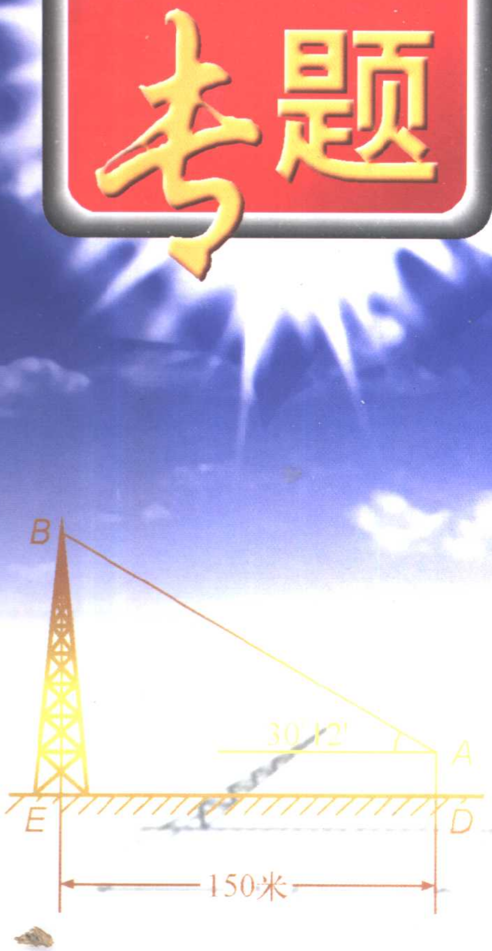
初中数学

龙门专题

解直角三角形与统计初步

南秀全 主编



龍門書局

解直角三角形与统计初步

龙门考题

主编 南秀全

本册主编 秦必耕 魏有成

龍門書局

解直角三角形与统计初步

南秀全　主编

责任编辑　王　敏　乌　云

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2001年2月第　一　版　　开本：880×1230　A5

2001年9月第三次印刷　　印张：5 1/4

印数：40001—60000　　字数：194 000

ISBN 7-80160-129-7/G·165

定　价：6.00元

前　　言

参考书几乎是每一位学生学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》，就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学三个学科共计 44 种，其中初中数学 11 种，高中数学 12 种，初中物理 4 种，高中物理 6 种，初中化学 3 种，高中化学 8 种。

本套书在栏目设置上，主要体现循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”（高中为“3 + X”综合应用篇）。“基础篇”又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“**知识点精析与应用**”着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“**视野拓展**”则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为“拓展”，但仍然立足于教材本身。主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高（中）考必考内容的知识点（这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容）。“视野拓展”即针对这部分知识进行讲解，还包括了另外一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高（中）考形势的变化，综合题与应用题越来越多，试行“3 + X”高考模式以后，这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨 。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. *以“专”为先*　本套书共计 44 种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2.*讲解细致完备*　由于本书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，易于理解和记忆。

3.*省时增效*　由于"专题"内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以满足在较短时间里完成对某一整块知识学透、练透的需求。

4.*局限性小*　与教材"同步"与"不同步"相结合。"同步"是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；"不同步"是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即"点、线、面、体"和"平行、垂直、成角、距离、面积、体积"。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从"专题"中体味"万变不离其宗"的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5.*主次分明*　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本书的另一特点是充分体现中央关于"减负"的精神。"减负"的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率而言，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001年1月1日

目　录

第一篇　基础篇

本书各章知识在中考题中所占比例如下

解直角三角形	统计初步
约占 6% ~ 10%	约占 4% ~ 8%

本书第一章“解直角三角形”是在学习了三角形、四边形和相似三角形等内容后的又一重要的知识. 主要研究锐角三角函数的概念，进而以三角函数的概念为基础，利用直角三角形中边、角之间的关系来解直角三角形. 本章知识与直角三角形和相似三角形有着密切的联系，因此，对于三角函数表示的三角比关系可以根据定义转化为对应线段之比，也可以寻找相似三角形转移等角，通过相等的角的线段比来求得. 在学习中，要特别注意计算的正确性，在特殊角的三角函数式的计算和化简中，常应用学过的二次根式的运算和乘法公式，因此，学好这一章对复习巩固前面所学知识可以起到温故知新的作用.

