的编写作了指导。万万没有想到，此书还未问世，良师已成故人。我们谨以此书，作为凭吊良师的花环。

在本书的编写过程中，著名数学家江泽涵教授、教育家汪德亮教授多次指导和鼓励，我们特表衷心的感谢。

在此之前，本书的初稿曾被华南师范大学数学系列入选修教程，这次定稿得到该系诸多同事和学生的热情帮助，在此一并致谢！

编著者

1984年6月

目　录

第一章　分析能力的培养 ……………………………………… 1
第一节　追溯型分析法……………………………………………… 4
第二节　构造型（信息型）分析法……………………………23
第三节　前进型分析法……………………………………………45
第四节　混合型分析法……………………………………………66
小　结………………………………………………………………76
第二章　设想能力的培养 ………………………………………79
第一节　设想问题已解、数学猜想和联想…………………80
第二节　从算术妙想转向代数设想 …………………………103
第三节　笛卡尔的“万能代数模型” …………………………110
第四节　欧拉猜想的证明设计 ………………………………124
小　结 ………………………………………………………………130
第三章　归纳能力的培养 ………………………………………132
第一节　穷举归纳法 ………………………………………………133
第二节　穷举归纳法与穷举图 …………………………………145
第三节　用枚举归纳法寻找规律 ……………………………160
第四节　用枚举归纳法寻找规律（续） ……………………175
第五节　从枚举归纳法到数学归纳法 ………………………191
小　结 ………………………………………………………………208
第四章　摹仿能力的培养 ………………………………………210

第一节　波里亚的模型论简介 ……………………210
第二节　双轨模型及其推广和逐次逼近模型 ……………214
第三节　相似模型和辅助图形模型 ………………………233
第四节　从数学归纳法到递归模型 ………………………250
第五节　特殊化模型 ………………………………………271
小　结 ……………………………………………………281
第五章　似真推理能力的培养 ……………………………284
第一节　类比 ………………………………………………286
第二节　模拟 ………………………………………………309
第三节　模拟（续一）……………………………………322
第四节　模拟（续二）……………………………………330
第五节　图形演化和暗桥模型 ……………………………343
小　结 ……………………………………………………361
第六章　逻辑推理能力的培养 ……………………………363
第一节　逻辑推理的职能 …………………………………364
第二节　概念与同一律 ……………………………………371
（一）　同一律 ……………………………………………375
（二）　概念的外延和内涵 ………………………………375
（三）　概念的分类 ………………………………………376
（四）　概念的定义 ………………………………………378
（五）　下定义的规则 ……………………………………380
（六）　特殊定义及其利用 ………………………………382
第三节　判断（命题）与矛盾排中律 ……………………386
（一）　真命题，假命题与或然命题 ……………………387
（二）　肯定命题和否定命题 ……………………………388
（三）　全称、特称与单称命题 …………………………389

（四） 矛盾命题与矛盾排中律 ……………………390
（五） 全称反对命题与特称反对命题 ……………393
第四节 推理与推理链定律 ……………………………395
（一） 三段论式的结构和原理 ……………………399
（二） 三段论式的名词规则 ………………………401
（三） 三段论式的前提规则 ………………………402
（四） 推理公理与推理（链）定律 ………………406
（五） 命题与其逆否命题等价 ……………………408
（六） 定理的使用 …………………………………411
第五节 证明与充足理由律 …………………………413
（一） 证明的结构与相应的原则 …………………415
（二） 充足理由律 …………………………………419
（三） 证明的分类 …………………………………421
第六节 选择题的逻辑处理 …………………………430
小 结 …………………………………………………447
总 论 …………………………………………………448
关于数学思维的基本修养 ……………………………448
参考文献 ………………………………………………455

第 一 章

分析能力的培养

多少年来，中外有些数学教科书，陈述上往往有一个共同的特点：凡是解“要证明的问题”，总是从假设（充分条件）到结论（必要条件）；凡是解“要寻求的问题”，总是从已知到未知．并且，文字上力求整理得简而又简，精而又精，契而又契，以表达简炼、结构紧凑、逻辑严谨为准．

经过这一番整理，发现定理的线索和过程，寻觅解法的线索和过程，解题过程中问题转化，油然而生的联想、怀疑、猜想，以及它们在解题过程中的重大作用，可以说统统掩盖殆尽．这样，学生就没法在教科书上找到分析的楷模，有时，问题的解法简直就象天上掉下来的．再加上数学本身的抽象性，就容易在大多数学生中，产生对数学的各种不正确的看法和不正常的心理状态．

