模糊子集·模糊关系
模糊映射

葛 苏 林

北 京 师 范 大 学 出 版 社

模糊子集·模糊关系·模糊映射

葛　苏　林

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：4.875　字数：100千
1985年4月第1版　1985年4月第1次印刷
印数：1—17,500
统一书号：13243·59　定价：1.00元

前　言

美国控制专家扎德（L.A.Zadeh）于一九六五年发表了《模糊集合论》一文，标志着模糊数学的诞生。

和其它学科一样，模糊数学也是由实践的需要而产生的。它是数学理论和应用进一步发展的必然产物。集合能够表现概念，建立在集合论基础上的现代数学已经成为能够描述和表现各种科学的形式语言和系统。但是，普通的集合只能表现那些具有明确外延的概念，在那里，一个对象是否符合于某个概念，必须是“非此即彼”的。然而客观事物则多具有“亦此亦彼”的中介过渡性（比如，年轻不年轻？美不美？清洁不清洁？早不早？晴不晴？便宜不便宜等等），由这种中介过渡性所造成的概念外延的不分明性就叫做模糊性。模糊性存在于一大类识别判决过程之中。对于这类现象，需要形成新的数学方法和理论，这就产生了模糊数学。

计算机科学的迅速发展，是产生模糊数学的直接背景。以精确程序处理日益复杂的系统，突出了精确性与复杂性之间的矛盾，扎德在控制论的实践中总结了一条原理：“所面对的系统越复杂，人们对它进行有意义的精确化的能力就越低，……”复杂性超过了一定的阈限，模糊性便成为不可忽视的因素了。面对着精确性和复杂性的矛盾，人们思索着在极度复杂性面前从精度方面“撤退”一步。扎德举过关于停车问题的例子，引起了许多人的兴趣。要把汽车停在拥挤的停

车场上两辆之间的空地上。这样一个表面上看起来并不复杂的问题，如果要用精确的方法求解也是非常复杂的，即便使用一台大型的计算机也不够用，然而有经验的汽车司机却可以很快将车开到指定的地方。这里起作用的是司机对事物进行模糊识别和判断的能力。在这种条件下，即使用不那么精确的手段，也可以达到精确的目的。模糊数学的使命之一，就是试图提供这样一种手段，使机器能够仿效人脑对复杂系统进行认识和判断，以提高自动化的水平。

自然科学学科，只有当它能够使用数学语言进行描述的时候,才能算是一门成熟的学科。在恩格斯的时代,数学在生物中的应用还等于零，现在已经形成了一门年轻的学科——生物数学。不仅自然科学，甚至连人文、社会学科，都日益迫切地要求数学化，定量化，但是，科学的发展意味着所处理的系统日益复杂，复杂的东西又难于数学化，定量化。尤其是在涉及人文系统（指行为受人的判断、感觉和感情影响的系统，如经济系统，政治系统，教育系统等）的学科中，传统数学的运用还存在着很大的困难，其中最主要的难点，就是在这些学科中，大多数概念都具有模糊性。模糊数学的另一使命，就是要为各门学科，尤其人文学科提供新的数学描述的语言和工具。

模糊数学把数学应用的领域从清晰现象扩大到模糊现象中去，具有广阔的前景和深远的意义。但是，她至今还很年轻，还没有成熟，她的成长还有待人们的长期努力。

这本小册子是为开始学习和运用模糊数学的同志们编写的。现在有不少同志，尤其是广大从事实际工作的同志，已经开始在应用模糊数学这一工具中尝到甜头，他们希望从数

学上搞清楚模糊数学的一些基本的原理，但是又没有时间去阅读那些太深太专的数学书籍，在这种情况下，我们试图为这些同志作一点服务性的工作，把模糊数学的一些最基本的概念作一个简要叙述。我们认为，就目前发展阶段来说，模糊数学的最基本的概念是：模糊子集，模糊关系及模糊映射。我们就拿它们作题目，分为三章论述，必要的数学理论和推导，我们尽量写清楚，但又不太深；我们还结合这些概念介绍一些实际应用（例如，模糊聚类分析和综合评判的正逆过程），其目的不在于介绍方法，而在于帮助读者结合概念，体会应用的思想。具体的应用方法读者自然会从其他书刊中找到。我们所列举的例子多数取材于一般书刊所常引用的那些例子，读者很容易查找到它们的出处，我们这里就不一一指明其文献，在此谨向所有原作者表示谢意。

由于我们对模糊数学的了解比较肤浅，编写时间也较仓促，编写经验不足，更加衷心希望读者批评指正。

编　者　1983.12.