第二章“统计初步”是统计学的启蒙知识，虽然在整个中学教材中所占比例不大，但切不可忽视. 用数据说话要有统计的基本思想方法：用样本估计总体，在统计的意义上进行判断和决策等. 当我们感悟到这些新颖独特的思想方法后，不仅可以扩大视野，提高思维品质，也为认识现实世界和进一步学习打下良好的基础. 统计学是一门应用性很强的数学分支，在本章学习中，要进一步强化应用数学的意识，在应用的过程中，枯燥的数据运算将会变得新颖有趣.

中考命题涉及本书各章知识既有以填空题、选择题等题型出现的考查基础知识的基本题，又有以解答题形式出现的中档题，特别是近几年来各地中考中，解直角三角形的应用题（包含三角函数知识的综合题），统计初步应用题更是中考的热点题型.

第一章 解直角三角形

本章知识框图

- 直角三角形
  - 边与边关系 — 勾股定理
  - 角与角关系 — 两锐角互余
  - 边与角关系
    - 正弦
    - 余弦
    - 正切
    - 余切
  - 应 用

1.1 正弦和余弦

知识梳理

本节的主要知识有：正弦和余弦的定义；利用正弦、余弦定义求锐角三角函数值；30°,45°,60°角的正弦、余弦值；公式 $\sin A=\cos(90°-A)$，$\cos A=\sin(90°-A)$；在 0°～90°间正弦值、余弦值的变化.

重点是弄清正弦和余弦的定义，30°,45°,60°角的正弦、余弦值并应用于计算，以及正弦、余弦之间的关系；难点是正弦、余弦的定义的理解.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1．正弦和余弦的定义

(1)如图 1-1，在 Rt△*ABC* 中，锐角 *A* 的对边与斜边的比叫做∠*A* 的正弦，记作 $\sin A$．即 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$.

在 Rt△*ABC* 中，锐角 *A* 的邻边与斜边的比叫做∠*A* 的余弦，记作 $\cos A$．即 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$.

从定义中可以看出，正弦、余弦都是在直角三角形中给出的，要避免应用时

对任意三角形随便套用定义.

$\sin A$、$\cos A$ 分别是正弦、余弦的数学表达符号，是一个整体，不能理解为 sin 与 A，cos 与 A 的乘积. 在直角三角形中，正弦、余弦分别是直角三角形中两直角边与斜边的比值，当锐角 A 确定后，这些比值都是固定值.

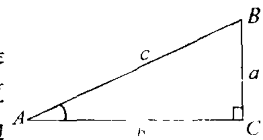


图 1-1

(2)特殊角 30°,45°,60°的正弦值、余弦值　要熟记

30°,45°,60°角的正弦值分别是$\frac{1}{2}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}$;余弦值分别是$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{1}{2}$.

在 Rt△ABC 中，若 $A=30°$，设 $c=1$，则 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，有 $\sin 30°=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$，$\cos 30°=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 其余特殊角的正弦值、余弦值可依此类推.

规定 $\sin 0°=0$，$\sin 90°=1$；$\cos 0°=1$，$\cos 90°=0$.　要熟记

2. 互为余角的正弦、余弦之间的关系

设 A 为锐角，$\sin A=\cos(90°-A)$，$\cos A=\sin(90°-A)$，用语言表述为：任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值；任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值. 如 $\sin 60°=\cos 30°$，$\cos 52°=\sin 38°$. 由此可进行互为余角的正弦值与余弦值间的相互转化.

3. 同角的正弦与余弦之间的关系

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，A 为锐角，即同一锐角的正弦和余弦的平方和等于 1. 这个式子可变形为 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$，利用这些关系可进行同角的正弦与余弦值的互相转化.

4. 在 0°～90°间正弦值、余弦值的变化

如图 1-1，令 $c=1$，锐角 A 越小，则 a 越小，b 就越接近于 1；当 A 越大，则 a 越大($a<c$)，b 就越小. 所以，当角度在 0°～90°间变化时，正弦值随角度的增大(或减小)而增大(或减小)；余弦值随角度的增大(或减小)而减小(或增大). 由此可见，在 0°～90°间角的正弦值和余弦值在 0～1 之间，即 $0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$.