要避免这种局面，就必须抛弃照本宣科．备课一深入，总要与上述整理背道而驰，把整理掉的东西一一找回来．如果自己解题，则须自行寻找线索，竭力转化、联想、猜想，尤其在“三岔口”作方向择优．——如果还要搬进课堂，则这些步骤尚须依次清理、记住，临堂才能把问题讲深讲透，讲得有声有色，就象魏惠王面前那位“庖丁”，不仅能表演精堪的解牛技

术，而且能说出解得又快又净的原因所在，赖以熏陶学生，逐渐培养起分析问题的能力和积极思考的良好习惯，把死记硬背减到尽可能少的程度。

格言虽好，不如实例．比方讲一道题：

“已知a^2，b^2，c^2成等差数列，求证

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}$$

也成等差数列。”

如果一本书或一位教师这样来讲：

“$\because a^2$，b^2，c^2成等差数列，

而等差数列各项同加一个数，不会改变等差性（和公差），

$\therefore a^2+(ab+ac+bc)$，$b^2+(ab+ac+bc)$，
$c^2+(ab+ac+bc)$也成等差数列，

即 $(a+b)(a+c)$，$(a+b)(b+c)$，$(a+c)(b+c)$成等差数列。

而等差数列各项同除以一个非零的数，不会改变等差性（只改变公差），

则 $\dfrac{(a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$，$\dfrac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$，
$\dfrac{(a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$成等差数列，

则 $\dfrac{1}{b+c}$，$\dfrac{1}{a+c}$，$\dfrac{1}{a+b}$成等差数列。”

那么，无论从逻辑上，还是从传授知识的角度来看，这种讲法无疑是正确的．但从教育素质，从培养学生的思维能力的角度来看，则这种讲法是不可取的．它的主要缺点是与思维过程即

觅取解法的过程相反，学生无法从中学到思维的方法．我们的讲法应当尽量接近于思维过程：

“从假设通到结论的道路，一时还看不清楚，主要原因是结论中数列各项的形式太陌生，因此，首先要改变它的表示形式。

欲证 $\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{a+b}$成等差数列，

只需证$\frac{2}{a+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$，（仍很陌生，两边乘以公分母）

只需证$2(a+b)(b+c)=(a+b)(a+c)+(a+c)(b+c)$，

即 $2(b^2+ab+ac+bc)=(a^2+ab+ac+bc)+(c^2+ab+ac+bc)$

则只需证 $2b^2=a^2+c^2$——我们正好有这个！”

这两种讲法的优劣是显然的：用前一种讲法，学生在佩服老师“高明”之余，只能引出“搞数学真难”，“学数学就是要有天分”，“凭我这个脑袋，怎能想出这些步骤”之类的想法，从而使之害怕数学，或对数学的学习产生自卑感．若用后一种讲法，学生就可以从中学到一种分析方法，甚至看到编题者的良苦用心：尽量使结论具有陌生的形式，原是为了“拐弯”，使从假设通到结论的道路变得弯弯曲曲，增加解题难度．那么，不断改变结论的陌生形式，实际上是把“弯”拐回来，回到我们熟悉的出发点——假设．换言之，后一种讲法虽然使我们教师失掉了被学生誉为“高明”的机会，却使学生挽回了自信心．曾有许多名家，把我们教师比作“蜡烛”，“学子牛”，“学子之梯”，看来最恰当不过了。

第　一　节

追溯型分析法

例1. E为△ABC的中线AD上任一点，∠B>∠C，求证∠EBC>∠ECB（图1.11）.

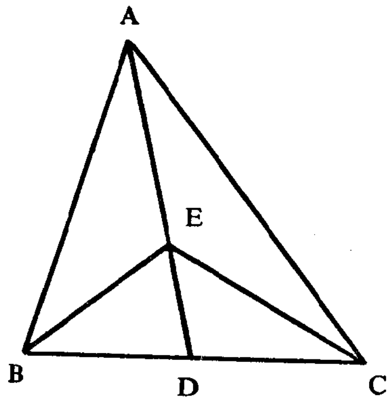

图1.11

【分析】

我们的目标是证明

∠EBC>∠ECB.　（1）

因为这两角都在△BCE中，故只需证明

EC>BE.　（2）

依旧在同一个三角形中考虑问题，显然无法证明（2），那就找两个合适的三角形，因为我们想起了，有关比较两三角形对应边大小的一个定理……

△BDE，△EDC正好分别是EC，BE所在的三角形，且

ED＝ED，BD＝DC，

因而，要证明（2），只需证明

∠EDC>∠EDB.　（3）

因为（3）中的两角不在同一个三角形中，故必须另找两个合适的可比较的三角形．△ADB，△ADC正好分别是∠EDB，∠EDC所在的三角形，且

$$AD = AD, \quad BD = DC,$$

因而，要证明(3)，只需证明

$$AC > AB. \qquad (4)$$

我们在摸索中，当然时时把原命题的假设萦念在心。到此地步，无论如何总可以把(4)和假设

$$\angle B > \angle C \qquad (5)$$

联系起来了，并立即整理出下面的证明过程。

【证明】

由假设 $\angle B > \angle C$, (5)

