科學圖書大庫

集合淺論

編譯者 張國財 校閱 王昌銳

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有　不許翻印

中華民國六十八年三月三十日再版

集　合　淺　論

基本定價 1.30

編譯者　張國財　國立清華大學數學系理學士
校　閱　王昌銳　台灣省立高雄工業專科學校教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「剛掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

目　　次

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　邏輯點滴

§ 1.敍述(Statements)

敍述通常以小寫字母 p、q、r、 等表之。吾人所謂之敍述，有一基本之性質，即：其內容之眞(true)、僞(false) 可唯一確定。—— 或爲眞或爲僞；但不能既眞又僞。一敍述之眞僞稱爲該敍述之眞值(truth value)

有些敍述吾人設定其爲眞確者，此種敍述稱爲公理(axioms)；另外有些敍述經由吾人之證明後，方可確定其爲眞確者，此種敍述稱爲定理(theorems)。

例：“2爲一自然數”爲一敍述；蓋因吾人知其爲眞也。

例：“你貴姓？”非一敍述；蓋因吾人知其既非眞亦非假也。(即此句無眞僞可言)

例：“若m爲一奇數，則m^2 爲一奇數”爲一敍述；蓋因吾人可證其爲眞也。

例：“2＋3＝6　且2爲一偶數”爲一敍述；蓋因吾人知其爲僞也。

§ 2.合成敍述(Composite statements)

有些敍述是由數個子敍述(substatements) 合成者，稱爲合成敍述(如上最後一例是)；通常用以連結二子敍述之合成字爲“且”、“或”、“非”、“若…則”、“若且僅若”(and 、or 、not、if … then 、if and only if)。一合成敍述之眞值，由其內每一子敍述之眞值及子敍述與子敍述間連結之方式即可完全決定。—— 此爲合成敍述之一基本性質。

於合成函數之分析中，吾人借重於簡單符號之應用；下列所舉者爲吾人最常用及者：

p、q、r、s、等：單敍述	$\Rightarrow$ ：意味、意指
$\wedge$ ：且	$\Leftrightarrow$ ：若且僅若
$\vee$ ：或	$\sim$ ：非

附記：無論單敍述或合成敍述，其眞值均不爲主觀意念所左右；亦即一敍述之爲眞或僞，須超脫個人之主觀意念也。故仿如“我姓林或張”、“我現居台南”等句，其眞僞言人人殊，甚且與時俱移者，吾人不認定其爲一敍述。必也自客觀意念言，可確知其眞僞之句，方得稱爲敍述。

§ 3. 聯合敍述(conjunction)

任二敍述可用“且”字予以連結而形成一合成敍述；此合成敍述稱爲原二敍述之聯合敍述。

p、q 二敍述之聯合敍述通常以符號 $p \wedge q$ 表之。$p \wedge q$ 之眞值滿足下列性質：

“若 p、q 均爲眞，則 $p \wedge q$ 爲眞；否則 $p \wedge q$ 爲僞”。吾人亦可將此歸納爲下表：

p	q	$p \wedge q$
眞	眞	眞
眞	僞	僞
僞	眞	僞
僞	僞	僞

（附：形如上表者，稱爲眞値表(truth table)）

例： 若 $p=$“$2+2=4$”、$q=$“$3>1$” 則 $p \wedge q=$“$2+2=4$ 且 $3>1$”。又因 p 爲眞、q 爲眞，故 $p \wedge q$ 爲眞。

例： 若 $p=$“2爲一實數”、$q=$“3爲一偶數”，則 $p \wedge q=$“2爲一實數且3爲一偶數”。又因 p 爲眞、q 爲僞，故由上面之眞値表，可見 $p \wedge q$ 爲僞。

（**附**：若 $p \wedge q$ 爲僞，則吾人不能肯定即有 p 爲僞之結果）

§ 4. 分離敍述(disjunction)