以上性质一定要掌握好

可以应用 0°～90°间正弦值、余弦值的增减性来比较角的正弦值、余弦值的大小，其规律是：(1) A，B 是锐角，若 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$；若 $A<B$，则 $\sin A<\sin B$；(2) A，B 是锐角，若 $A>B$，则 $\cos A<\cos B$；若 $A<B$，则 $\cos A>\cos B$. 上述规律反过来也成立.

记住这些规律，今后解题时很有用

5. 正弦表、余弦表的查法

(1)查正弦表是从上往下,从左往右,处理修正值应采用"同加(或减)同减(或加)"求法;(2)查余弦表是从下往上,从右往左,处理修正值时,应采用"一减(或加)一加(或减)"的方法;(3)对于非表内的查表求角的问题,取一个最接近的数作为所求角的近似值.

【解题方法指导】

[**例 1**] 如图 1-1,Rt△ABC 中,$\angle C=90^\circ$,$AC=12$,$BC=5$.(1)求 AB 的长;(2)求 $\sin A$,$\cos A$ 的值;(3)求 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 的值;(4)比较 $\sin A$ 与 $\cos B$ 的大小.

分析 在 Rt△ABC 中,已知两直角边长求斜边长,可应用勾股定理;再利用两直角边长与斜边长的比分别求出 $\sin A$,$\cos A$ 的大小,从而计算出 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 的大小;在依据定义求出 $\cos B$ 的大小后,即可比较 $\sin A$ 与 $\cos B$ 的大小了.

不妨由这个特例猜猜隐含的规律

解 (1)$\because \angle C=90^\circ$,$AC=12$,$BC=5$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

别忘了用勾股定理

(2)$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13}$,$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{12}{13}$.

(3)$\because \sin^2 A=\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{25}{169}$,$\cos^2 A=\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$,

$\therefore \sin^2 A+\cos^2 A=\dfrac{25}{169}+\dfrac{144}{169}=1$.

由这个特例可猜想,对任意锐角 α,可得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(4)$\because \cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13}$,

由此特例可猜想,在 Rt△ABC 中,$\angle C$ 为直角,则 $\cos A=\sin B$,$\sin A=\cos B$

$\therefore \sin A=\cos B$.

[**例 2**] 求下列各式的值:

没有记住特殊角的三角函数值,就无法解答此题

(1)$2\cos^2 30^\circ-2\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ$;

(2)$\cos^2 45^\circ-\dfrac{1}{\cos 60^\circ}+\dfrac{1}{\sin 90^\circ}+\cos^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ$.

分析 利用特殊角的正弦值、余弦值进行代换,再按混合运算顺序求解,记住特殊角的正弦值、余弦值是解题的关键.

解 (1)$2\cos^2 30^\circ-2\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ$

$$=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3-\sqrt{6}}{2}.$$

(2)原式 $=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2+1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-2+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

[例 3] 已知 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且$\angle B=90°-\angle A$. 求 $\sin B$ 的值.

分析 从$\angle B=90°-\angle A$ 中可知$\angle A,\angle B$ 是互为余角,由此可以考虑利用互为余角的正弦、余弦关系进行转化;或根据正弦值、余弦值与角的对应关系,先求出角的大小.

解法一 $\because \angle B=90°-\angle A,\therefore \angle A=90°-\angle B$.

$\therefore \sin B=\cos(90°-\angle B)=\cos A$. 根据是什么?

$\because \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2},\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法二 $\because \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2},\therefore \angle A=30°$.

$\because \angle B=90°-\angle A,\therefore \angle B=60°.\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[例 4] 比较 $\sin 46°$ 和 $\cos 46°$ 的大小.

分析 在 $0°\sim 90°$间,角的正(余)弦值随角的变化而变化,把 $\sin 46°$ 和 $\cos 46°$ 化为同名三角函数后,再依据正(余)弦的增减性进行比较.

解法一 $\because \cos 46°=\sin 44°$,

且 $\sin 44°<\sin 46°,\therefore \sin 46°>\cos 46°$. 为什么?

解法二 $\because \sin 46°=\cos 44°$,且 $\cos 44°>\cos 46°,\therefore \sin 46°>\cos 46°$.