目　　录

第一章　模糊集的概念和运算

§1　模糊集的概念

集合是现代数学中最基础的概念。集合（为了与模糊集合相区别，也称为普通集合）可以表达概念。我们知道，一个概念有它的内涵和外延，符合某概念的对象的全体就构成此概念的外延；一个概念所包含的那些区别于其他概念的全体本质属性就是这概念的内涵。比如“人”这个概念的外延就是世界上所有人的全体，而内涵就是区别于其他动物的那些本质属性的全体，如“会思维”，“能制造和使用工具进行劳动”等等。用集合论的观点来看，一个概念的外延就是一个集合。人们要表达一个概念，一般有两种方法，或指出概念的内涵——即内涵法，或指出概念的外延——即外延法。所谓外延法就是用普通集合来表达概念。例如{1，2，3，……}表达了“自然数”这一概念。

然而，普通集合不能表达所有概念。例如“年轻”，“健康人”，“发烧”，“好人”等等概念就不能用普通集合表达。这是因为这些概念和前面所说的那些相比具有一种外延的不确定性。当我们对一个人是否“年轻”进行评论时，有时很难作出肯定或否定的回答，也就是说，在“年轻”和“不年轻”之间没有一个确定的边界。这种概念外延

的不确定性我们称它为模糊性。由此可见，普通集合在表达概念方面有它的局限性：对于论域指定的讨论范围U中任意元素u及集合A，或者$u\in A$，或者$u\overline{\in}A$，二者必居其一，而且仅居其一，绝对不允许有既属于A又不属于A的情形存在。换句话说，普通集合只能表达“非此即彼”的现象，而不能表达“亦此亦彼”的现象。

在实际生活中具有模糊性的现象实在太多了，要表达这些模糊概念以解决具有模糊性的实际问题，就必须将普通集合的概念加以推广，这就是模糊子集（简称模糊集合）。

模糊子集的定义

为了容易理解模糊子集的定义，我们先回顾普通集合的表示法。表示一个集合，一般采用三种方法，第一种叫列举法，就是把集合中的元素一一列举出来。例如集合A表示“所有小于4的正整数”，则可以记$A=\{1,2,3\}$，对于只含有限个元素的集合经常采用这种办法。第二种叫描述法，就是用描述集合中元素的共同属性的方法表示集合。例如$A=\{x\mid x^2-2=0\}$，表示集合A中的元素是方程$x^2-2=0$的根，即$A=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$。以上两种方法比较直观容易理解。第三种方法是借助于“特征函数”表示集合。首先，设A是论域U中的一个子集，我们称映射

$$\chi_A:U\longrightarrow\{0,1\}$$

$$u\longmapsto\begin{cases}1, & \text{当}\ u\in A;\\ 0, & \text{当}\ u\overline{\in}A。\end{cases}$$

为集合A的特征函数。

例如，设U为自然数集，$A=\{1,2,3\}$，则A的特征函数为：

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & \text{当}u=1,\ 2,\ 3\text{时；}\\ 0, & \text{当}u\text{为其他自然数时。}\end{cases}$$

因此，只要给出论域 U的一个子集 A，就唯一地确定一个A的特征函数。反过来，给定一个从U到$\{0, 1\}$的映射（也称U中的一个特征函数）χ，也就唯一确定一个U的子集A。

例如，设U是全体自然数组成的集合，按（图1－1）作一个从U 到$\{0, 1\}$的映射χ

$$U\xrightarrow{\chi}\{0, 1\}$$

我们取以1为象的所有U中元素作成子集A，显见，$A=\{1, 2, 3\}$，此时

$$\chi=\chi_A。$$

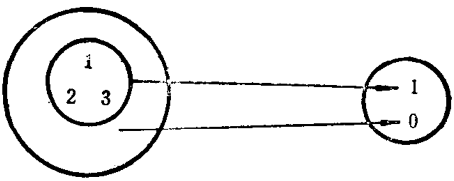


图 1—1

所以，只要给出论域U中的一个特征函数就等于给定了一个U的子集，它由U中以1为象的一切元素所组成。这样，U的子集和它的特征函数之间建立了一一对应关系。从这种意义说"子集就是特征函数"（见图1－2）．