任二敍述可用“或”字予以連結而形成一合成敍述；此合成敍述稱爲原二敍述之分離敍述。

p、q 二敍述之分離敍述通常以符號 $p \vee q$ 表之。$p \vee q$ 之眞值滿足下性質：

"若p、q均爲僞，則$p\vee q$爲僞；否則$p\vee q$爲眞"。吾人亦可將此歸納成下面之眞值表：

p	q	$p\vee q$
眞	眞	眞
眞	僞	眞
僞	眞	眞
僞	僞	僞

例：若$p=$"0爲一有理數"、$q=$"$2+3=6$"，則$p\vee q=$"0爲一有理數或$2+3=6$"。又因p爲眞、q爲僞，故由上表知$p\vee q$爲眞。

例：若$p=$"$\sqrt{2}$爲一有理數"、$q=$"3爲一偶數"，則$p\vee q=$"$\sqrt{2}$爲一有理數或3爲一偶數"。又因p爲僞、q爲僞，故由上表知$p\vee q$爲僞。

（附：雖$p\vee q$爲眞，吾人亦不能肯定即有p爲眞之結果）

§5.否定敍述(negation)

吾人可於任一敍述p之後加上"是假的"三字，以形成p之否定敍述。（可能的話，有時可於p內插入"非"字）。p之否定敍述通常以符號$\sim p$表之。$\sim p$之眞值滿足下性質：

"若p爲眞，則$\sim p$爲僞；若p爲僞，則$\sim p$爲眞"。換言之：否定敍述之眞值永遠與原敍述之眞值相反。此亦可以下眞值表表之：

p	$\sim p$
眞	僞
僞	眞

例：若$p=$"1爲一奇數"，則$\sim p=$"1非爲一奇數"="1爲一奇數是假的"。又因p爲眞，故吾人由上表，知$\sim p$爲僞。

例：若$q=$"$2+2=3$"，則$\sim q=$"$2+2\neq 3$"="$2+2=3$是假的"。又因q爲僞，故由上表，知$\sim q$爲眞。

§6.涵蘊敍述(implication statement)

形如“若p，則q”之敍述通常以”$p \Rightarrow q$”表之；p稱爲假設(hypothesis)、q稱爲結論(conclusion)。

$p \Rightarrow q$ 之眞值滿足以下性質：

“若p爲眞，q爲僞，則$p \Rightarrow q$爲僞；否則$p \Rightarrow q$爲眞”。吾人可歸納此性質爲下表：

p	q	$p \Rightarrow q$
眞	眞	眞
眞	僞	僞
僞	眞	眞
僞	僞	眞

例： 若p=“$1+2=3$”、q=“$2\times 2=4$”，則“$p \Rightarrow q$”=“若$1+2=3$，則$2\times 2=4$”。又因p、q均爲眞，故按上表，知$p \Rightarrow q$爲眞。

例： 若p=“$2>3$”、q=“$1+0=1$”，則“$p \Rightarrow q$”=“若$2>3$，則$1+0=1$”。又因p爲僞、q爲眞，故按上表，知$p \Rightarrow q$爲眞。

（附：雖$p \Rightarrow q$爲眞，吾人亦不能下結論說p爲眞；而即便$p \Rightarrow q$爲眞，q亦不見得即爲眞）。

§7.對等敍述(equivalent statement)

形如”p若且僅若q”之合成敍述通常以“$p \Leftrightarrow q$”表之；此類敍述稱爲對等敍述。對等敍述$p \Leftrightarrow q$之眞值滿足下性質：

“若p、q有相同之眞值，則$p \Leftrightarrow q$爲眞；若p、q之眞值相反，則$p \Leftrightarrow q$爲僞”。吾人可歸納爲下表：

p	q	$p \Leftrightarrow q$
眞	眞	眞
眞	僞	僞
僞	眞	僞
僞	僞	眞

（附：$p \Leftrightarrow q$ 為眞並不卽指 p（或 q）為眞。實則“$p \Leftrightarrow q$”＝$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

例：“x 為一正數若且僅若 $2x$ 為一正數”為“x 為一正數”與“$2x$ 為一正數”二敍述之對等敍述。又因此二敍述有相同之眞值，故其合成之對等敍述為眞。（但吾人並不指單獨之敍述“x 為一正數”為眞。）

例：“$2+1=3$ 若且僅若 $2\times1=3$”為僞；蓋因 $2+1=3$ 為眞而 $2\times1=3$ 為僞也。

§ 8. 廢　話（tautology）

吾人觀察 $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ 之眞值表時可察覺出來：不論 p 為眞或僞，$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ 之眞值永為眞。下面卽是：