[例 5] 求适合下列条件的锐角 α.

(1)$\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$;(2)$2\cos(\alpha+10°)=\sqrt{3}$.

分析 从特殊角的正弦值和余弦值入手,按角与三角函数值的对应关系先整体求出 2α 与 $\alpha+10°$的大小.

解 (1)$\because \sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\therefore 2\alpha=45°$. 把 2α 当作一个整体

$\therefore \alpha=22.5°$.

(2)$\because 2\cos(\alpha+10°)=\sqrt{3},\therefore \cos(\alpha+10°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 要先化系数为 1

$\because \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\therefore \alpha+10°=30°.\therefore \alpha=20°$.

【达标跟踪训练】

一、判断题

1. $\cos A$ 表示角 A 与符号 cos 的乘积 (　　)

2. 已知 α 为锐角,则 α 的正弦值、余弦值均是固定值 (　　)

3. 若$\angle A$为锐角,则$\sin A$是一个任意正数 ( )

4. 若α与β互为余角,则$\sin\alpha=\cos\beta$ ( )

5. $\cos 29^\circ<\sin 63^\circ$. ( )

6. 当锐角$A>45^\circ$时,$\sin A<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ( )

7. 查表求$\cos 53^\circ 44'$的值,应先查出$\cos 53^\circ 42'$的值为0.5920,再加上$2'$的修正值0.0005,得出$\cos 53^\circ 44'=0.5925$. ( )

8. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,斜边的高为AD,则有$\sin B=\frac{CD}{AC}$. ( )

9. $\cos^2 75^\circ+\cos^2 15^\circ=1$. ( )

10. 等腰三角形周长为20,边长为6,则底角余弦值为$\frac{2}{3}$. ( )

二、选择题

11. $\sin 30^\circ$的值等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

12. 在$\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$,$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\cos B$的值为 ( )

A. 1　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

13. 如果α是锐角,且$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,那么$\sin(90^\circ-\alpha)$的值等于 ( )

A. $\frac{9}{25}$　B. $\frac{4}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{16}{25}$

14. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$,如果$\angle A=30^\circ$,那么$\sin A+\cos B$的值等于 ( )

A. 1　B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{1}{4}$

15. 在$\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$,$AC=5$,$AB=13$,则$\cos B$等于 ( )

A. $\frac{12}{13}$　B. $\frac{5}{13}$　C. $\frac{5}{12}$　D. $\frac{10}{13}$

16. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$,下列等式一定成立的是 ( )

A. $\sin A=\sin B$　B. $\sin A=\cos A$

B. $\sin(A+B)=\cos C$　D. $\sin A=\cos B$

17. 已知α为锐角,且$\cos\alpha$的值小于$\frac{1}{2}$,那么$\angle\alpha$ ( )

A. 大于60°　B. 大于30°　C. 小于30°　D. 小于60°

18. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$,$AC=1$,$AB=\sqrt{2}$,则$\angle B$为 ( )

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

19. 如果$\angle A$是锐角，且$\sin A=\frac{3}{4}$，那么　　(　　)

A. $0^\circ<\angle A<30^\circ$　　B. $30^\circ<\angle A<45^\circ$

C. $45^\circ<\angle A<60^\circ$　　D. $60^\circ<\angle A<90^\circ$

20. $\sin0^\circ+\cos0^\circ+\sin90^\circ-\cos90^\circ$的值为　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

21. 已知$A+B=90^\circ$，则$\sin^2A+\sin^2B$的值等于　　(　　)

A. 1　　B. $(\sin A+\cos B)^2$　　C. $2\sin^2A$　　D. 0

22. 将$\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B$改写成下列形式的句子，其中错误的是　　(　　)

A. $\sin30^\circ\cos B+\cos30^\circ\sin B$　　B. $\sin30^\circ\cos B+\sin60^\circ\sin B$

C. $\cos60^\circ\cos B+\sin60^\circ\sin B$　　D. $\cos60^\circ\cos B+\sin30^\circ\sin B$

23. 在$\triangle ABC$中，若$|\sin A-1|+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos B\right)^2=0$，则$\angle C$为　　(　　)

A. 75°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

24. 若$\angle B$是$Rt\triangle ABC$的一个内角，且$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\cos\frac{B}{2}$等于　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. 若$0^\circ<A<90^\circ$，且$4\cos^2A-3=0$，则$\angle A$等于　　(　　)

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

三、填空题

26. 若$\sin\theta=\frac{1}{2}$，且$0^\circ<\theta<90^\circ$，则$\theta=$________.