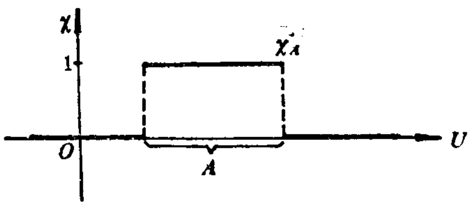


图 1—2

显见，用特征函数表达一个集合的方法与前两种方法本质上

是相同的，只不过数学味浓了些，初学起来会感到困难，但是掌握这种方法是非常必要的。

模糊子集和普通子集的区别在于它的“边界”具有模糊性。对于普通子集，论域U中每一个元素或属于子集（即对子集的隶属程度为1）或不属于子集（即对子集的隶属程度为0），对于U的模糊子集，在U中存在着这样的元素，它们对模糊子集的隶属程度不是1也不是0，而是0，1之间的实数。所以，我们只要把用特征函数表达集合的方法加以推广，将{0，1}改为区间[0，1]就可以得到模糊子集的定义。

定义1-1 说$\underset{\sim}{A}$是论域U上的一个模糊子集，指的是给定一个从U到[0，1]区间的一个映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} : U \longrightarrow [0,\ 1]$$

$$u \longmapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \in [0,\ 1]$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}$叫做$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$叫做$u$对于$\underset{\sim}{A}$的隶属度。$U$上一切模糊子集所成的集合记作$\mathscr{F}(U)$。

例1-1 设$U=\{a, b, c, d, e\}$

（1）令$a \longmapsto 1$，$b \longmapsto 0.9$，$c \longmapsto 0.4$，$d \longmapsto 0.2$，$e \longmapsto 0$，这是U到[0，1]的一个映射，记作$\mu_{\underset{\sim}{A}}$，它确定U上的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$。

（2）令$a \longmapsto 0.8$，$b \longmapsto 0.5$，$c \longmapsto 0.3$，$d \longmapsto 0.2$，$e \longmapsto 0$，这是U到[0，1]的另一个映射，记作$\mu_{\underset{\sim}{B}}$，它确定U上的另一个模糊子集$\underset{\sim}{B}$。

例1-2 设$U=$\{自然数\}。

令$7 \longmapsto 0.1$，$8 \longmapsto 0.5$，$9 \longmapsto 0.8$，$10 \longmapsto 1$，$11 \longmapsto$ $\longmapsto 0.8$，$12 \longmapsto 0.5$，$13 \longmapsto 0.1$，其余的自然数的象全是

0，这是U到[0，1]的一个映射，记作$\mu_{\underset{\sim}{C}}$，它确定U上的一个模糊子集$\underset{\sim}{C}$——近似等于10的整数所组成的模糊子集。

例1－3　设$U=\{$实数$\}$。

令

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\frac{1}{1+\left[\frac{1}{5}(x-10)\right]^2},$$

则$\underset{\sim}{A}$表示聚集在10附近的实数所组成的模糊子集。

例1－4　以年龄作为论域，取$U=[0，100]$。扎德给出"年老"$\underset{\sim}{A}$和"年轻"$\underset{\sim}{B}$两个模糊子集的隶属函数如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant u\leqslant 50 \text{ 时；}\\ \left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当 } 50<u\leqslant 100 \text{ 时。}\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant u\leqslant 25 \text{ 当；}\\ \left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当 } 25<u\leqslant 100 \text{ 时。}\end{cases}$$

见图1－3。

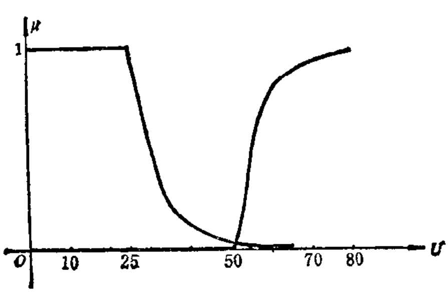


图1－3

从图看出，年龄在50岁以下时，有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=0$，所以50岁以下不属“年老”，当年龄超过50岁，逐渐增大时，对于“年老”的隶属程度也愈来愈大，当年龄为70岁时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(70)=0.94$，这说明年龄为70岁时属于“老年”的隶属程度已达到94%。从图还可以看出，年龄在25岁以下，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)=1$，所以25岁以下100%属于“年轻”，当年龄超过25岁，逐渐增大时，对于“年轻”的隶属程度愈来愈小，当年龄为40岁时，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(40)=0.1$，说明年龄为40岁时，属于“年轻”的隶属程度只有10%。当然，扎德只是示意性地给出了“年老”与“年轻”的隶属函数，其准确性暂且不作讨论。