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
眞	僞	眞	眞
僞	眞	僞	眞

諸如此類——不論各構成分子之眞值為何，整個合成命題（proposition）之眞值永為眞者，稱為廢話。他如合成敍述（命題）$p \vee (\sim p)$、$\sim[p \wedge (\sim p)]$、$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ 等，亦均為一廢話。讀者若自作其眞值表卽可甚易見得。

§ 9. 證題四法

吾人前所討論者，對吾人之證明題目有間接或直接之助益；欲明此言之不虛，吾人可就常見之證題法加以說明：

(1)直接證法（Direct method）

此法為最常應用之證法。其步驟為由已知之假設開始，而後應用上所列舉之法則，直至吾人得到最終之結論。

說明題：求證：若 p、q 均為眞，則 $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ 為眞。

解　答：因 p、q 為眞，故由眞值表知 $p \vee q$ 與 $p \wedge q$ 均為眞。現由涵蘊敍述眞值表之第一列，知 $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ 為眞。

(2)間接證法（ Indirect method ）

間接證法，亦卽通常所說之反證法是也。其所根據之理論爲：吾人先假設所欲求證之結果爲僞，而後導至與原題所給之條件相矛盾之結論；因此矛盾，故吾人推論出吾人“假設所欲求證之結果爲僞”乃錯誤之假設—是卽吾人所欲求證之結果爲眞。

現再看下表：

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$
眞	眞	僞	僞	眞	眞
眞	僞	僞	眞	僞	僞
僞	眞	眞	僞	眞	眞
僞	僞	眞	眞	眞	眞

因“ $p \Rightarrow q$ ”與“ $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ ”有相同之眞値，故吾人於證明 $p \Rightarrow q$ 成立時，有時並不用直接證法，而間接證明 $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ 成立，道理卽在於此。

說明題：求證：若 $2k+1$ 爲一奇數，則 $2k+3$ 爲一奇數。（ $k \in I$ ）

解　答：設 $2k+3$ 爲一偶數，則 $2k+2$ 爲一奇數；因 $2k+2$ 爲一奇數，故 $2k+1$ 爲一偶數。但此與吾人“ $2k+1$ 爲一奇數”之條件相矛盾。故吾人“ $2k+3$ 爲一偶數”之假設爲僞——卽 $2k+3$ 爲一奇數。

(3)窮舉證法（ Proof by enumeration ）

於某些問題之證明中，吾人可將所有之可能情形一一加以討論（當所有之可能情形個數有限時）；此種證題法稱爲窮舉證法。

說明題：一整數之平方除以 5 後之餘數絕不爲 3。

解　答：

所有整數必可寫成形如下列形式之一：

$$5k-2,\ 5k-1,\ 5k,\ 5k+1,\ 5k+2 \qquad (k \in I)$$

但

$$(5k-2)^2 = 25k^2-20k+4$$
$$(5k-1)^2 = 25k^2-10k+1$$
$$(5k)^2 = 25k^2$$
$$(5k+1)^2 = 25k^2+10k+1$$
$$(5k+2)^2 = 25k^2+20k+4$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

故任一整數之平方除以5後之餘數必爲0、1或4。

(4)舉反例法（Disproof by counterexample）

欲證明一命題爲僞，舉一反例是十分便捷的方法之一。

說明題：求證命題"若 ab 爲偶數，則 a、b 二者均爲偶數"爲僞。

解　答：令 $a=2$、$b=3$。吾人看出 $ab=2\times3=6$ 爲一偶數，但 $b=3$ 爲一奇數；故本命題爲僞。

～～～此章目的，乃在介紹讀者一些邏輯之基本概念，並提供讀者一些證題之方法。以下各章，方是本書之正題。～～～

第二章　集合

§1.集合（Sets）

集合之觀念乃近代數學各部門基本概念之一。它猶如幾何學中之點、線、平面，是個無定義名詞（undefined terms）。不過，爲了方便起見，吾人可想像集合爲事物之集團。這些集合之組成分子，稱爲集合之元素（elements）—— 它們可爲任意之事物：可以是數、可以是字母、可以是人名、可以是花草樹木、……。換言之：同類之事物可組成一集合，異類之事物亦可組成一集合。