27. 已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AB=3BC$，$\cos B=$________.

28. 已知$\sin36^\circ=\cos\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$，则$\alpha=$________度.

29. 比较大小：$\cos48^\circ$________$\cos50^\circ$.

30. 已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则锐角$\alpha=$________.

31. 式子$1-2\sin30^\circ\cos30^\circ=$________.

32. 在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$3a=\sqrt{3}b$，则$\angle A=$________，$\sin A=$________.

33. 将$\cos21^\circ$，$\cos37^\circ$，$\sin41^\circ$，$\cos46^\circ$的值，按由小到大的顺序排列是________.

34. 已知$\sin^240^\circ+\sin^2\alpha=1$，则锐角$\alpha=$________.

四、解答题

35. $\sin30°\cdot\cos45°+\cos30°\cdot\sin45°$.

36. $(2\sin30°+\sqrt{2}\sin45°)(\cos30°+\sin45°)(\sin60°-\cos45°)$.

37. $(1+\sin40°)(1-\cos50°)-\cos^2 40°$.

38. 在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,已知 $a=2,b=1$,求$\angle A$ 的正弦值,余弦值.

39. 已知 α 为锐角,且 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$,你能求出 $\sin\alpha$,$\sin(90°-\alpha)$的值吗?

40. 在锐角△ABC 中,若 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 求$\angle C$ 的度数.

【答案与提示】

1.× 2.× 3.× 4.√ 5.√ 6.× 7.× 8.√ 9.√ 10.× 11.C 12.B 13.B 14.A 15.A 16.D 17.A 18.B 19.C 20.C 21.A 22.D 23.B 24.B 25.A 26. $30°$ 27. $\frac{1}{3}$ 28. 54 29. > 30. $60°$ 31. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 32. $30°$,$\frac{1}{2}$ 33. $\sin41°<\cos46°<\cos37°<\cos21°$ 34. $50°$ 35. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 36. $\frac{1}{2}$ 37. 0 38. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$,$\frac{\sqrt{5}}{5}$ 39. $\frac{12}{13}$,$\frac{5}{13}$ 40. $75°$(因为$\angle A=60°$,$\angle B=45°$,所以$\angle C=180°-\angle A-\angle B=75°$.)

视野拓展

【释疑解难】

正弦、余弦的计算中,同角的三角函数值存在这样一个特殊关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

如图 1-1,根据正弦定义、余弦定义可知,$\sin\alpha=\frac{a}{c}$,$\cos\alpha=\frac{b}{c}$,则 $\sin^2\alpha=\frac{a^2}{c^2}$,$\cos^2\alpha=\frac{b^2}{c^2}$,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$. 这个证明过程中应用了正弦、余弦定义及勾股定理. 应用定义证题是一种技巧

这个公式也可反过来用,即把"1"转化成 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$,这样便于计算.

【典型例题导析】

[例 6] α 为锐角,且满足 $\sin\alpha=3\cos\alpha$,则 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 等于 ( )

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{3}{10}$

解 $\because \sin\alpha=3\cos\alpha$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

这一个公式很重要，今后经常用到它

$\therefore (3\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$. 即 $10\cos^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{10}$.

$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\alpha=3\cos^2\alpha=\dfrac{3}{10}$. 选 D.

本例依据 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 实现了向同名三角函数的转化，作为一个隐含条件，解题时一定要善于应用它.

[例 7] (1)已知 α 为锐角，且 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$. 求 $\cos\alpha$ 的值；

(2)若 α 为锐角，且 $2\cos^2\alpha+7\sin\alpha-5=0$. 求 α 的度数.

解 (1) $\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\therefore \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$.

$\therefore \cos\alpha=\pm\dfrac{12}{13}$，负值舍去，即 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$.