由定义不难看出，当$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$只取0，1两个数时，隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}$就蜕化为普通集合的特征函数，$\underset{\sim}{A}$蜕化为一个普通集合。所以普通集合是模糊集合的特殊形态。

当论域U只包含有限个元素时，模糊子集的表示法有以下几种（以例1－1（1）为例）。

1. $\underset{\sim}{A}=(1,\ 0.9,\ 0.4,\ 0.2,\ 0)$。当论域$U$中元素的先后次序排定时，以$U$中的每一元素的隶属度按顺序组成一个向量，称为向量表示法。每一分量均在[0，1]区间上取值，称这种向量为模糊向量。

2. $\underset{\sim}{A}=\{(1,\ a),\ (0.9,\ b),\ (0.4,\ c),\ (0.2,\ d),\ (0,\ e)\}$。这种表示法是由普通集合的列举法演变过来的，它由元素和它的隶属度组成的有序对子（前者是隶属度，后者是元素）一一列出。

3. 扎德记法。$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.4/c+0.2/d+0/e$。为了简化，我们约定隶属度为零的项可以不写出来。于是，$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.4/c+0.2/d$。这里的“/”和“+”

不是通常的分数线和加号而是一种记号，“／”下面记的是U的元素，“／”上面记的是该元素的隶属度。“+”表示U中的各元素和它们的隶属度的总括。

对于一般的论域（包括有限论域和无限论域）扎德给出另一记法：$\underset{\sim}{A}=\int_U \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)/u$。这里符号“$\int$”是一种记号不是普通意义下的积分。它仍然表示$U$中各元素及其隶属度的总括。

§ 2　模糊集的运算

一、模糊集之间的包含和相等关系

定义1－2　设论域U的两个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，对于U中每一个元素u，都有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$，则说$\underset{\sim}{A}$包含$\underset{\sim}{B}$，记作$\underset{\sim}{A}\supseteq\underset{\sim}{B}$。如果$\underset{\sim}{A}\supseteq\underset{\sim}{B}$，且$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，则说$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$相等，记作$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

显然包含关系“$\subseteq$”有性质：

反射性：$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{A}$　　（对U的任意模糊子集$\underset{\sim}{A}$）；

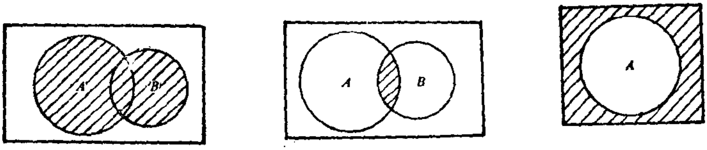
反对称性：若$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$，则$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$；

传递性：若$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$，则$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{C}$。所以关系“$\subseteq$”是$\mathscr{F}(U)$中的一个偏序。

二、模糊子集的“并”、“交”、“余”运算.

首先回顾普通子集的“并”、“交”、“余”运算。设A，B为论域U的两个普通子集，记

$$A\cup B \stackrel{\Delta}{=\!=} \{u \mid u\in A \text{ 或 } u\in B\};$$
$$A\cap B \stackrel{\Delta}{=\!=} \{u \mid u\in A \text{ 且 } u\in B\};$$
$$A^C \stackrel{\Delta}{=\!=} \{u \mid u\in U,\ u\ \overline{\in}\ A\},$$
分别称为A，B 的并集、交集、A 的余集。其图形表示如图1－4



$A\cup B$　　　$A\cap B$　　　A^C

图1—4

普通子集的并、交、余运算也可以通过U中的特征函数逐元给出。设χ_A，χ_B是论域U的两个子集A, B的特征函数，规定$A\cup B$，$A\cap B$，A^c 的特征函数为：对于U中每一个元素 u，

$$\begin{aligned}\chi_{A\cup B}(u) &= \max\{\chi_A(u),\ \chi_B(u)\}\\ &= \chi_A(u)\vee\chi_B(u);\\ \chi_{A\cap B}(u) &= \min\{\chi_A(u),\ \chi_B(u)\}\\ &= \chi_A(u)\wedge\chi_B(u);\\ \chi_{A^C}(u) &= 1-\chi_A(u)。\end{aligned}$$