则在$\triangle ABC$中：$AC > AB$, (4)

因而在$\triangle ADB$，$\triangle ADC$中，

$\angle ADC > \angle ADB$,

即 $\angle EDC > \angle EDB$, (3)

因而在$\triangle EDC$，$\triangle EDB$中：

$EC > BE$, (2)

因而在$\triangle BCE$中：

$\angle EBC > \angle ECB$. (1)

这个例子表明，有一类数学问题，若把赖以找到解法的分析过程逆过来（请注意：分析中各式与证明中各式正好反序），稍加整理，就是该问题的解法。我们在通常的教科书上见到的，正是整理后的论证形式。

现在的问题是：对于这类数学问题来说，为什么把分析过程逆过来，就可以得到解法呢？这种分析有什么特色呢？为了解开这个谜，也为了下面行文的方便，请读者先看看本节末的几个术语……

现在，让我们来回顾一下例1的分析：(1)是原命题的必要条件，(2)是(1)的充分条件，而(3)又是(2)

的充分条件，而（ 4 ）又是（ 3 ）的充分条件，而（ 5 ）则是（ 4 ）的充分条件，但（ 5 ）刚好就是原命题的充分条件．这样，我们就找到了从原命题的充分条件出发，逐步推进到原命题的必要条件，完整的逻辑推理链：

$$(5)\Longrightarrow(4)\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(1)$$

即整个证明过程．（请读者回顾一下本章开头的例题）

例2． 设△ABC的外接圆O的半径为R，$AD\perp BC$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$．求证：$S_{\triangle ABC}=R\cdot EF$．（图1.12）

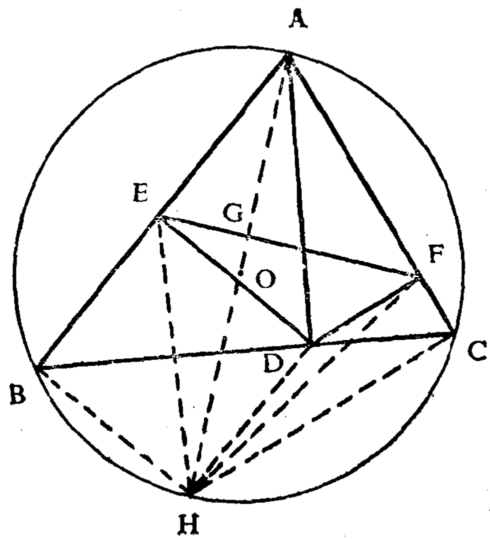

图1.12

【分析】

我们想仿效前例，企图从命题的必要条件

$$S_{\triangle ABC}=R\cdot EF \qquad (1)$$

出发，向后追溯到命题的充分条件的诸条款．

为了启发学生引进辅助线，我们把（1）变成：

$$S_{\triangle ABC}=R\cdot EF$$

$$=\frac{1}{2}(2R)\cdot EF \quad \text{（此时才引进直径}AH=2R\text{）}$$

$$=\frac{1}{2}AH\cdot EF. \qquad (2)$$

为了找到证明的线索，我们又把（2）转化：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot EF$$

$$=\frac{1}{2}(AG+GH)EF \quad \text{（此时引进}HE, HF\text{）}$$

$$=\frac{1}{2}AG\cdot EF+\frac{1}{2}GH\cdot EF. \qquad (2)$$

（2）可以启发学生产生一个接一个的猜疑：

AH　也许与EF垂直于G？　　（Ⅰ）

——果如此，则$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AG\cdot EF$，

$S_{\triangle EHF}=\frac{1}{2}GH\cdot EF$！

难道△EHF与四边形BCFE等积？　　（Ⅱ）

随之而来的，当然是作出努力，证实或否定这些猜想。连结HD，HB，HC。

∵　$DE\perp AB$，$HB\perp AB$，

∴　$DE\parallel HB$，

则　$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle HDE}$.（同底等高）

同理　$S_{\triangle CFD}=S_{\triangle HFD}$，

因而　$S_{\triangle HFE}=S_{BCFE}$.　　（3）

这就证实了猜想(Ⅱ)，从而加强了学生对猜想(Ⅰ)的信心！

欲达 $\angle HGE=90°$， (4)