一般而言，抽象之概念經由具體事例加以解說，更易於瞭解。因之，吾人先列舉數則集合之陳述於下：

例 1.1：　孫、錢、李、趙

例 1.2：　一切自然數

例 1.3：　方程式 $x^2-3x+2=0$ 之實數解

例 1.4：　介於 0.5 與 2.5 間之整數

例 1.5：　小於 1 而大於 2 之實數

例 1.6：　我的家人

例 1.7：　本市市長

例 1.8：　我最要好之朋友

稍加觀察上面諸例，吾人即可看出：

(1)集合之元素個數可爲有限（如例 1.1 所示者），亦可爲無限（如例 1.2 所示者）。

(2)有集合爲不含任何元素者。（此爲元素個數有限之一特例；例 1.5 即爲不含元素之集合。）

(3)不同之二陳述，可能表同一集合。（如例 1.3 與例 1.4 所示者即是）。

(4)相反的：同一陳述因人、因時、因地、因物等之不同，亦可能表不同之集合。（如例 1.6 所示 ——“我的家人”—— 很顯然的，張三的家人和李四的家人不一定一樣；所以，張三的答案和李四的答案不一定一樣。而，即便單由張三作答，亦可能因爲時間上之不同而產生不同之集合。可見 1.6 所成集合是因人、因時而有所不同的。他如例 1.7、

例1.8，亦有同樣可能情形發生也。）

明白了這個道理之後，如果還有人冒昧地說：“世界上活至五百歲的人數為0”，那不但是淺見，亦且為對科學之一諷刺與挑戰也！

§ 2. 符號（Notation）

(1)集合通常以大寫英文字母A、B、X、Y、等表之。

(2)集合之元素通常以小寫英文字母a、b、x、y、等表之。

(3)集合之列舉式（tabular form）：將一集合之所有元素一一列舉出來之集合表法。如例1.1所成集合可寫成｛孫，錢，李，趙｝。（括號之內寫出各元素；元素與元素之間以逗點分開之）。

(4)集合之集合構成式（set — builder form）：將一集合所有元素滿足之條件描述出來之集合表法；其一般形式為｛x｜x 所滿足之條件｝如例1.2可寫成｛x｜x 為一自然數｝。

(5)例1.3所成集合可寫成｛x｜x為滿足$x^2-3x+2=0$之實數｝。

例1.4所成集合可寫成｛x｜x為介於0.5與2.5間之整數｝。

例1.5所成集合可寫成｛x｜x為小於1而大於2之實數｝。

例1.6所成集合可寫成｛x｜x為我的家人｝。

例1.7所成集合可寫成｛x｜x為本市市長｝。

例1.8所成集合可寫成｛x｜x為我最要好之朋友｝。

(6)凡因人、因時、因地、因物等之不同而會使同一陳述表示不同之集合者（如例1.7、1.8等是），吾人均儘量避免考慮它。

(7)符號“$\in$”表“屬於”。吾人用符號$a\in A$以表“a為集合A之一元素”；此式亦可讀作“a屬於集合A”、“a屬於A”或“a包含於集合A內”或“a在A內”。反之，若某物a非為一集合A之元素，則吾人書$a\notin A$；此式亦可讀作“a不屬於A”。（於數學中，吾人通常置一“｜”或“／”於一符號中，以表該符號之否定）。

例如：若$A=\{1,2,3,4\}$，則$1\in A$、$2\in A$、$3\in A$、$4\in A$、但$5\notin A$、$6\notin A$。

§ 3. 空集合（Empty set or null set）

不包含任何元素之集合稱為空集合（如例1.5）；吾人以符號ϕ表之。

§4. 子集合(Subsets)

若集合A之每一元素亦爲集合B之一元素——即“若$x \in A$，則$x \in B$”——則A稱爲B之一子集合；吾人以符號$A \subset B$（或$B \supset A$）表此關係。此亦可讀作“A包含於B”（或“B包含A”）。