这里，$\vee$，$\wedge$是我们以后常用的两个符号，它们分别表示sup及inf（取上、下确界），在有限个成员之间，它们便表示max及min（取最大、最小值）。与图1－4相对照的图形见图1－5。

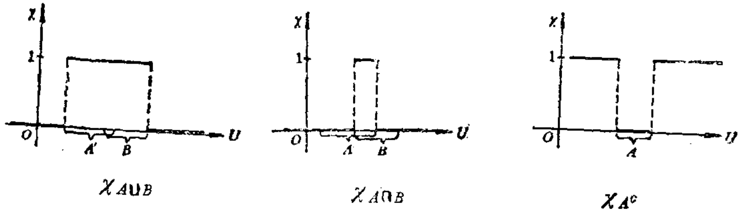


图 1—5

例 1-5　设 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$，$A=\{a,\ b\}$，$B=\{b,\ c,\ d\}$。那么

$$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$
$$A\cap B=\{b\},$$
$$A^C=\{c,\ d,\ e\}。$$

用特征函数表示普通集合的并，交，余运算，虽然没有前一种方法简单明了，但这种方法可以推广到模糊集的运算，即用模糊子集的隶属函数定义其并，交，余运算。

定义 1-3　设 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$是论域U上两个模糊子集，规定$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}^c$的隶属函数分别为$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}$，$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}$，$\mu_{\underset{\sim}{A}^c}$并且对于$U$的每一个元素 u，有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u)\overset{\Delta}{=\!=}\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(u);$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u)\overset{\Delta}{=\!=}u_{\underset{\sim}{A}}(u)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(u);$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^c}(u)\overset{\Delta}{=\!=}1-\mu_{A}(u)。$$

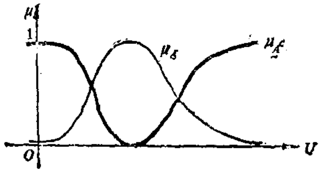
分别叫做$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的并集，交集和$\underset{\sim}{A}$的余集。它们的图形（简单情形）见图 1-6。

例 1-6　设 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.4/c+0.2/d$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}$

$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}$



$\mu_{\underset{\sim}{A}^C}$

图 1—6

$$\underset{\sim}{B}=0.9/a+0.8/b+1/c+0.1/e$$

求$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}^c$。

解：由定义知

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=1/a+0.9/b+1/c+0.2/d+0.1/e；$$
$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=0.9/a+0.8/b+0.4/c；$$
$$\underset{\sim}{A}^c=0.1/b+0.6/c+0.8/d+1/e$$

例 1－7 由例 1－4 知“不年轻”是一模糊子集$\underset{\sim}{B}^c$，它的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{B}^c}(u)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant u\leqslant 25\text{ 时；}\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & \text{当 } 25<u\leqslant 100\text{ 时。}\end{cases}$$

"年老"或"年轻"是模糊子集$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，它的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u)=\begin{cases}1, & \text{当}\ 0\leqslant u\leqslant 25\text{时；}\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当}\ 25<u\leqslant 50\text{时；}\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当}\ 50<u\leqslant 100\text{时。}\end{cases}$$

对于U的n个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，…，$\underset{\sim}{A}_n$记

$$\bigcup_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i=\underset{\sim}{A}_1\cup\underset{\sim}{A}_2\cup\cdots\cup\underset{\sim}{A}_n;$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i=\underset{\sim}{A}_1\cap\underset{\sim}{A}_2\cap\cdots\cap\underset{\sim}{A}_n\text{。}$$

并定义$\bigcup\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i$的隶属函数。对于论域$U$的每一元素$u$，

$$\mu_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i}(u)\overset{\Delta}{=\!=}\max\{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u),\ \cdots,\ \mu_{\underset{\sim}{A}_n}(u)\}$$

$$\overset{\Delta}{=\!=}\bigvee_{i=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(u)$$

$$\mu_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i}(u)\overset{\Delta}{=\!=}\min\{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u),\ \cdots,\ \mu_{\underset{\sim}{A}_n}(u)\}$$

$$\overset{\Delta}{=\!=}\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(u)$$