鉴于 $\angle EBH=90°$， (5)

只需 $\angle BEG+\angle BHG=180°$. (6)

∵其中 $\angle BHG=\angle BHA=\angle BCA$，(同为$\overset{\frown}{AB}$所对)

∴只需 $\angle BEG+\angle BCF=180°$. (7)

∵其中 $\angle BEG=90°+\angle DEF$，

∴只需 $\angle DEF+\angle BCA=90°$. (8)

∵ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴ E，D，F，A共圆，

则 $\angle DEF=\angle DAF$，

因而欲达(8)，只需$\angle DAF+\angle BCA=90°$， (9)

而这正是

$AD\perp BC$ (10)

的必要条件，即(10)是(9)的充分条件.

为了证实猜想(Ⅰ)，我们从(4)出发，用例1、例2的办法，追溯到了原命题的充分条件. 因此，证明猜想(Ⅰ)的逻辑推理链为：

$$(10)\Rightarrow(9)\Rightarrow(8)\Rightarrow(7)\Rightarrow(6)\Rightarrow(5)\Rightarrow(4).$$

把证明猜想(Ⅰ)的过程加上去，便得：

【证明Ⅰ】

∵ $AD\perp BC$， (10)

∴ $\angle DAC+\angle DCA=90°$. (9)

∵ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴ E、D、F、A共圆，

则 $\angle DAC=\angle DEF$，

因而 $\angle DEF+\angle DCF=90°$， (8)

因而　$\angle BEF+\angle BCF=180°$.　　　（7）

∵其中$\angle BCF=\angle BHA$，（同为$\overset{\frown}{AB}$所对）

∴　$\angle BEF+\angle BHA=180°$，　　　（6）

则$\angle HBE+\angle EGH=180°$.

但　$\angle HBE=90°$，　　　（5）

∴　$\angle EGH=90°$，　　　（4）

即　$AH\perp EF$.

∵　$DE\perp AB$，$HB\perp AB$，

∴　$DE\parallel HB$，

则　$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle HDE}$.

同理　$S_{\triangle CFD}=S_{\triangle HFD}$，

∴　$S_{\triangle HFE}=S_{\triangle HDE}+S_{\triangle HFD}+S_{\triangle DFE}$

$=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CFD}+S_{\triangle DFE}$

$=S_{BCFE}$，　　　（3）

因而　$S_{HFAE}=S_{\triangle HFE}+S_{\triangle AEF}$

$=S_{BCFE}+S_{\triangle AEF}$

$=S_{\triangle ABC}$.

但　$S_{HFAE}=\frac{1}{2}AH\cdot EF$，

故　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot EF$　　　（2）

$=R\cdot EF$.　　　（1）

至此，本问题得到了圆满解决，还有额外收获：$AH\perp EF$等.

【证明Ⅰ】

∵　$BC=2R\sin\angle BAC$，

$EF=AD\sin\angle BAC$

（∵E，D，F，A共圆，AD为直径）

则$AD=\dfrac{EF}{\sin\angle BAC}$，

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}BC\cdot AD=R\sin\angle BAC\cdot\frac{EF}{\sin\angle BAC}$$
$$=R\cdot EF.$$

本证明虽简，却无额外收获：一题引出多题！

例3. 设实数$x\neq-1$，求证：

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\frac{1}{3}.$$

【分析】

欲达	$\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\dfrac{1}{3}$,	则
只需	$\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}+\dfrac{1}{3}\geqslant0$,	即
即需	$\dfrac{3(x^2-6x+5)+(x^2+2x+1)}{3(x^2+2x+1)}\geqslant0$,	即
即需	$\dfrac{4x^2-16x+16}{3(x^2+2x+1)}\geqslant0$,	即
即需	$\dfrac{4(x-2)^2}{3(x+1)^2}\geqslant0$,	则
则需	分母$\neq0$,	∴
只需 ↓	$x\neq-1$.	∵

【证明】

例4. Rt△ABC的斜边AB在平面M内，CD⊥AB，AC，BC与M的交角分别为α，β。求CD与M的交角γ。

【分析】

作CO⊥M，连结OA，OB，OD。则$\angle CAO=\alpha$，$\angle CBO$