顯而易見：$A \subset A$對一切集合A均成立。又由上章所述，知空集合爲任一集合之子集合；即$\phi \subset A$對一切集合A均成立。（蓋因不存在$x \in \phi$中，故命題“若$x \in \phi$，則$x \in A$”對一切集合A均爲眞確也）。

若集合A非爲集合B之一子集合，則吾人書$A \not\subset B$或$B \not\supset A$。此即意指：至少存在一$x \in A$而$x \notin B$。

例如：若$A = \{0, 1\}$、$B = \{-1, 0, 1, 2\}$、$B'' = \{1, 3, 5\}$，則$A \subset B$、但$A \not\subset B''$

§5. 集合之相等(Equality of sets)

若集合A之每一元素均屬於集合B，且集合B之每一元素亦均屬於集合A，則吾人稱集合A等於（ equal to ）集合B；吾人表之爲$A = B$。吾人亦可利用上面子集合之定義，改寫二集合相等之定義如下：

【定義】 $A = B$ 若且僅若 $A \subset B$且$B \subset A$。

至此，吾人又可認定二事實：

(1)一集合並不因其元素排列次序之不同而有所變易。

例如：$A = \{1, 2, 3, 4\}$、$B = \{1, 2, 4, 3\}$、$C = \{4, 3, 2, 1\}$、$D = \{2, 3, 4, 1\}$等等都是相等的；蓋A、B、C、D元素之排列次序雖各不相同，但每一集合中之任一元素均屬於其他三集合故也。

(2)吾人可重複寫某一元素而集合仍不變。例如：$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$等等；蓋因第一個集合之元素均屬於第二個集合，而第二個集合之元素亦均屬於第一個集合也。（餘同此理）

$A \neq B$表A、B二集合不相等。也就是說：至少存在一$x \in A$而$x \notin B$或存在一$x \in B$而$x \notin A$。

§6.眞子集合(Proper subset)

若$A\subset B$且$A\neq B$，則吾人稱A爲B之一眞子集合。例如：

$A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$爲$B=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\}$之一眞子集合。

當然囉：對任一集合A而言，A非A之一眞子集合。

§7.冪集合(Power set)

一集合之元素本身有時亦可爲集合；例如$A=\{1,2,\{1,2\}\}$即是。由此可知某些書上所說之“集合⊂集合”、“元素∈集合”仍有欠缺之處。事實上：“集合⊂集合”、“集合∈集合”、“元素∈集合”、“元素⊂集合”均有可能也；此可用本例$A=\{1,2,\{1,2\}\}$分別加以驗證。(例如：$\{1,2\}$爲A之一元素，但$\{1,2\}\subset\{1,2,\{1,2\}\}$顯然亦成立，故“元素⊂集合”是可能的。)

若集合A之每一元素本身亦均爲一集合，則吾人稱A爲一集合之集合(sets of sets)。注意：$\{0,\{1\},\{2\}\}$當然不能稱爲一“集合之集合”；蓋因0非爲一集合也。

集合之集合最顯然之例子爲：任一集合S之一切子集合所成集合(即通稱爲S之冪集合者)；吾人以2^S表此集合。

當然囉：$\phi\in 2^S$與$S\in 2^S$對一切集合S均成立。又若集合S之元素個數有限——比方說S有n個元素——則由組合之原理，知：S之冪集合恰含2^n個元素。(此實吾人以2^S表S之冪集合之原因也！)

例：$T=\{1,2\}$之冪集合$2^T=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$。

§8.全集合(Universal set)

吾人前面經已提及：$x\notin A$表x非爲A之一元素。有人或許要問：“所有如此之x所成集合爲何？”老實說，這樣的問題是稍嫌不着邊際的。因爲，此處之x範圍實在太廣泛也；廣泛得敎人無從下手。打個譬喻吧：如果吾人考慮之範圍僅限於一切正整數所成集合，則所有$x\notin A=\{1,2,3\}$所成集合即爲$\{n\mid n$ 爲大於3之正整數$\}$；如果吾人考慮之範圍縮小至$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，則此時之一切$x\notin A$所成集合即爲$\{4,5,6,7,8,9,10\}$。於此可見吾人“考慮之範圍”重要之一般也。

於任一討論中，吾人認定(限制)討論中之任一集合均爲某一固定集合

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com