因为 α 为锐角，所以 $\cos\alpha>0$

(2)原方程可化为 $2(1-\sin^2\alpha)+7\sin\alpha-5=0$.

整理，得 $2\sin^2\alpha-7\sin\alpha+3=0$, $(\sin\alpha-3)(2\sin\alpha-1)=0$.

解得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=3$（舍去），$\therefore \alpha=30^\circ$.

与一元二次方程、完全平方式等结合的问题会出现两解情形，要结合三角函数的几何性质检验并排除多余解.

[例 8] 计算与化简

(1) $(2\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(2\cos\alpha-\sin\alpha)^2$.

(2) $\sqrt{\sin^2 70^\circ}-\sqrt{1-2\sin20^\circ\cos20^\circ}+|\sin20^\circ-1|$.

(3) $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ$.

解 (1)原式 $=4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha$

$=5(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=5$. 利用完全平方和、差的公式展开

(2) $\because \sin70^\circ>0$, $\sin20^\circ-1<0$, $\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=1$,

$\therefore$ 原式 $=\sin70^\circ-\sqrt{\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ-2\sin20^\circ\cos20^\circ}+1-\sin20^\circ$

$=\sin70^\circ-|\sin20^\circ-\cos20^\circ|+1-\sin20^\circ$

$=\sin(90^\circ-20^\circ)-(\cos20^\circ-\sin20^\circ)+1-\sin20^\circ$

$=\cos20^\circ-\cos20^\circ+\sin20^\circ+1-\sin20^\circ=1$.

去绝对值符号时要根据函数值的增减性确定绝对值符号内数的大小. 当 $\alpha<45^\circ$ 时，$\sin\alpha<\cos\alpha$；当 $\alpha>45^\circ$ 时，$\sin\alpha>\cos\alpha$

(3)原式 $=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+\cdots+\sin^2 45^\circ$

$$=(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+\cdots+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

为什么?　　　为什么?

$$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44个1}+\frac{1}{2}=44\frac{1}{2}.$$

[例 9]　m 为何值时,方程 $(m+15)x^2-(3m+5)x+12=0$ 的两根分别是一个直角三角形两锐角的正弦.

解　当 $m=-15$ 时,不满足题目要求.　为什么?

当 $m\neq -15$ 时,设直角三角形的两锐角为 A,B,

则 $\begin{cases}\sin A+\sin B=\dfrac{3m+5}{m+5}, & ①\\ \sin A\cdot\sin B=\dfrac{12}{m+5}. & ②\end{cases}$

①式两边平方,得 $\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B=\left(\dfrac{3m+5}{m+5}\right)^2$.　③

$\because A+B=90°$,故 $\sin B=\cos A$,则 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$.　怎么是这样?

再将②式代入③式,得 $1+\dfrac{24}{m+15}=\left(\dfrac{3m+5}{m+15}\right)^2$.

整理,得 $m^2-3m-70=0$,解得 $m_1=10$,$m_2=-7$.

经检验,当 $m=-7$ 时,原方程无实数根.

故 m 的值为 10.　这一步必不可少

说明　与一元二次方程的结合问题,要检验根的实际意义. 也可把 $m=-7$ 代入②中,右边<0,而左边>0,故可判断 $m=-7$ 舍去.

[例 10]　已知△ABC 中,$\angle C=90°$,$CD\perp AB$ 于 D,如图 1-2. 求证:$\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{CD^2}$.

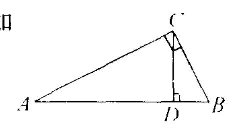


图 1-2

证明　如图所示,$\sin A=\dfrac{CD}{AC}$,$\sin B=\dfrac{CD}{BC}$.

因 $\angle A+\angle B=90°$,故有 $\sin B=\cos A$.

证明几何题的又一个方法——三角法

$\therefore \sin^2 A+\cos^2 A=\left(\dfrac{CD}{AC}\right)^2+\left(\dfrac{CD}{BC}\right)^2=1$.

即 $\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{CD^2}$.

说明　因为三角函数建立了几何图形中的线段比值与角间的关系,故可采用三角函数进行几何的证明与计算.

[例 11]　设 a,b,c 是直角三角形的三边,c 为斜边,整数 $n\geqslant 3$. 求证: